REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 171-187

Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización

Lizzeth Aurora Navarro Ibarra, Alan Daniel Robles Aguilar, Julio César Ansaldo Leyva, Felipe de Jesús Castro Lugo

Fecha de recepción: 18/08/2015
Fecha de aceptación: 27/05/2016

Resumen	La enseñanza del Cálculo basada en el dominio de la algoritmia genera que éste carezca de sentido para los estudiantes y que tengan conceptos pobres de los objetos matemáticos. Es por ello que en el presente trabajo bajo el enfoque cualitativo se plantea una actividad con hoja de trabajo, manipulable físico y archivo de GeoGebra para resolver un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana. Se considera como un primer acercamiento a la optimización en Cálculo Diferencial en Educación Superior. Al concluir el estudio se determinó que la actividad contribuyó a que los estudiantes identificaran las variables involucradas y la pendiente de la recta tangente igual a cero en un punto crítico. **Palabras clave**: Cálculo, optimización, GeoGebra
Abstract	The teaching of Calculus with only algorithms generates knowledge without meaning for students and poor concepts of mathematical objects. That is why this paper under the qualitative approach raises an activity with a worksheet, physical manipulative object and GeoGebra file to solve optimization everyday life problem. It is considers as a first approach to the topic of optimization in differential calculus in higher education. At the conclusion of the study was determined that the activity helped students identify the variables involved and the slope of the tangent line equal zero at a critical point. **Keywords**: Calculation, optimization, GeoGebra
Resumo	O ensino do Cálculo com base no domínio dos algoritmos faz com que o próprio Cálculo não tenha sentido para os estudantes e que eles adquiram conceitos superficiais sobre os objetos matemáticos. É por isso que neste trabalho sob o enfoque qualitativo apresenta a proposta de uma atividade com uma folha de trabalho, um manipulável físico, assim como um ficheiro de GeoGebra para resolver um problema de otimização da vida quotidiana. Considera-se uma primeira abordagem à otimização em Cálculo Diferencial em Educação Superior. Na conclusão foi determinado que a atividade ajudou aos estudantes na identificação das variáveis envolvidas e da inclinação da tangente zero num ponto crítico. **Palavras-chave: Cálculo, otimização, GeoGebra**

1. Introducción

El acceso masivo de los jóvenes a la universidad es un fenómeno característico del último cuarto del siglo XX, donde las competencias o conocimientos básicos son esencialmente los mismos desde hace 30 años sin embargo en ciencias como la Matemática, se requiere de una adaptación en los modos de enseñanza que hagan que éstas sean atractivas para todos los estudiantes (Rodríguez & Zuazua, 2002, p. 6).

La problemática surge a partir del hecho didáctico que demuestra que la enseñanza actual no produce aprendizaje, situación que se constata en la práctica cotidiana. La enseñanza tradicional de la Matemática en términos generales permite satisfacer el contrato didáctico, pero no parece lograr un verdadero aprendizaje entre los estudiantes (Cantoral, 2001, p. 13).

El llamado método matemático requiere una exigencia sistemática en términos de rigor, reflexión, jerarquización, deducción inductiva y globalización acumulativa, es decir, todo se relaciona, no hay partes independientes. Además todo confluye a concretizar en la aplicabilidad y a la generalización de lo aprendido (Hidalgo, Maroto & Palacios, 2004, p. 93).

Tradicionalmente la Matemática es de las materias que menos entusiasma a la mayoría de los estudiantes, causando rechazo por considerarla difícil y carente de uso posterior en la vida. El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática es afectado por la poca vinculación del contenido con situaciones cotidianas, así como por la falta de utilización de la Matemática en otras asignaturas pertenecientes a un mismo plan de estudio y la vinculación del contenido matemático a realidades ajenas a las de los estudiantes (Ruíz, 2008, p. 4).

Cantoral (2001, p. 6) señala que se ha considerado a la enseñanza de la Matemática como una suerte de arte bajo responsabilidad del profesor, quien evalúa el aprendizaje del estudiante con el buen comportamiento escolar, la aprobación o reprobación del curso y no se analiza qué sucede con el aprendizaje, originando que se confunda el aprendizaje con la acreditación.

Las investigaciones didácticas han encontrado que no es fácil para los estudiantes realizar el análisis de un concepto, cuando éste no se les presenta reducido a su parte algebraica (Artigue, 1998, p. 40). Los estudios realizados por Artigue (1995, p. 97) muestran que las dificultades encontradas por los estudiantes universitarios en el estudio del Cálculo es porque la enseñanza tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica, y en evaluar las competencias adquiridas sobre estas habilidades.

La enseñanza del Cálculo basada en el dominio de la algoritmia genera que éste carezca de sentido para los estudiantes y que tengan conceptos pobres de los objetos matemáticos. Además esto provoca dificultad para resolver problemas no rutinarios, también, al intentar modelar problemas con situaciones de la vida cotidiana y más aún, al interpretar los resultados obtenidos según Dávila, Grijalva y Bravo (2012, p. 212). Es raro que un estudiante conciba a la Matemática como algo que le pueda ser útil más allá de tener alguna habilidad en la resolución de ecuaciones, desarrollar procedimientos, aplicar fórmulas y métodos (Zúñiga, 2007, p. 148).

Bajo esta circunstancia Camarena (2009, p. 23) menciona que la Matemática en contexto ayuda al estudiante a construir su propio conocimiento, dando significado a la Matemática, reforzando el desarrollo de habilidades matemáticas al resolver problemas relacionados con los intereses del estudiante. De esta forma, al ser los estudiantes de Ingeniería en su vida profesional usuarios de la Matemática, requieren en su formación de situaciones que reflejen la utilidad de los conocimientos matemáticos en su área de especialidad (Zúñiga, 2007, p. 149).

Ante la situación descrita se propuso elaborar una secuencia didáctica para la construcción de significado del concepto de derivada a través de problemas de optimización de contexto de la vida cotidiana en estudiantes universitarios. Es por ello que en el presente trabajo se expone el diseño de una actividad donde el estudiante debe resolver un problema de optimización sin el uso de las derivadas y con apoyo de tecnología. Esto con el fin de que se utilice como un primer acercamiento a la temática de la optimización en un nivel de Educación Superior en la impartición de la asignatura de Cálculo Diferencial.

La actividad se desarrolla tomando como base un problema de contexto de la vida cotidiana donde los estudiantes manipulan materiales para buscar la solución al problema planteado. Posteriormente se utiliza la tecnología a través del software GeoGebra para abordar el problema mediante diversas representaciones. El propósito es crear las condiciones que produzcan la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, lo que significa que el estudiante se involucra en una actividad intelectual cuya consecuencia es la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de herramienta y de objeto (Cantoral, 2001, p. 6).

1.1 Objetivo

Diseñar una actividad didáctica apoyada en tecnología para la construcción de significado del concepto de derivada a través de un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana en estudiantes universitarios.

1.2 Justificación

En la vida diaria comúnmente se resuelven problemas de optimización, al momento de elegir un producto, cuando se busca el mejor camino para llegar a un lugar, cuando se planea un día de actividades, se busca optimizar el tiempo. En ninguna de estas situaciones se emplea Matemática formal para encontrar lo que se busca, sino que se resuelve la problemática utilizando la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente se llega a la solución óptima.

En la asignatura de Cálculo Diferencial a nivel universitario, se estudian problemas de optimización, donde se utiliza el concepto de derivada para encontrar los máximos y mínimos, situación que resuelven los estudiantes de forma automática, pero sin realmente concientizarse de las implicaciones del concepto de derivada porque no han desarrollado una actitud científica que involucre la intuición, la conjetura, la formalización y el rigor (Malaspina, 2007, p. 367).

Turégano (1995, pp. 240-241) menciona que solamente una construcción de conceptos que se apoya en la intuición y visualización hace que ésos sean accesibles para los estudiantes, permitiéndoles tener ideas claras con respecto a la diferenciación como método para evaluar pendientes y a la integración como método para evaluar áreas. La instrucción Matemática se debe centrar en el significado y en los conceptos, para que ese conocimiento inicial se procese con profundidad, generando una estructura cognitiva estable donde se pueda construir un desarrollo posterior de las habilidades (Heid, 1988, p. 3).

El uso de aprendizaje activo, tecnología, ideas importantes (ajuste, acumulación) y utilidad instrumental del conocimiento matemático son acciones que apoyan un aprendizaje viable en el aula según Salinas y Alanís (2009, p. 366). Es por ello que centrarse en la génesis histórica de los conceptos y hacer uso de la tecnología es lo que permitirá a los estudiantes enfocarse en los conceptos y los procesos más que en el desarrollo de habilidades algorítmicas según Turégano (1995, p. 230).

2. Marco Teórico

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas son la base de estudio de la Matemática Educativa con la finalidad de mejorarlos. Para comprender estos procesos se requiere de un marco teórico que proporcione las herramientas conceptuales y metodológicas que guíen y fundamenten el análisis de los sucesos que se presentan en el aula.

Por lo anterior, en el análisis, interpretación, diseño y valoración de la actividad didáctica fue considerado el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), porque es un modelo teórico sobre la cognición y la instrucción Matemática integrado en un sistema conceptual lógicamente organizado que considera a la Matemática como una actividad de resolución de problemas, además como un lenguaje simbólico, que articula las facetas institucionales y personales del conocimiento. Este enfoque proporciona una serie de herramientas teóricas y metodológicas que permiten diseñar procesos de enseñanza, así como describir y explicar con diferentes grados de detalle lo que sucede durante el proceso, además de valorar la pertinencia y generar pautas para su mejoramiento. (Godino, Batanero & Font, 2009, p. 4).

3. Metodología

3.1 Participantes y contexto

El estudio se realizó bajo el análisis cualitativo con el fin de identificar la concepción que logran los estudiantes a través de la actividad didáctica diseñada para la comprensión del significado de la derivada en problemas de optimización. La actividad didáctica está dirigida a estudiantes de la asignatura Cálculo I y sus equivalentes para Ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora, donde el objetivo de esta asignatura según el Programa Analítico del Plan 2009 es “solucionar problemas relacionados con procesos y sucesos en fenómenos naturales o producidos por el ser humano, a través de la aplicación de principios, leyes y modelos de las ciencias básicas, formales y experimentales, con el propósito de desarrollar la capacidad de resolver problemas en Ingeniería” (Instituto Tecnológico de Sonora, s.f., p. 1).

Las Ingenierías a las cuales se dirige la asignatura Cálculo I son: Ingeniero Civil, Ingeniero Electromecánico, Ingeniero en Electrónica, Ingeniero Industrial y de Sistemas, Ingeniero en Mecatrónica, Ingeniero Químico, Ingeniero en Software, Ingeniero en Ciencias Ambientales e Ingeniero en Biosistemas, según el Programa Analítico 2009 (Instituto Tecnológico de Sonora, s.f., p. 1).

Se aplicó la actividad didáctica a un grupo de 20 estudiantes, de diferentes edades y sexo indistinto que cursaban la asignatura de Cálculo I en el semestre Enero-Mayo 2014 y se desarrolló durante el mes de Abril. Para ello se dispuso de un aula de cómputo donde cada estudiante tuvo una computadora con el software GeoGebra ya instalado, además de contar con proyector y mesas de trabajo.

3.2 Instrumento

El medio para recabar información sobre las interpretaciones y concepciones de los estudiantes fue una hoja de trabajo que se diseñó para este fin. El instrumento está integrado por 30 reactivos donde algunas son preguntas abiertas, y otros requieren hacer procedimientos matemáticos para obtener áreas y volúmenes. Los valores calculados de volúmenes a su vez el estudiante los refleja de forma tabular y gráfica. En la hoja de trabajo también se registraron las observaciones y conclusiones de los estudiantes al interactuar con el ambiente dinámico.

3.3 Diseño de la actividad didáctica

La actividad didáctica planteo el problema que enunciaba "*Construir un cilindro con el máximo volumen*", siendo la única frase que describía la temática que se iba abordar antes del primer reactivo. Al iniciar la actividad se indicó a los estudiantes que trabajaran en parejas y se les proporcionó una hoja tamaño carta, cinta adhesiva, una regla, tijeras, arroz crudo y una taza medidora. En la primera pregunta se les solicitó doblar la hoja tamaño carta y cortarla (ver figura 1).

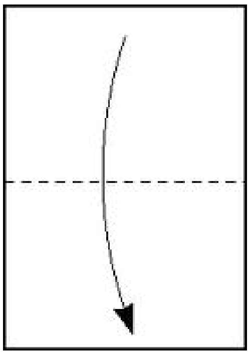


Figura 1. Esquema de una hoja tamaño carta e indicación del doblez que se debe realizar

Con cada mitad de hoja el estudiante construyó un cilindro al doblarla una por el costado largo y la otra por el costado corto. Los cilindros estuvieron formados por la misma área de papel y se cuestionó al estudiante si al colocar los cilindros en la mesa y llenarlos con arroz se necesitaba la misma cantidad de arroz. Después de contestar la pregunta en la hoja de trabajo de forma individual, procedieron los estudiantes a llenar de arroz cada cilindro y midieron la cantidad de arroz utilizado en cada cilindro con la taza medidora. Anotaron los datos de volumen medidos concluyendo de esta forma con la interacción con el manipulable físico y el trabajo en parejas.

Posteriormente se cuestionó al estudiante si existía un cilindro con otras dimensiones de radio y altura, pero con la misma área que tuviera un volumen mayor. A continuación se condujo al estudiante para que construyera la expresión del volumen del cilindro en función del radio de la base y completaron una tabla donde calculaban el volumen para diferentes radios dados con la expresión obtenida. Se les presentó además una tabla con segmentos de líneas que representaban inclinaciones de rectas tangentes, donde se les solicitó que encerraran en un círculo la recta tangente antes del volumen máximo, en el volumen máximo y después del volumen máximo (ver figura 2) para que concluyeran cuál es el volumen máximo y en qué se fundamentaron.

Pendiente de la recta tangente			
Antes del volumen máximo			
En el volumen máximo			
Después del volumen máximo			

Figura 2. Imagen de la tabla para seleccionar inclinación de la recta tangente

En seguida se dio la instrucción de abrir el archivo de GeoGebra e iniciaron trabajando con tablas de radio contra volumen dando incrementos de radio de 0.25 cm, 0.1 cm y 0.01 cm, observaron a su vez los valores de la pendiente e identificaron los valores de radio entre los que se encuentra el volumen máximo para cada acercamiento. Después se solicitó activar la casilla de verificación *cilindro* para que trabajaran con el manipulable virtual y visualizaran el cambio de volumen y de las dimensiones de radio y de altura al mover un deslizador. En la siguientes preguntas se dio la indicación de activar casillas de verificación que mostraron la gráfica de radio contra volumen y la recta tangente sobre la gráfica en un punto R, el cual movió el estudiante a través del deslizador, observando simultáneamente las coordenadas y la pendiente de la recta tangente (ver figura 3).

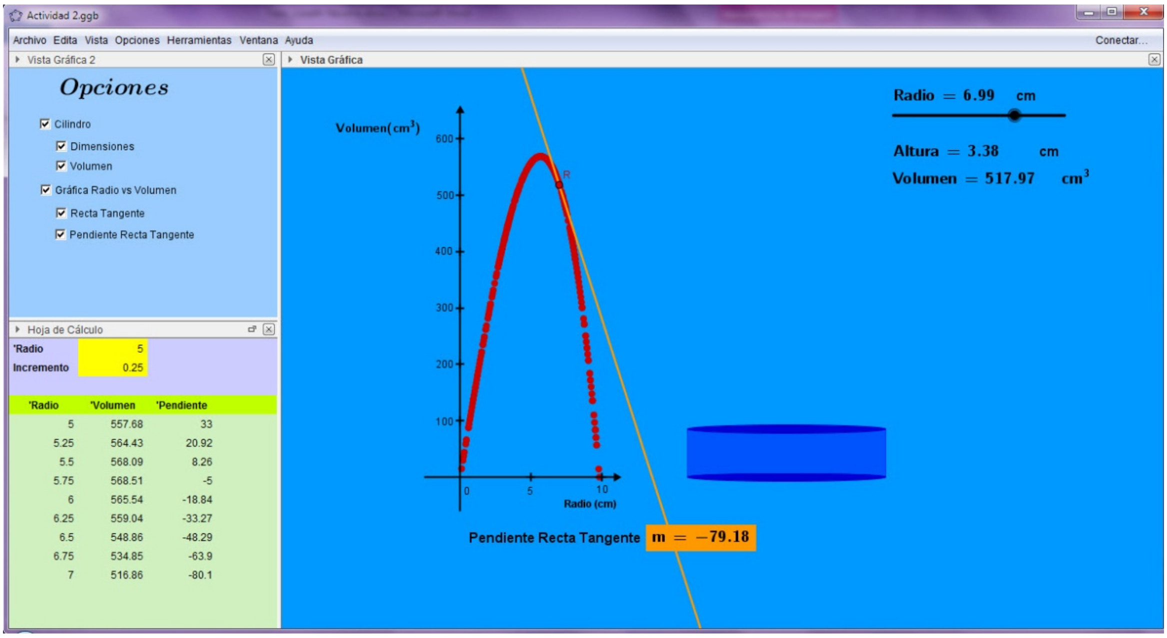


Figura 3. Gráfica de radio contra volumen y recta tangente

El cilindro virtual permaneció visible mientras se deslizó el punto R, por lo que se pudo observar el cambio de dimensiones que se presentaron en él. De igual forma, la pendiente de la recta tangente cambió según el desplazamiento del punto R dentro de la función, observando gráficamente la posición, así como el valor exacto de la pendiente registrada en esa localización. Concluyendo el estudiante al finalizar la actividad que el máximo se encuentra en la parte más alta de la gráfica y donde la recta tangente es horizontal.

3.4 Procedimiento

El proceso metodológico comprendió cuatro fases de acuerdo al alcance de este trabajo que se describen a continuación:

- *Diseño de la actividad didáctica.* La actividad didáctica se integró con una hoja de trabajo, un archivo de GeoGebra y material para la elaboración del manipulable físico.
- *Pilotaje de prueba*. La actividad se aplicó a cinco estudiantes de un grupo de Cálculo I para identificar limitaciones o errores en el diseño de la actividad. Posteriormente se realizaron cambios para mejorar la redacción de instrucciones y de algunas preguntas de las hojas de trabajo, así como también en los colores utilizados en el archivo de GeoGebra para una adecuada visualización.
- *Implementación de la actividad*. La puesta en práctica de la actividad se hizo con un grupo intacto de 20 estudiantes inscritos en la asignatura Cálculo I. Se llevó a cabo en un aula de cómputo de la universidad que proporcionó computadoras de escritorio para cada participante, así como espacio para construir el manipulable físico y contestar la hoja de trabajo. La duración de la actividad fue de 90 minutos en una sola sesión.
- *Organización de la información*. Con base a las evidencias recolectadas a través de la hoja de trabajo se elaboró una base de datos con las respuestas

aportadas para cada pregunta por los estudiantes y con ello identificar a los que integrarían el estudio de casos.

4. Análisis y resultados

El análisis didáctico de la actividad se realizó de acuerdo a las cinco fases que especifica el EOS, las cuales son: Análisis de las prácticas matemáticas, Análisis de objetos y procesos matemáticos, Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos, Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio y Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

4.1 Análisis de las prácticas matemáticas

En este nivel se identifican las prácticas matemáticas que surgen en la actividad didáctica a través de actuaciones, manifestaciones verbales o simbólicas, etc., que se realizan en la resolución de un problema matemático, todo ello para encontrar la solución del problema, comunicar dicha solución, validarla o generalizar los resultados obtenidos. En un análisis *a posteriori* del sistema de prácticas se determinó que las dificultades estuvieron en la construcción de la función y en algunos casos al evaluar la función para completar la tabla de valores que posteriormente se utiliza para graficar de forma manual. Con respecto al resto de las prácticas matemáticas, éstas surgieron como se esperaba.

4.2 Análisis de objetos y proceso matemáticos

En este nivel se examinan los procesos y objetos matemáticos que son activados con las prácticas matemáticas realizadas en la actividad propuesta. En un análisis a posteriori de los objetos y procesos matemáticos se detectó incertidumbre sobre el concepto de la recta tangente, una vez aclaradas las características que definen a la recta tangente, la actividad continuó sin contratiempo. También la construcción del modelo físico causó indecisiones pero se resolvieron al momento de observar cómo estaban elaborándolos otros equipos.

4.3 Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas

En este nivel se registran cuáles y de qué tipo son las configuraciones didácticas en que se divide el proceso de instrucción, así como conocer cómo se articulan entre sí las configuraciones didácticas para formar la trayectoria didáctica. En la realización de un proceso instruccional, es decir, en cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático, se produce una trayectoria muestral del proceso, la cual describe la secuencia particular de funciones o componentes que ha surgido a través del tiempo. Según Godino, Contreras y Font (2006, p. 4) se pueden identificar seis tipos de procesos con sus trayectorias muestrales correspondientes: epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional.

En un análisis *a posteriori* de las trayectorias e interacciones didácticas se observó que surgieron como se planteó en el diseño de la actividad. Los estudiantes trabajaron en equipo al inicio de la actividad y prosiguieron de forma individual como se indicaba, solicitando aclaraciones del docente cuando lo requerían, pero esto sucedió en pocas ocasiones.

4.4 Análisis de normas y metanormas

En este nivel se estudian las normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio, tomando en cuenta los fenómenos de índole social que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Las interacciones entre profesor y estudiantes están regidas por normas no explícitas. Las normas sociales durante el desarrollo de una clase son convenciones que describen cómo comunicarse unos con otros, cómo reaccionar socialmente ante un error o una indicación. Existen aspectos normativos del discurso matemático que son específicos de la actividad matemática escolar y que regulan las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje.

En un análisis *a posteriori* de las normas y metanormas se agregó una norma adicional al profesor y a los estudiantes, ya que se indicó no borrar lo ya escrito en la hoja de trabajo para poder identificar el proceso de razonamiento que llevaron a cabo y los posibles conflictos que surgieron. Para cumplir con esta instrucción se solicitó utilizar únicamente pluma y cruzar con líneas cuando una respuesta ya no fuera válida o decidieran proporcionar un nuevo argumento a lo solicitado.

4.5 Valoración de la idoneidad didáctica

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas de una didáctica descriptiva-explicativa para comprender y responder a la pregunta, ¿qué está ocurriendo aquí y por qué?, sin embargo para mejorar el funcionamiento de los procesos de estudio es necesario recurrir a criterios de idoneidad o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y guiar su mejora según D'Amore, Font y Godino (2007, p. 50). Los criterios de idoneidad para las diferentes facetas implicadas en un proceso de estudio matemático son: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006, pp. 4-5).

4.5.1 Idoneidad epistémica

Esta faceta se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos) con respecto de un significado de referencia. En un análisis *a priori*, en el diseño de la actividad didáctica se propuso contribuir a dar significado al concepto de la derivada a través de un problema de contexto de la vida cotidiana para encontrar un máximo donde la pendiente de la recta tangente igual a cero sea un criterio que confirme que el valor es un máximo. En la actividad se implementó un sistema de prácticas que promueve en los estudiantes la construcción de significado del objeto matemático al enfrentarse a diferentes representaciones y de esta forma lograr una mejor aproximación al significado institucional de referencia, por ello se considera que la idoneidad epistémica es *alta*.

A posteriori: De acuerdo a las respuestas aportadas por los estudiantes en la hoja de trabajo, se determinó cómo se fueron incorporando los elementos pretendidos a través del desarrollo de la actividad (ver figura 4).

26.- Activa la casilla "Gráfica Radio vs Volumen". Se muestra en la pantalla un punto R ubicado en el valor de Radio y de Volumen que tiene actualmente el cilindro. Mueve el punto negro para cambiar el tamaño del radio y observa la trayectoria del punto R en la gráfica. Describe la forma de la gráfica dónde se encuentra el volumen más grande La grafica tiene forma De Parabola concaba hacia abajo

27.- Activa la casilla "Recta Tangente" y mueve el punto negro del tamaño del radio con el ratón, observa lo que sucede con la recta tangente, ¿cómo es la recta tangente en el punto de volumen más grande? esta un poco inclinada

Antes del volumen más grande la recta tangente tiene pendiente positiva

Después del volumen más grande la recta tangente tiene pendiente Negativa

29.- Mueve el punto negro y observa la gráfica, ¿dónde la recta tangente es horizontal?
En la parte arriba del punto maximo del volumen

30.- ¿Existe otra parte de la gráfica dónde la recta tangente es horizontal? No

¿Por qué? es una parabola y solo en un lugar es horizontal

Figura 4. Estudiante #1, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"

En los reactivos del 26 al 30 otro estudiante llegó a conclusiones similares a las mostradas en la figura 4, utilizando argumentos diferentes para fundamentar que ha encontrado un máximo, como se observa en la figura 5. Como se manifestó en las respuestas de los estudiantes, se ha contribuido a la formación de significado de la pendiente de la recta tangente horizontal en el valor máximo de una función, así como el cambio de pendiente antes del valor óptimo y después del valor óptimo, por lo cual se determinó una idoneidad epistémica a posteriori *alta*.

26.- Activa la casilla "Gráfica Radio vs Volumen". Se muestra en la pantalla un punto R ubicado en el valor de Radio y de Volumen que tiene actualmente el cilindro. Mueve el punto negro para cambiar el tamaño del radio y observa la trayectoria del punto R en la gráfica. Describe la forma de la gráfica dónde se encuentra el volumen más grande el punto maximo, se marca muy bien ∩

27.- Activa la casilla "Recta Tangente" y mueve el punto negro del tamaño del radio con el ratón, observa lo que sucede con la recta tangente, ¿cómo es la recta tangente en el punto de volumen más grande? se pone horizontalmente la tangente al llegar al punto maximo

Antes del volumen más grande ¿qué signo tiene la recta tangente? /

Después del volumen más grande ¿qué signo tiene la recta tangente? \

29.- Mueve el punto negro y observa la gráfica, ¿en qué parte de la gráfica la recta tangente es horizontal? cuando llega al maximo punto

30.- ¿Existe otra parte de la gráfica dónde la recta tangente es horizontal? no

¿Por qué? solo cuando llega al punto maximo es horizontal, porque de otra forma estaria / y asi \ la tangente

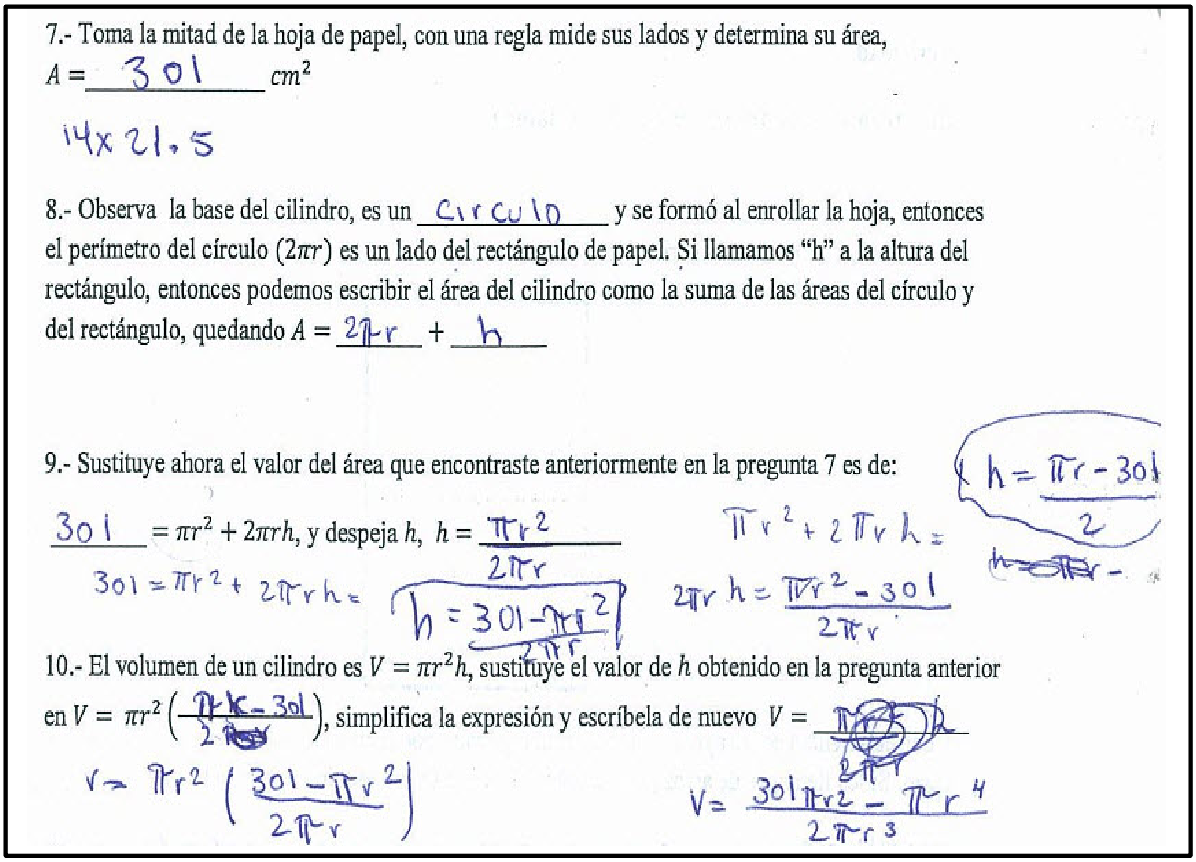
Figura 5. Estudiante #2, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"

4.5.2 Idoneidad cognitiva

Permite valorar a priori si lo que se pretende enseñar se puede considerar en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, y a posteriori, si el aprendizaje efectivamente logrado es consistente con el pretendido. En un análisis *a priori*, el sistema de prácticas estuvo dirigido al establecimiento de funciones semióticas en los estudiantes que promovieran la matematización de una situación problema que requirió determinar un valor máximo con una restricción, identificando la recta tangente horizontal en ese valor, considerando una idoneidad cognitiva *alta*.

A posteriori: Como resultado de la puesta en escena de la actividad didáctica, se pudo detectar que los conocimientos previos así como los sistemas de prácticas necesarios para resolver las actividades variaban en los estudiantes dependiendo si habían cursado o no la asignatura extracurricular Fundamentos de Matemáticas. Presentando un mejor desarrollo de la actividad los estudiantes que ya habían cursado dicha asignatura. En la figura 6 se puede observar las dificultades para expresar una función.

Los estudiantes que presentaron dificultad al construir la función, al llenar tablas numéricas, así como graficar manualmente sí lograron avanzar en la actividad al interactuar con el software GeoGebra, donde visualizaron la gráfica y los valores correspondientes a los puntos de interés para la situación problema, por lo antes expuesto se considera una idoneidad cognitiva a posteriori media *alta*.


7.- Toma la mitad de la hoja de papel, con una regla mide sus lados y determina su área,
$A =$ 301 cm^2

14x 21.5

8.- Observa la base del cilindro, es un Circulo y se formó al enrollar la hoja, entonces el perímetro del círculo ($2\pi r$) es un lado del rectángulo de papel. Si llamamos "h" a la altura del rectángulo, entonces podemos escribir el área del cilindro como la suma de las áreas del círculo y del rectángulo, quedando $A =$ $2\pi r$ + h

9.- Sustituye ahora el valor del área que encontraste anteriormente en la pregunta 7 es de:

$301 = \pi r^2 + 2\pi r h$, y despeja h, $h = \frac{\pi r^2}{2\pi r}$

$301 = \pi r^2 + 2\pi r h =$ $\quad \boxed{h = \frac{301-\pi r^2}{2\pi r}}$

$\pi r^2 + 2\pi r h =$ $\quad 2\pi r h = \frac{\pi r^2 - 301}{2\pi r}$

$h = \frac{\pi r - 301}{2}$

10.- El volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, sustituye el valor de h obtenido en la pregunta anterior en $V = \pi r^2 \left(\frac{\pi r - 301}{2\pi r}\right)$, simplifica la expresión y escríbela de nuevo $V =$

$V = \pi r^2 \left(\frac{301 - \pi r^2}{2\pi r}\right)$ $\quad V = \frac{301\pi r^2 - \pi r^4}{2\pi r^3}$

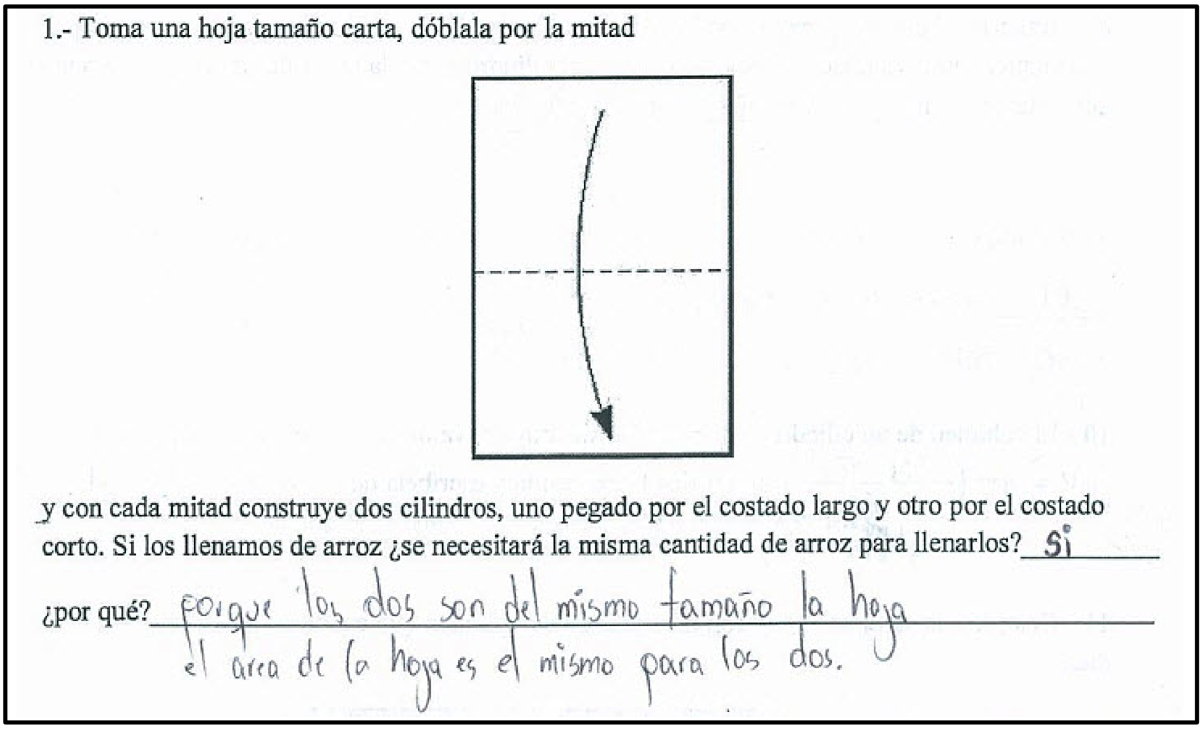
Figura 6. Estudiante #3, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"

4.5.3 Idoneidad interaccional

Es el grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados. En un análisis *a priori*, en el diseño de la actividad didáctica se buscó que tanto el material impreso, la construcción por parte de los estudiantes de los manipulables físicos, así como el archivo de GeoGebra, provocaran la emergencia de los objetos institucionales pretendidos para que los estudiantes se apropiaran de ellos.

La actividad estuvo diseñada para una mínima participación del profesor promoviendo tanto el trabajo individual como el colaborativo. La hoja de trabajo fue mejorada después del pilotaje por observar dificultades en la comprensión de algunas preguntas, además de agregar algunos esquemas que apoyaron las instrucciones dadas para una mejor comprensión. Tomando en cuenta lo anterior se consideró la idoneidad interaccional a priori como *alta*.

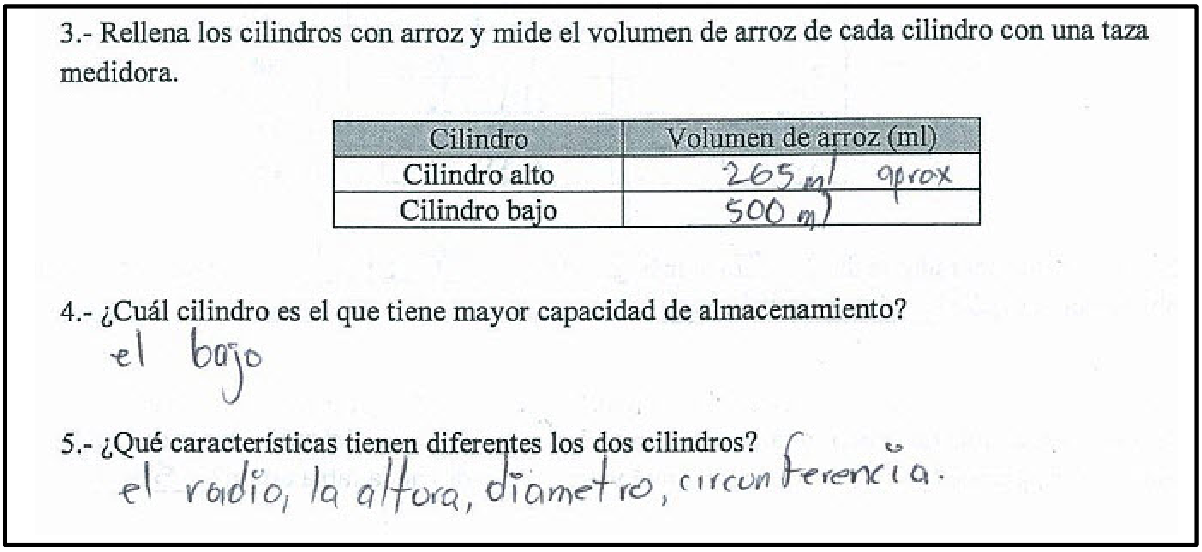
A posteriori: Se observó que la interacción con el software GeoGebra permitió superar las dificultades de algunos estudiantes en la construcción de una función al ir completando tablas y graficando los valores, logrando que se enfocasen en visualizar a la recta tangente y sus pendientes a través de la gráfica, así como el significado de la pendiente horizontal de la recta tangente en el máximo de una función (ver figuras 7 y 8), resultando en una idoneidad interaccional a posteriori *alta*.


1.- Toma una hoja tamaño carta, dóblala por la mitad

y con cada mitad construye dos cilindros, uno pegado por el costado largo y otro por el costado corto. Si los llenamos de arroz ¿se necesitará la misma cantidad de arroz para llenarlos? Sí

¿por qué? porque los dos son del mismo tamaño la hoja el area de la hoja es el mismo para los dos.

Figura 7. Ítem #1, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"



3.- Rellena los cilindros con arroz y mide el volumen de arroz de cada cilindro con una taza medidora.

Cilindro	Volumen de arroz (ml)
Cilindro alto	265 ml aprox
Cilindro bajo	500 ml

4.- ¿Cuál cilindro es el que tiene mayor capacidad de almacenamiento?
el bajo

5.- ¿Qué características tienen diferentes los dos cilindros?
el radio, la altura, diametro, circunferencia.

Figura 8. Ítems #3 al #5, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"

4.5.4 Idoneidad mediacional

Es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. En un análisis *a priori*, en la actividad se requiere utilizar el software GeoGebra por lo cual es necesaria un aula con equipo de cómputo, situación que origina que se deba prever con tiempo el apartado de un espacio para esos fines.

El Instituto Tecnológico de Sonora sí tuvo disponibilidad de aula de cómputo donde cada estudiante pudo interactuar de forma individual con el software GeoGebra. Por lo que considerando el material impreso en la hoja de trabajo, el material básico para construir los manipulables físicos y el equipo de cómputo con el software GeoGebra con el que se trabajó, nos lleva a una idoneidad mediacional a priori *alta*.

A posteriori: Una vez finalizada la implementación de la actividad se confirmó que se pudo lograr tener un equipo de cómputo para cada estudiante, así como la hoja de trabajo y elementos físicos necesarios para la elaboración de los manipulables. De la misma forma el software GeoGebra estuvo instalado en cada equipo de cómputo, evitándose retrasos en el avance de la actividad y por ello se consideró una idoneidad mediacional a posteriori *alta*.

4.5.5 Idoneidad emocional

Es el grado de implicación, interés o motivación del alumnado en el proceso de estudio. En un análisis *a priori*, el tipo de situación problema planteado, así como iniciar con la construcción de un manipulable físico por parte de los estudiantes, además del manipulable virtual en el software GeoGebra favorece la participación dinámica de los estudiantes durante la actividad didáctica, por lo que se considera una idoneidad emocional a priori *alta*.

A posteriori: Una vez concluida la actividad didáctica se confirma que la situación problema seleccionada sí fue de interés para los estudiantes, así como el incluir la construcción de un manipulable físico y observar el comportamiento del manipulable virtual en el software GeoGebra. En la actividad uno de los estudiantes expresó que el volumen de dos cilindros construidos con la mitad de una hoja tamaño carta (en forma longitudinal y transversal) es el mismo, y después al comprobar la capacidad de cada cilindro determinando el contenido de arroz con una taza medidora, descubrió que tienen volúmenes diferentes, situación que le planteó una interrogante y una motivación para continuar con la actividad (ver figuras 7 y 8).

Al interactuar con el software y el manipulable virtual los estudiantes observaron las variaciones en las dimensiones y la gráfica de la función de forma instantánea, sin tener que construir otro manipulable físico, ni elaborar más tablas de aproximaciones que requieren el uso de calculadora, facilitando con ello identificar la solución en un menor tiempo, por lo cual se tiene una idoneidad emocional a posteriori *alta*.

4.5.6 Idoneidad ecológica

Es el grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, entre otros. En un análisis *a priori*, la actividad didáctica permitió contribuir con el significado del concepto de derivada a través de la resolución de un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana por medio de la pendiente de la recta tangente en el valor crítico, permitiendo la emergencia de otros objetos matemáticos. Es por ello que se consideró la idoneidad ecológica a priori como *alta*.

A posteriori: La implementación de la actividad didáctica permitió que los estudiantes resolvieran el problema de optimización a través de aproximaciones en tablas, de forma gráfica y validando el resultado óptimo por medio de la recta tangente horizontal en el valor máximo, contribuyendo de esta forma a la construcción del concepto derivada. El tiempo para realizar la actividad fue superior al contemplado durante la planeación, llevando a algunos estudiantes hasta 30 minutos adicionales para completarla. Por lo anterior mencionado se considera una idoneidad ecológica a posteriori *media alta*.

5. Conclusiones

El análisis de resultados a través de las prácticas matemáticas, los objetos y procesos matemáticos, las trayectorias e interacciones didácticas, las normas y metanormas así como la valoración de la idoneidad didáctica permiten expresar las conclusiones que se exponen a continuación.

La actividad didáctica generó las condiciones para que los estudiantes se involucraran en el problema a resolver. La selección de una situación problema de un aspecto de la vida diaria contribuyó positivamente en el interés de los participantes al tener dominio de los términos y características que describen el elemento a optimizar.

El iniciar la actividad con la construcción de un manipulable físico enfrentó a los estudiantes con el hecho de que una misma área de material no genera el mismo volumen cuando se fabrica un recipiente, sino que depende de las dimensiones con las que se decida usar el recurso disponible.

El software GeoGebra que se utilizó como apoyo facilitó la visualización de la gráfica de la función y la tabulación de los valores de la misma. A su vez el estudiante pudo interactuar con el software al desplazarse a través de la función al mismo tiempo que observó una representación gráfica del aspecto del cilindro que se construiría, así como sus dimensiones y capacidad.

El empleo de la recta tangente a la función antes del punto máximo, en el punto máximo y después del mismo permitió que el estudiante se concientizara del cambio de signo de la pendiente. El uso del software dinámico dio la posibilidad de que el estudiante observará los valores que tomaba la pendiente conforme movía el punto de tangencia, facilitando además que identificaran la pendiente igual a cero en el punto crítico.

Por lo anterior se puede afirmar que la actividad didáctica contribuyó a que el estudiante relacionara la pendiente de la recta tangente igual a cero en el punto crítico como un elemento que asegura que se ha encontrado el valor óptimo buscado. Es por ello que el objetivo de este trabajo se alcanzó al establecer las bases para la construcción del concepto de derivada por medio de la pendiente de la recta tangente con el apoyo de la tecnología.

Bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, 97-140. México: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea], 1(1), 40-55. Recuperado el 6 de febrero de 2013, de http://www.clame.org.mx/acta.htm

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa* [en línea], 9(46), 15-25. Recuperado el 8 de febrero de 2013, de http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la Matemática en la educación superior. *Revista Electrónica de Educación Sinéctica* [en línea], 19, 3-27. Recuperado el 6 de febrero de 2013, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=99817935002

Dávila, M. T., Grijalva, A. y Bravo, J. M. (2012). La Derivada a partir de la Resolución de Problemas de Optimización con Apoyo de Geogebra. En Cortés, J. C., Ulloa, R. (Eds.), *Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012. Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática,* 212-222. Guadalajara, México: AMIUTEM, A. C.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. *Paradigma* [en línea], 28(2), 49-77. Recuperado el 21 de abril de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/dimension_metadidactica_11nov07.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Recuperado el 24 de abril de 2014, de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las Matemáticas. *Paradigma* [en línea], 27(2), 221-252. Recuperado el 22 de abril de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición Matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* [en línea], 26(1), 39-88. Recuperado el 22 de abril de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/madrid_2004/godino_contreras_font.pdf

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education* [en línea], 19(1), 3-25. Recuperado el 8 de febrero de 2013, de http://www.jstor.org/discover/10.2307/749108?sid=21105710277671&uid=2129&uid=70&uid=2&uid=4

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las Matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las Matemáticas. *Revista de Educación* [en línea], (334)*,* 75-95. Recuperado el 7 de febrero de 2013, de http://www.revistaeducacion.educacion.es/re334/re334_06.pdf

Instituto Tecnológico de Sonora. (s.f.). *Programa Analítico Cálculo I Plan 2009.* Recuperado el 7 de febrero de 2013, de http://saeti.itson.mx/

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea], 10(3), 365-400. Recuperado el 3 de marzo de 2013, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000300004&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Rodríguez, R. y Zuazua, E. (2002). Enseñar y aprender Matemáticas: del Instituto a la Universidad. *Revista de Educación* [en línea]*,* (329), 239-256. Recuperado el 6 de febrero de 2013, de http://eprints.ucm.es/9538/

Ruíz, J. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* [en línea], 3(47), 1-8. Recuperado el 8 de febrero de 2013, de http://www.rieoei.org/deloslectores/2359Socarras-Maq.pdf

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea], 12(3), 355-382. Recuperado el 21 de abril de 2014, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33511859004

Turégano, P. (1995). El currículum y las dificultades de aprendizaje del Cálculo Infinitesimal. Recuperado el 6 de febrero de 2013, de http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/pdf/revista10/10_19.pdf

Zúñiga, L. (2007). El Cálculo en carreras de Ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea], 10(1), 145-175. Recuperado el 8 de febrero de 2013, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500107

Autores:

Navarro Ibarra Lizzeth Aurora (Lizzeth.Navarro@gmail.com)
Vercelli 3236, Col. Montecarlo
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 9978639

Ingeniera Civil, Maestra en Ingeniería Administración de Recursos Hidráulicos, Maestra en Valuación Inmobiliaria y Maestra en Matemática Educativa. Actualmente cursando el Doctorado en Sistemas y Ambientes Educativos en el Instituto Tecnológico de Sonora.

Robles Aguilar Alan Daniel (alan.robles@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1707

Actuario-Matemático, Maestro en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Actualmente profesor investigador en el Instituto Tecnológico de Sonora, coordinador de las academias de Estadística para las Ciencias Económico-Administrativas.

Ansaldo Leyva Julio César (julio.ansaldo@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1721

Líder del cuerpo académico de Ciencias Básicas en Ingeniería, Maestro en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias (Matemáticas). Profesor investigador en el Instituto Tecnológico de Sonora, coordinador de las academias de matemáticas Económico-Administrativas e Ingeniería en Software.

Castro Lugo Felipe de Jesús (felipe.castro@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1853

Maestro Interino del Departamento de Matemáticas, Maestro en Ciencias con especialidad en Matemáticas Educativas. Profesor investigador en el Instituto Tecnológico de Sonora, Apoyo las academias de Probabilidad y Estadística y Fundamentos de Matemáticas, para las carreras de Ingeniería.