

## Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje

Yaneth Milena Agudelo Marin, Ligia Inés García Castro

Fecha de recepción: 04/03/2015

Fecha de aceptación: 18/04/2016

<b>Resumen</b>	<p>Este estudio se centra en el análisis del desarrollo de la capacidad estimativa en la magnitud volumen en estudiantes de grado 9° de Educación Básica Secundaria del sistema educativo colombiano. En este trabajo se implementó la modelación como estrategia de Enseñanza desde los trabajos de Biembengut y Hein (2004) a partir de una secuencia didáctica que pretendió desarrollar la habilidad de estimar volúmenes ocupados. Los resultados muestran cómo las estudiantes evaluadas mejoraron ostensiblemente la habilidad de estimar magnitudes continuas en volumen ocupado, concretamente usando la estrategia de iteración y la de comparar un referente presente usando técnicas indirectas, estableciendo relaciones métricas más elaboradas.</p> <p><b>Palabras clave:</b> Modelación, Estimación, Volumen, Medida.</p>
<b>Abstract</b>	<p>This study is focused on the analysis of the development of the capacity of estimation as it relates to volume with 9th grade students in a Columbian general education class. In this study the strategy of modeling to teach and learn was used in the context of a didactic sequence to facilitate a reflection on the impact on students' ability to estimate various volumes. The results show that the students evaluated apparently improved in their ability to continually estimate the magnitude of different concrete volumes using the strategy of process and/or comparing using a given reference (using an indirect technique) that establishes a metric relationship that is progressively more elaborate.</p> <p><b>Keywords:</b> Modeling, Estimating, Volume, Measurement</p>
<b>Resumo</b>	<p>Este estudo centra-se na análise do desenvolvimento da capacidade e estimativa da magnitude de volume de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental Secundário do sistema educacional Colombiano. Neste trabalho de pesquisa foi implementado a modelagem como estratégia de Ensino com base nos trabalhos de Biembengut y Hein (2004) a partir de uma sequência didática que visou desenvolver a capacidade de estimar volumes ocupados. Os resultados mostram como os alunos avaliados melhoraram significativamente a capacidade de estimar grandezas contínuas em volume ocupado, especificamente usando estratégia de interação e de comparar um ponto de referência usando técnicas indiretas, estabelecendo assim relações métricas mais elaboradas.</p> <p><b>Palavras-chave:</b> Modelagem, Estimativa, Volume, Medida.</p>

## 1. Introducción

Actualmente para muchos profesores el objetivo de las prácticas usuales de enseñanza con respecto al dominio de la medida es la memorización de unidades y la conversión dentro un sistema de medidas, la aplicación de fórmulas y la realización de cálculos numéricos para entrenar a los estudiantes en la resolución de ejercicios, enseñándoles lo que se puede llamar procedimientos de algoritmización a realizar mecánicamente (Chamorro, 1995, pp. 33). Así pues, en la práctica educativa se da escasa consideración a los aspectos cualitativos requeridos para la construcción de diferentes magnitudes: Identificación de atributos medibles, comparación de objetos atendiendo a una cierta magnitud, construcción del concepto de unidad de medida o manejo del error en las mediciones; además, desde lo cuantitativo, no se adjudica la suficiente importancia a actividades de medición directa y al uso de estimaciones, tal como lo sustenta ASOCOLME<sup>1</sup> (ASOCOLME, 2002, pp.31) al analizar la vinculación que puede tener este tratamiento didáctico con el desempeño de los estudiantes en los procesos de medición.

En consecuencia, corresponde a los profesores organizar y planificar actividades que potencien el desarrollo geométrico-métrico de los estudiantes, enmarcando estas nociones dentro de un contexto específico que les permita resolver situaciones cotidianas. De ahí la necesidad de permitir que los estudiantes realicen experiencias sensoriales (ver, tocar, oír, etc.), para pasar del espacio vivenciado (en su casa, en el patio, en el parque, etc.) a un espacio representado.

Teniendo en cuenta las reflexiones anteriores, en esta investigación se consideró que la implementación de la modelación como metodología de enseñanza sirve como herramienta didáctica que posibilita la visualización por parte del estudiante de la estrecha relación que hay entre el mundo real y la medición, debido a que como afirma Blomhøj (2004, pp. 45) las actividades de modelación pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar a establecer raíces cognitivas sobre las cuales se pueden construir conceptos matemáticos en los que se incluye el uso consciente y autónomo de dichas herramientas.

De acuerdo con la situación expuesta, la pertinencia de esta investigación se manifestó en el tratamiento didáctico que se dio al proceso de modelación, al implementarlo como una metodología de enseñanza dirigida a potenciar la estimación en el ámbito del dominio de la medición de cantidades continuas. Siguiendo a Chamorro citada por Cañón (2009, pp. 1), el reto didáctico consistía en encontrar situaciones didácticas que permitieran la construcción de los conceptos esenciales de medida.

En este sentido, este trabajo amplió los espacios de reflexión sobre el desarrollo de la estimación de cantidades continuas en volumen, al buscar una ruta coherente y precisa con la implementación de la modelación como método de enseñanza en el aula, esperando que:

“Cuando los alumnos enfrenten situaciones problemáticas de interés sean capaces de explorar formas de representarlas en términos matemáticos, de explorar las relaciones que aparecen en

<sup>1</sup> Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

esas representaciones, manipularlas y desarrollar ideas poderosas que se puedan canalizar hacia las matemáticas (medición) que se quiere enseñar” (Lehrer y Schauble y Lesh y English citados por Trigueros, 2009, p. 76)

## 2. Objetivos:

Reconocer la incidencia de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje sobre el desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen ocupado en estudiantes de grado 9°.

Caracterizar cambios en la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen ocupado en estudiantes de grado 9°, a partir de la implementación de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje.

## 3. Marco conceptual

Según Villa – Ochoa (2010), se pueden reconocer diversas maneras de implementar la modelación matemática en el aula, ellas son:

- El profesor como centro en el diseño de situaciones: Biembengut y Hein (2004); Basanezi(2002) y Villa – Ochoa (2007)
- El estudiante que elige el problema o fenómeno con ayuda del profesor: Borba, Meneghetti, y Hermini (1997); Borba y Villarreal (2005).

Para la presente investigación cuyo propósito era reconocer la modelación como metodología de enseñanza, se asume la perspectiva de Biembengut y Hein, entre otras cosas por la posibilidad de desarrollar los contenidos programáticos del área, a partir de modelos matemáticos que transversalicen otras áreas del conocimiento y proporciona pautas a los estudiantes para realizar un trabajo de modelaje. Además por la posibilidad de trabajarse en los diferentes niveles de escolaridad.

### 3.1. Modelación: La perspectiva de María Biembengut y Nelson Hein

La modelación es vista como una práctica de enseñanza que establece relaciones entre el mundo real y la matemática. Según Biembengut & Hein (2004, pp. 108), existen razones para defender el proceso de modelación en Educación Matemática desde la postura que enseña matemáticas usando el método de la modelación dado que con su implementación se busca: Integrar las matemáticas con otras áreas del conocimiento; fomentar el interés frente a su aplicabilidad, aprehensión de conceptos matemáticos; estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas; habilidad en el uso de la tecnología; capacidad para actuar en grupo y para redactar una investigación.

Después de varios años de investigación y atendiendo a variables como el currículo, horario de clases, cantidad de estudiantes por curso, disponibilidad de

tiempo, entre otras, que afectan la enseñanza de las matemáticas, Biembengut y Hein presentaron a la comunidad dos tipos de abordajes que puede seguir el profesor en su implementación:

1. Método de enseñanza: Desarrollo del contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados.
2. Método de investigación: Orientación de los estudiantes para que hagan un trabajo de modelaje.

Su experiencia los llevó a proponer una serie de etapas a desarrollar en las clases de matemáticas para alcanzar cada uno de los abordajes mencionados, haciendo énfasis en que este trabajo puede realizarse paralelo al desarrollo del contenido programático.

### 3.2. La estimación en medida

En el marco de las dificultades que se presentan ante los aprendices para aprehender la medida (si no se permite el uso comparativo de patrones no convencionales, la prevalencia de mediciones solo para magnitudes perceptuales y el uso exclusivo de números naturales como cantidad de magnitud) surge otra discordancia entre la escuela y el mundo real: las estimaciones pocas veces hacen parte del currículo escolar, desaparecen con facilidad de los propósitos del aula y con ellas se aleja la posibilidad de encontrarle aplicación a lo que allí se trabaja sobre medida. Así pues, los aprendizajes formales sobre la medida no capacitan generalmente para la estimación, y al contrario, sí lo hacen los aprendizajes no formales producto de la necesidad (Callís & Fiol (s.f), pp. 163).

La enseñanza intencional de la estimación no es un contenido que se limite única y exclusivamente al campo de la medida, por el contrario, es tan amplia su utilidad, que se extiende al campo de la numeración y las operaciones y de ahí su utilidad y su relación con el cálculo mental. De acuerdo con el Consejo Provincial de Educación, Provincia de Rio Negro (Argentina) encabezado por Bressan & Bogisic (1996, pp. 11) desarrollar la capacidad de estimación en los estudiantes es muy importante porque facilita: Predecir situaciones probables, proponer respuestas aproximadas de manera rápida, desarrollar pensamiento hipotético (conjeturar, resolver, valorar, modificar), utilizar comprensivamente los conceptos relacionados con los números y la medida, tolerar el error encontrándole sentido, reformular problemas en formas más manejables.

Ahora bien, con relación a la magnitud volumen, Kerslake citada en Dickson, Brown & Gibson (1991, pp. 143) sostiene que existe una confusión entre los conceptos de capacidad y de volumen tan arraigado en la población en general, que es necesario hacer claridad en ellos. Según esta autora, la capacidad es la facultad de los envases huecos para alojar algo y su patrón de medida está dado en litros, mientras que el volumen puede usarse en 2 sentidos:

- ✓ Volumen interno: es lo mismo que capacidad, aunque se espera que en este sentido las unidades de medida estén dadas en unidades cúbicas.
- ✓ Volumen externo: cantidad de espacio que un objeto toma para sí, es decir, volumen de espacio que ocupa.

Dickson (Ibíd, pp. 148-157) fue más allá, ampliando el concepto de volumen y diferenciando (con base en las investigaciones que Piaget e Inhelder adelantaron en 1974) cuatro tipos de volumen (volumen interno, volumen externo, volumen líquido y capacidad y volumen desplazado), posteriormente Sáiz (2003, pp. 471), estudió los significados que comúnmente son asociados al vocablo volumen destacando: Volumen interno., volumen ocupado, volumen como magnitud que se puede calcular, volumen encerrado y volumen desplazado.

Ante tanta ambigüedad, Kerslake citada en Dickson et al. (1991, pp. 143) sustenta que es necesario adelantar en el aula estrategias didácticas que conlleven a los estudiantes a superar las dificultades que se presentan con relación a la conservación de volumen y capacidad y que desencadenarían en la apreciación de los estudiantes de la naturaleza imprecisa de las magnitudes. Reconocer esta naturaleza imprecisa es lo que torna a la estimación como un aspecto operable, por cuanto el sujeto podrá reconocer e identificar cantidades cuya medida sea aproximadamente la de las unidades tomadas como referente.

Para los fines de esta investigación la magnitud volumen que se estudió, corresponde al tipo volumen ocupado, es decir, cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno (Sáiz, s.f, pp. 8)

#### **4. Metodología de la investigación**

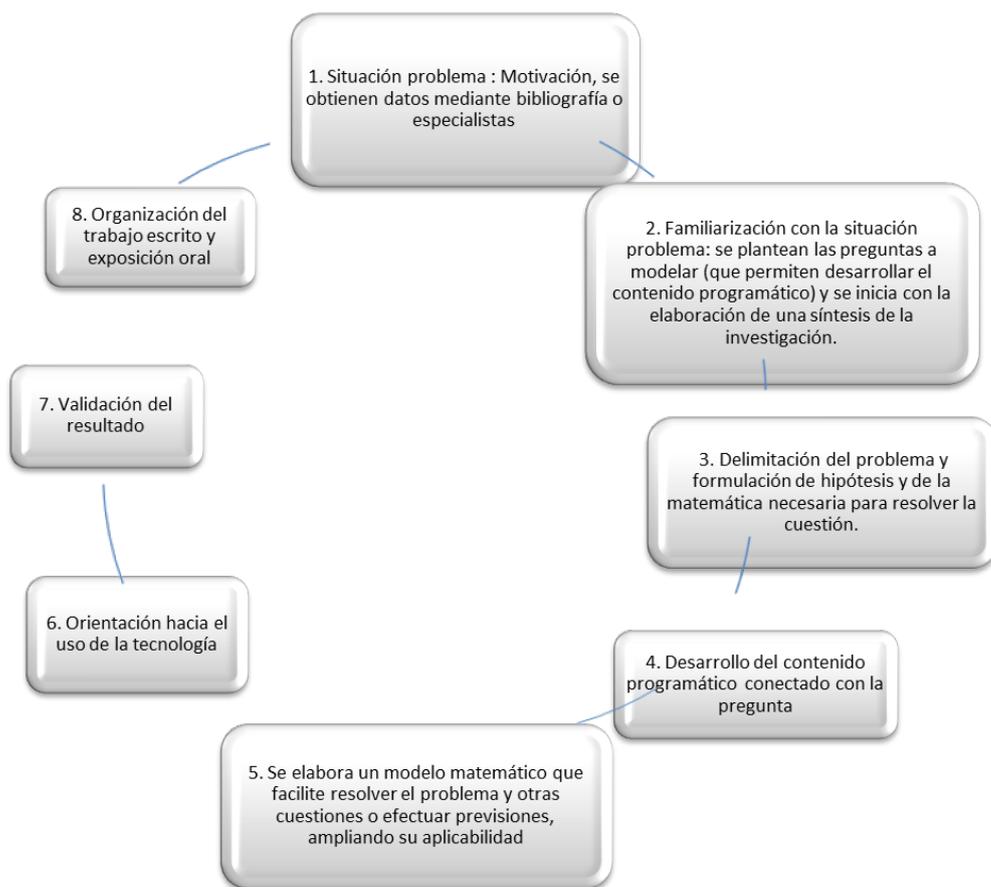
##### **4.1 Tipo de estudio**

El estudio obedece a un diseño cualitativo con alcance interpretativo, toda vez que se pretendía analizar las ideas, mecanismos y procedimientos matemáticos de un grupo de estudiantes confrontadas en situaciones de estimación de volumen ocupado; posteriormente se logró un ejercicio comprensivo al observar y auscultar el modo como interactuaban las estudiantes y la profesora buscando un conocimiento mayor de la realidad educativa que le permitiera transformarla (Axpe, s.f. citando a Bartolomé, pp. 18).

##### **4.1.1 Procedimiento**

El trabajo se implementó en un Colegio del nivel Básico Secundario de carácter privado y femenino; para la realización de la práctica, se determinó que el grado 9° (39 estudiantes con edades que oscilan entre 14 y 16 años) era el que más se ajustaba al objetivo de la investigación, debido a que el contenido programático de la asignatura de Matemáticas en el cuarto periodo académico, sugería el trabajo con volúmenes de cuerpos geométricos.

La preparación del trabajo de campo se inició fusionando las etapas de la modelación como metodología de enseñanza propuestas de Biembengut & Hein proporcionando sentido de funcionalidad en aras de dar coherencia a la propuesta metodológica.



**Fig. 1. Abordaje de la Modelación Matemática como método de enseñanza que fusiona el método de enseñanza y el método de investigación propuestos por Biembengut y Hein.**

**Fuente: Elaboración propia**

Para alcanzar los objetivos investigativos, se planificó una secuencia didáctica a través de cuatro fases que contienen las etapas para implementar la modelación como metodología de enseñanza que involucraron a su vez las técnicas de recolección de datos propias del método de investigación elegido para el estudio, facilitando al mismo tiempo los espacios para evaluar tanto el proceso como el aprendizaje. La figura 2 facilita la observación de la secuencia de actividades en la organización metodológica

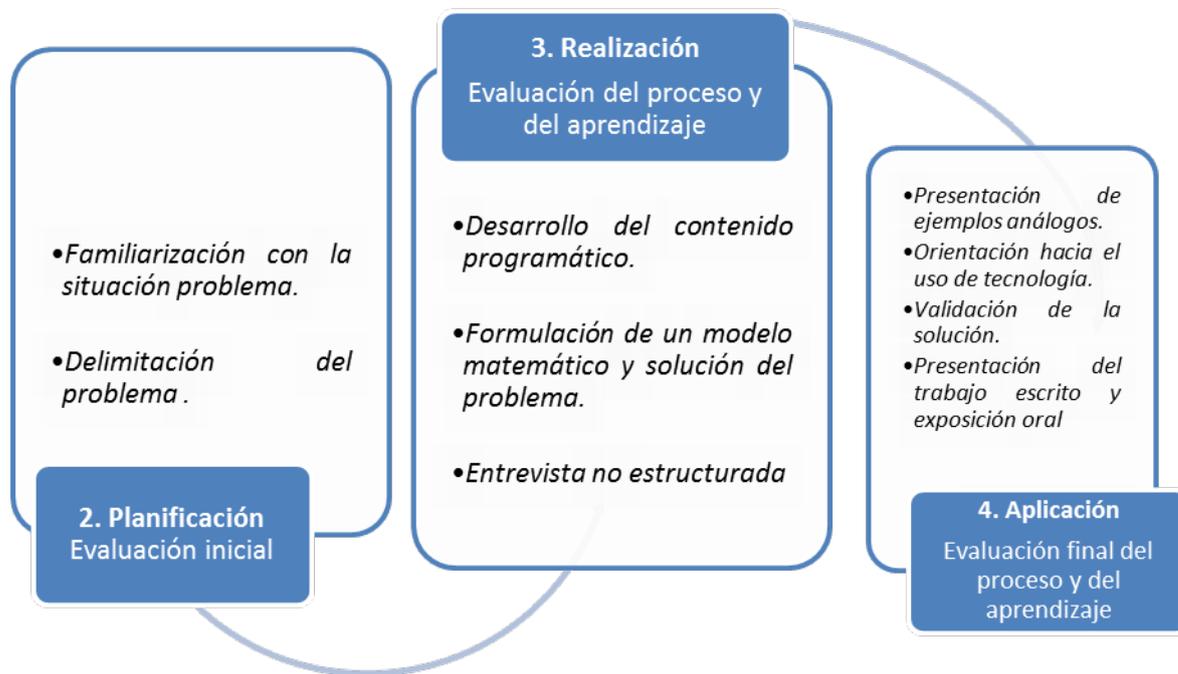


Fig. 2. Secuencia didáctica. Fuente: Elaboración propia.

**Trabajo previo:** Durante esta sesión de trabajo (tres sesiones, 135 minutos en total), las estudiantes se subdividieron en 8 equipos de trabajo y respondieron un cuestionario diagnóstico, el cual supuso por parte de las estudiantes la puesta en común de sus ideas previas, sometiendo sus conocimientos a cuestionamientos y revisiones que condujeron a que se interesaran verdaderamente por profundizar en la nueva temática que se les presentaba; y por parte de la investigadora abordar la comprensión que las estudiantes tenían sobre la estimación en la magnitud volumen ocupado y sobre cómo la aplicaban en su cotidianidad.

**Planificación:** El objetivo de esta segunda fase fue familiarizar a las estudiantes con la situación problema que para este caso correspondió a la construcción de empaques con un fin particular; durante esta fase se delimitó el problema al trabajo sólo con prismas. La fase de planificación requirió el uso de un diario de campo, el cual se siguió alimentando durante el transcurso de las diferentes fases de la secuencia didáctica.

**Realización:** En esta fase se desarrolló el contenido programático para la asignatura de Matemáticas en el grado 9° (área de superficies, cuerpos geométricos, magnitudes extensivas, unidades de medida para volumen, volumen de cuerpos geométricos, estimación indirecta de medidas), así como también se procedió a matematizar los resultados obtenidos hasta ese momento en las diferentes prácticas

que buscaban la solución al problema planteado en la fase 2 con el fin de construir el modelo.

La posición de Biembengut & Hein ((s.f), pp. 1-9), frente a lo que es un modelo matemático, permeó la secuencia didáctica para darle coherencia y sustento: “sea cual sea el caso, la solución de un problema requiere de una formulación matemática detallada. Al conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno o un problema realista, lo denominamos modelo matemático”.

Así pues, se acompañó a las estudiantes en la búsqueda de estrategias para llegar a estimar el volumen ocupado de los distintos modelos de empaques que ellas mismas habían propuesto para solucionar la situación problema a través de sus modelos, coincidiendo con la postura de Córdoba (2011, pp. 96) quien sustenta que en el proceso de modelación en el aula, lo importante no es que el modelo encaje perfectamente en los datos, sino que las interacciones que surjan en la dinámica misma del proceso, favorezcan la emergencia de elementos que re-signifiquen el conocimiento matemático escolar.

Durante este acompañamiento tuvieron lugar algunas entrevistas no estructuradas (cuyas preguntas se adaptaron a las situaciones particulares de cada equipo de trabajo durante el desarrollo de la fase) dada la flexibilidad que brindaba esta técnica de recolección de datos.

**Aplicación:** En el marco de esta última fase, las estudiantes diligenciaron un nuevo cuestionario, en el que pusieron a prueba su habilidad para llegar a consensos y poner al servicio de las situaciones planteadas los modelos matemáticos formulados en situaciones anteriores con el fin de validarlos; se propusieron situaciones en las que fue necesario estimar volúmenes ocupados ya fuera en sus empaques o a través de modelos de prismas construidos con Cabri 3D.

Al concluir la secuencia, las estudiantes elaboraron un informe escrito en el que se resaltaron no solo los procedimientos matemáticos utilizados, sino también los avances, dificultades y fortalezas que caracterizaron el desempeño de cada equipo, evaluando así el proceso del cual habían sido protagonistas.

#### 4.1.2 Análisis de datos

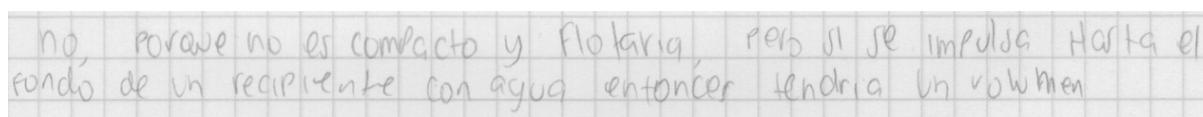
El análisis de las categorías y subcategorías que finalmente se destacaron en este estudio comprendió la revisión de los cuestionarios, registros de las estudiantes y notas del diario de campo implementado por la investigadora de modo que emergieran aspectos fundamentales que facilitarían el proceso de estudio; dicho análisis se llevó a cabo en su mayoría con apoyo en el software Atlas.ti

##### 4.1.2.1 Exploración de ideas previas

Analizando la información recogida en el cuestionario diagnóstico se identificaron y analizaron cuatro categorías: Concepto de volumen, estimación en la magnitud volumen, uso y conversión entre unidades de medida y relación entre volumen y otras magnitudes y ocho subcategorías: el volumen como la medida del espacio que ocupa un cuerpo, sumergir para hallar volumen, relación volumen-tridimensionalidad, asociación volumen-capacidad, volumen-densidad, volumen-

peso, volumen-superficie y los cuerpos sólidos son los únicos que tienen volumen (identificadas por su recurrencia) relacionadas con el concepto de volumen que de una u otra forma obstaculizaban la tarea de estimar en las estudiantes.

El análisis evidenció una contradicción entre lo que las estudiantes definían como volumen y lo que realmente comprendían cuando se les pedía que hallaran volúmenes o que interpreten una expresión que denota unidades de volumen. Por ejemplo, en respuesta a la pregunta ¿considera usted que el gorro para fiestas infantiles que está sobre la mesa tiene volumen? Las respuestas dejaron entrever en la mayoría de los casos que, para algunas estudiantes, sólo los cuerpos sólidos tienen volumen y por tanto objetos diseñados con materiales maleables o los líquidos y los gases no ocupan un lugar en el espacio.



no, porque no es compacto y flotaría, pero si se impulsa hasta el fondo de un recipiente con agua entonces tendría un volumen

Al respecto, Sáiz (2003, pp. 469) considera que “la ausencia de una fórmula específica para hacer un cálculo, o bien la falta de imaginación para descomponer un objeto en partes o poca experiencia en transformaciones de romper y rehacer o para medir con instrumentos de precisión” son aspectos que pueden contribuir a formar la creencia de que no todos los objetos tienen volumen y que por tanto no son volumen-medibles.

Sanmiguel & Salinas (2011, pp. 543) destacan cómo la comprensión del concepto volumen y su conexión con la realidad da herramientas a los estudiantes para que entiendan su entorno; sin embargo, también destacan que las dificultades que presentan los estudiantes derivan en gran medida de las dificultades metodológicas que presentan los profesores al enseñar el concepto.

Una concepción que prevaleció fue considerar al principio de Arquímedes como “el método para hallar volumen”. Esta idea persistía en casi todas las respuestas de las estudiantes ante situaciones en las que para determinar el volumen se pudieron usar estrategias diferentes a la inmersión; se pone por caso la pregunta: ¿cuánta cantidad de pegante cree que cabe en el tubo de pegante cilíndrico que hay sobre la mesa? A pesar de que pudieron hacer uso de la fórmula del volumen para los cilindros que ya era conocida por ellas, todas, sin excepción, implementaron la misma estrategia: inmersión del pegante en un recipiente graduado con agua, además, se evidenció confusión en la expresión de las cantidades de magnitud y sus unidades de medida. Con respecto a la estimación, el modelo de las estudiantes se sustenta en lo perceptual y dentro de esta lógica, la estimación no tiene mucha importancia porque para ellas siempre que un cuerpo se sumerja en un vaso graduado con agua, se obtendrán datos exactos. Dicho de otro modo, para ellas, estimar se reducía a realizar una operación matemática o a reemplazar en una fórmula los valores conocidos.

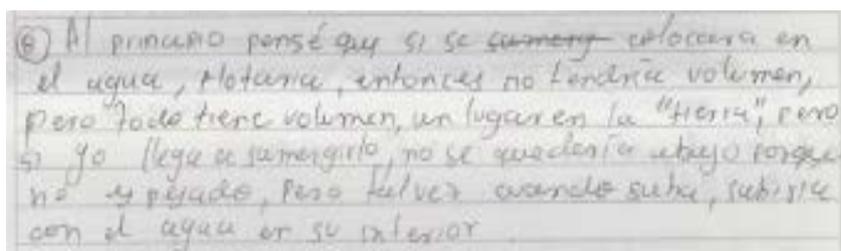
El uso del conjunto de los números naturales, se explica desde la falta de comprensión de los números racionales. Un buen número de investigaciones coinciden en que dentro de los contenidos matemáticos que se enseñan, las fracciones son un contenido que presenta dificultad tanto en el proceso de enseñanza como en el aprendizaje (Freudenthal, 1983, 2001; Kieren, 1985, 1998; Salazar, Martinic & Maz, 2011). En el marco de la habilidad de estimar el significado de número

racional viene acompañado del constructo “medida”, sin embargo, lo cierto es que, en el tratamiento de las fracciones en la escuela, se privilegia de forma casi exclusiva la relación parte-todo impidiendo que los estudiantes construyan el concepto de fracción como un número racional; mientras tanto, los docentes piensan que el estudiante ya construyó el concepto y que hace relaciones y operaciones. Según los hallazgos de este estudio, las estudiantes no pudieron trasladar dicha comprensión al contexto de la medición de la magnitud volumen al utilizar la técnica de inmersión, a pesar de que ellas saben representar fracciones de forma numérica y con diagramas y resuelven operaciones entre fracciones en contextos numéricos.

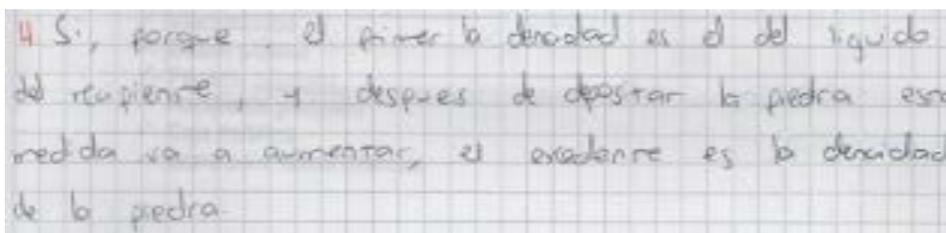
Otro aspecto evidenciado, es el miedo que las estudiantes parecen tenerle al error que pueda generar el uso de números fraccionarios o el uso de los decimales al momento de dar una solución. Su preocupación por la exactitud deja al descubierto que estimar no es una tarea que tenga mucha importancia en las actividades académicas que se llevan a cabo en su currículo y por ende para ellas los datos “inexactos” generan dudas y se sienten incapacitadas para interpretarlos por lo que el uso de números naturales las hace sentir más cómodas. Este panorama viene a comprobar lo expuesto por Chamorro, C. & Belmonte, J. (1991, pp. 72) quienes sustentan que la estimación es imposible desarrollarla si no se realizan prácticas de medida, de manera que el error cometido disminuya poco a poco y por ende, disminuya el temor de quien realiza la tarea. Además, los autores también recomiendan practicar la estimación con cada una de las unidades de medida que conozcan los estudiantes, así se beneficiaría no solo la propia estimación, sino también el aprendizaje de qué unidades usar en cada medición.

Así pues, en esta investigación se consideró que la persistencia del procedimiento de inmersión como “el método para hallar volumen” en correspondencia a la definición “volumen: espacio desplazado al sumergir un objeto en un líquido” deriva en gran parte de una temprana introducción del lenguaje algebraico relacionado con el concepto de volumen y no es representativo de una noción clara en la que las estudiantes comprendan realmente el significado de “espacio desplazado”, pues de lo contrario no se daría confusión entre volumen-peso, volumen-densidad, volumen-capacidad y volumen-superficie.

A continuación, se muestran algunas de las expresiones de las estudiantes en las que se evidencia la no diferenciación de los conceptos de peso, superficie, capacidad, densidad y volumen. Cabe destacar que los conceptos aquí mencionados son básicos tanto en Física como en Geometría y Química, sin embargo, la no diferenciación entre ellos es una dificultad muy común en la mayoría de los estudiantes incluso en estudiantes universitarios (Manotas y Rojas 2008, Raviolo, Moscato & Schnersch, 2005 y Sáiz, 2003).



Ⓔ Al principio pensé que si se sumergiera en el agua, flotaría, entonces no tendría volumen, pero todo tiene volumen, un lugar en la "tierra", pero si yo lo llevo a sumergirlo, no se quedaría abajo porque no es pesado, pero tal vez cuando suba, subirá con el agua en su interior.



Además de los obstáculos mencionados, también se detectaron dificultades en el uso y conversión entre unidades de medida, la comprensión de la dimensionalidad (bidimensionalidad y tridimensionalidad), el empleo de fórmulas (memorísticas) para solucionar problemas y en términos generales, un desarrollo pobre en los componentes de estimación. Así mismo, la mayoría carecían de una imagen mental clara de la unidad de medida que iban a usar para la tarea de estimación, por eso recurrieron al uso de su propio cuerpo (medidas antropomorfas).

#### 4.1.2.2 Exploración final

Finalizada la intervención didáctica, se analizaron los datos obtenidos durante la última fase de la secuencia didáctica. La siguiente red semántica ilustra las principales categorías y subcategorías encontradas.

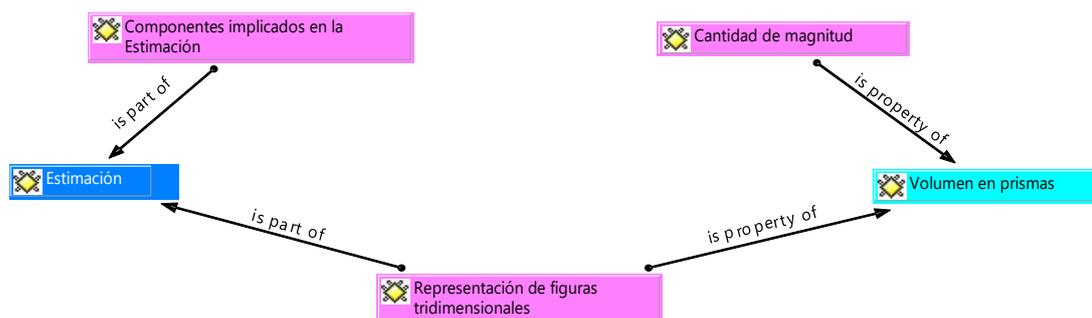


Fig. 3. Red semántica en la que se representan las principales categorías y subcategorías halladas durante el desarrollo del taller de validación.

El objeto mental volumen, entendido en esta investigación en el sentido que le da Freudenthal citado por Saucedo (2009, pp. 2) “todas las representaciones, ideas, relaciones, significados que el concepto evoca en la mente de la persona” experimentó un cambio sustancial en las estudiantes. Cuando se inició la investigación, para las estudiantes el concepto volumen solo hacía referencia al volumen desplazado; sin embargo, la inmersión para muchas medía el peso, el área, la capacidad o la densidad. Si bien es cierto, no se abordaron en este estudio todos los conceptos (fenomenológicos) físicos con los que ellas asociaban volumen, sí se logró hacer diferencia en tres aspectos:

- ✓ Capacidad no es lo mismo que volumen ocupado.
- ✓ El volumen puede hallarse usando diferentes técnicas.
- ✓ El volumen no es lo mismo que el área.

Este avance se logró gracias a que, en la intervención didáctica, las estudiantes debieron manipular y transformar elementos concretos que les facilitó observar cambios y diferencias.

Con respecto a la observancia de la aditividad del volumen, se logró anidar la noción de que es posible llenar un cuerpo con “cubos” cuyas aristas tienen longitud igual a 1 seguido de la unidad que se esté trabajando ( $m^3$ ,  $cm^3$ ) y de este modo estimar su volumen; sin embargo ellas mostraron resistencia a la idea y siempre volvían al uso de la fórmula, es posible que la decisión tomada en el diseño didáctico sobre limitar el trabajo al volumen de prismas, reforzara la idea de que el volumen se mide en tres dimensiones: largo, ancho y espesor, sin embargo, reconocieron la diferencia entre volumen desplazado y volumen ocupado y ya no hablaban de la inmersión como “el método” para hallar el volumen.

Después de la intervención didáctica, la exploración final deja al descubierto cambios en otros aspectos tales como:

- ✓ Concepción del significado de cantidad de magnitud. Las estudiantes se referían a las unidades de medida y las magnitudes tanto en forma oral como escrita y pocas veces obviaban su notación (como pasaba con frecuencia en la exploración de ideas previas), el trabajo práctico les permitió comparar cantidades y medir, procesos que son esenciales al cuantificar la realidad (Godino, Batanero & Roa, 2002, pp. 626).
- ✓ Representación de figuras tridimensionales. La imagen mental en tres dimensiones que en los primeros acercamientos de esta investigación tenían las estudiantes sobre los prismas, era la de un cubo, a pesar de que buscaron moldes y construyeron diferentes prismas para solucionar el problema de empacar sus productos, cuando hacían un gráfico para analizar una situación problema, siempre lo asociaban a esta forma. La interpretación de volumen como una magnitud física tridimensional, calculable como el producto de tres longitudes o el producto de una superficie por una longitud, sentó las bases para que el modelo de figura tridimensional, se fortaleciera desde la relación plano/espacio en cuyo caso el proceso de visualización del cuerpo en la mente se enriqueció.

Las situaciones que se dieron en la intervención didáctica forzaron el establecimiento de relaciones entre lo que se percibe en el espacio tridimensional y lo que aparece cuando este queda plasmado en el plano. Así las cosas, la relación entre el espacio tridimensional y el bidimensional se robusteció ofreciendo elementos de referencia para el estudio de los cuerpos, así como facilitando la visualización mental (si se producían cambios de posición o de tamaño), la estructuración, la capacidad de abstracción para reconocer aspectos propios de su condición (longitud, posición) y la preparación para imaginarse la figura en su totalidad, aunque solo se vea una parte.

Sin embargo, se quedó en deuda con la unidimensionalidad del volumen ya que el aspecto de medir y comparar en el conteo de unidades de volumen no se trabajó, en parte por la premura del tiempo y en parte porque el interiorizar la unidad de medida que necesitaban para hacer las estimaciones y las mediciones les volvió hábiles en la determinación de la unidad y por lo tanto no les fue necesario hacer

conversiones. Este tratamiento en la metodología (el de no tratar la dimensionalidad del volumen como una unidad que tiene dos variantes) puede acarrear incompreensión, pues no se tuvo la oportunidad de abordar características propias del Sistema Métrico Decimal (SMD) necesarias para que la dimensionalidad del volumen se fijara en sus objetos mentales.

Ahora bien, con respecto a la estimación, el análisis de las estimaciones que llevaron a cabo las estudiantes en el taller de validación, muestran tendencia a la sobreestimación (estimar sobre el valor real). Los procesos utilizados por las estudiantes se relacionaron con el proceso de comparación de la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente presente (antropométrico para el caso de las longitudes de las aristas) y técnicas indirectas (empleo de fórmulas).

A pesar de esta tendencia, el hecho de que tanto en el concepto de volumen como en la capacidad de estimación se dieran avances que sugieren comprensión, se consideró un logro; dado que como se ilustró en la exploración de ideas previas, las estudiantes, sólo podían realizar algunos cálculos mentales con expresiones exactas, pues la no identificación de la magnitud volumen, la poca interiorización de referentes de medida y la misma concepción de que estimar no es un proceso matemático dada su “inexactitud” se los impedía.

Finalmente, se expone una clasificación de los componentes de la estimación en medida determinados por Castillo, Segovia, Castro & Molina (2011, pp. 166) que se vieron más beneficiados con la intervención didáctica, así como los desafíos que quedaron planteados, confirmando que la habilidad de estimar en situaciones de medida se regula progresivamente al interactuar con los demás y con el medio.

### Avances

- ✓ Comprender la cualidad que se va a estimar o medir.
- ✓ Percibir lo que va a ser medido o estimado.
- ✓ Comprender el concepto de unidad de medida.
- ✓ Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación.

### Desafíos

- ✓ Usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones: iterar un referente ausente, acotar, descomponer, recomponer, reajustar
- ✓ Verificar la adecuación de la estimación.
- ✓ Conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida.
- ✓ Tener imagen mental de referentes que se van a usar en las tareas de estimación.

- ✓ Usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones: iterar y/o comparar un referente presente y usar técnicas indirectas (empleo de fórmulas)
  
- ✓ Adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a medir o estimar.

**Tabla 1. Avances y desafíos de los componentes de la estimación en medida.**

#### **4.1.2.3 Actuación de la modelación**

“La modelación como metodología de enseñanza, parte de un tema y sobre él desarrolla cuestiones que se quieren comprender...es capaz de llevar al alumno a construir conocimientos que tienen significados o sentido para él” (Biembengut y Hein, citados por Biembengut & Hein, 2004, pp. 108) y tal como lo afirman los autores, en este estudio se pudo evidenciar que después de la intervención didáctica la comprensión se fijó en los modelos de trabajo de las estudiantes.

Para ilustrar la ruta que se siguió durante el proceso de implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje, a continuación, se muestran las fases llevadas a cabo, resaltando la interacción entre las estudiantes y el problema. En ella se visualizan las variables que intervinieron en el proceso, las características distintivas en cada fase y la obtención de un modelo algebraico fruto de la relación entre las fórmulas, los cuerpos y la estimación comparativa con un múltiplo de un referente presente. Así, en esta experiencia se hicieron evidentes aspectos que facilitaron determinar la forma en la que las estudiantes mejoraron su capacidad estimativa, destacándose:

- ✓ El algoritmo se vinculó fuertemente con los modelos numéricos, los algebraicos y los geométricos-espaciales de las estudiantes, de ahí el uso frecuente de fórmulas para traducir la información que plantea el problema.
  
- ✓ El modelo facilitó que la experiencia de estimar pudiera llevarse a otros contextos para ser validada, como por ejemplo en el trabajo con el software geométrico Cabri 3D, en el que las estudiantes pudieron manipular el espacio tridimensional que ofrecen las herramientas del software y controlar las variables, de tal modo que los cambios de longitud o de superficie en los cuerpos no significaban un problema mayúsculo al ser estimados. Duval (2006, pp. 159) destaca el uso de software como una herramienta que ofrece una “percepción dinámica de la transformación de representación frente al soporte estático del papel” facilitando que los estudiantes cambien de una representación semiótica con intencionalidad y comprensión.

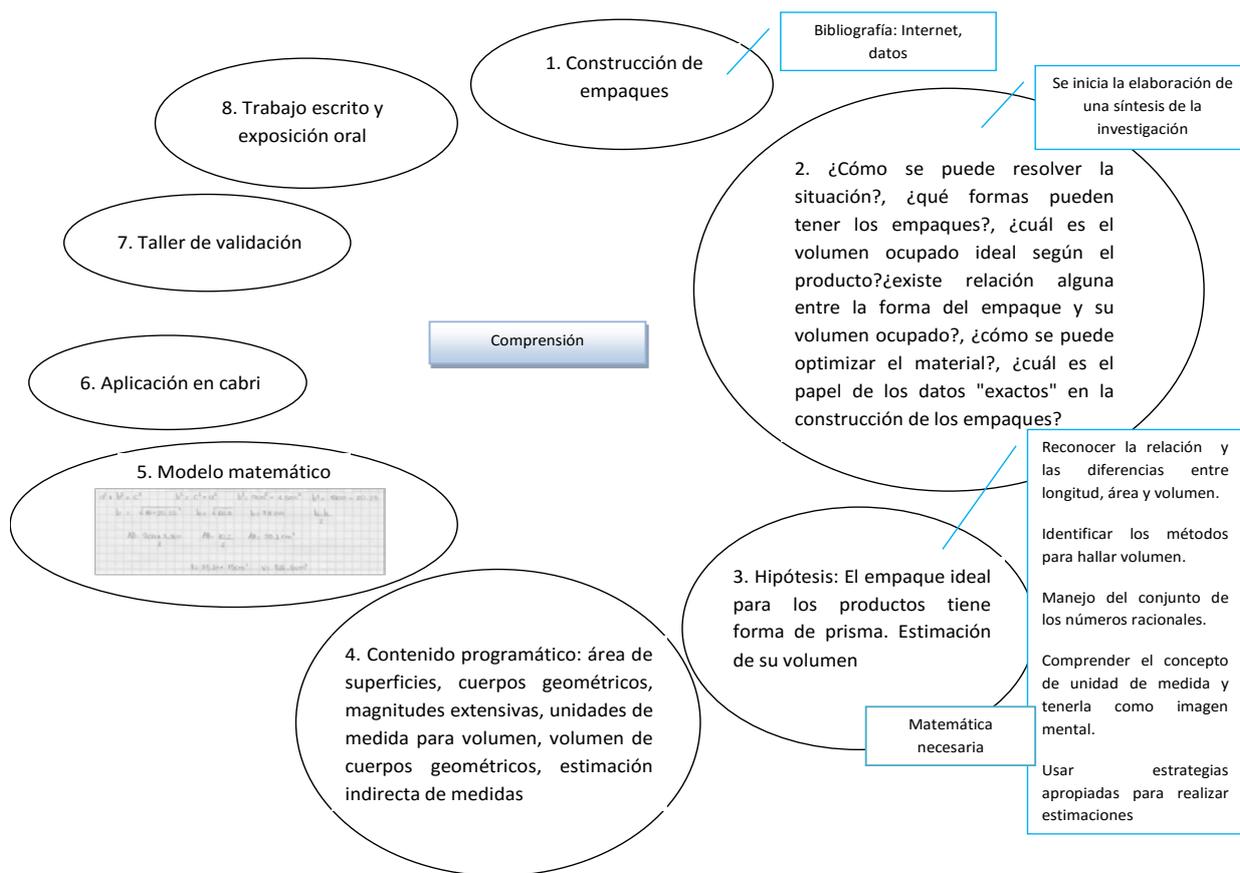


Fig. 4. Actuación de la modelación. Fuente: Elaboración propia

## 5 Conclusiones e implicaciones

Dada la importancia que tuvo la modelación como estrategia de enseñanza, es fundamental resaltar que el trabajo llevado a cabo por las estudiantes se constituyó en una forma de resolver un problema que era de su interés, esta característica propia de la modelación facilitó la participación y la creación de un ambiente de autoconstrucción del conocimiento a partir de la interacción entre pares, acompañado por la colaboración de un adulto cuyo objetivo era destacar la intencionalidad matemática de las tareas, promoviendo la explicación de ideas, la profundización y el análisis de los procedimientos.

La importancia de plantear una secuencia didáctica que facilitara el método de actuación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje permitió reconocer que los recursos de aprendizaje puestos en marcha en la clase de matemáticas no pueden ser tareas aisladas o realizadas esporádicamente. A partir del proceso metodológico llevado a cabo a partir de la intervención desde la modelación, las estudiantes pudieron acomodar sus conocimientos a las nuevas construcciones mentales y teóricas que se tejieron sobre estimación; de hecho, la

capacidad de pasar de “modelos de” a “modelos para” demuestra que la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje permite la exploración de diversas formas de acercarse a un fenómeno y por ende al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Los resultados presentados evidencian que en las estudiantes hubo avances en la comprensión de la magnitud volumen, el uso de unidades de medida estandarizadas y no estandarizadas, la estimación, el reconocimiento y uso de la cantidad de magnitud y el uso de diferentes sistemas numéricos, tales avances se refieren según el Ministerio de Educación Nacional en los referentes curriculares de la Serie Lineamientos Curriculares. Matemáticas (1998) al desarrollo del pensamiento métrico.

Es fundamental resaltar que el trabajo llevado a cabo por las estudiantes se constituyó en una forma de resolver un problema que era de su interés, esta característica -propia de la modelación- facilitó la participación y la creación de un ambiente de auto-construcción del conocimiento a partir de la interacción entre pares, acompañado por la colaboración de un adulto cuyo objetivo era destacar la intencionalidad matemática de las tareas, promoviendo la explicación de ideas, la profundización y el análisis de los procedimientos. Las estudiantes demostraron flexibilidad en sus raciocinios y en las estrategias para resolver problemas y movilizaron y transfirieron conocimientos de un contexto a otro demostrando autonomía, responsabilidad e interés a lo largo de todo el proceso.

Fue claro que algunas estudiantes consiguieron realizar estimaciones cercanas a la medida real, aunque lo hicieran utilizando su cuerpo como una extensión. No obstante, la estrategia de usar medidas antropométricas vino a convertirse en una forma de encarar el obstáculo que supone el uso excesivo del SMD, que con regularidad reduce el acto de medir a lo algorítmico y permite visualizar a la medida como una acción cotidiana y no como una cuestión aritmética. Con relación a los modelos de trabajo, se pudo concluir que los modelos que tenían las estudiantes sobre medición, espacio tridimensional, volumen y estimación al iniciar este estudio fueron evolucionando conceptualmente hasta estructurarse como elementos más elaborados, producto de la percepción, del discurso, de la interacción social y de la experiencia de cada una frente a lo que se vivía en el aula (Otero, & Banks-Leite, 2006, pp. 153), por lo que se espera que se sigan enriqueciéndose ahora que se han fortalecido sus bases. Sin embargo, el mayor alcance que tiene para las estudiantes la evolución de sus modelos es su funcionalidad y la posibilidad que les brinda de solucionar situaciones de medida en las que anticipar o juzgar un resultado pueda ser determinante.

Otro punto importante es que las estudiantes ampliaron su percepción del concepto de volumen pasando de considerarlo solo como volumen desplazado a considerarlo también como volumen ocupado; además, pudieron diferenciarlo de otros conceptos, por ejemplo, del de capacidad y del de superficie.

Considerando la relación que las estudiantes establecieron con la matemática durante la intervención didáctica, se puede decir que plantear una secuencia didáctica que facilitara el método de actuación de la modelación como estrategia de enseñanza fue una estrategia fundamental. Los recursos puestos en marcha por las estudiantes

llevan a considerar que, en efecto, las tareas aisladas o realizadas esporádicamente no son la mejor propuesta para facilitar el aprendizaje. A lo largo de la implementación de la secuencia didáctica se verificó que bajo los parámetros de la modelación, las estudiantes pudieron acomodar sus conocimientos a las nuevas construcciones mentales y teóricas que se tejieron sobre estimación; de hecho, la capacidad de pasar de “modelos de” a “modelos para” (que la mayoría de las estudiantes envueltas en el estudio reveló), demuestra que la modelación como estrategia de enseñanza permite la exploración de diversas formas de acercarse a un fenómeno y por ende al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Con relación a la estimación se puede decir que, finalizado el estudio, las estudiantes comprenden algunas técnicas para llevar a cabo la tarea de estimar, entendiendo “comprenden” en el sentido que le da Godino (2002, pp.3): conocen porque dichas técnicas son adecuadas, su ámbito de validez y las relaciones que presentan con otras técnicas. A pesar de esto, no se puede decir que las estudiantes son competentes estimando, porque como explica el mismo investigador, no dominan correctamente (con un margen de error mínimo) las técnicas para estimar, ni aplican técnicas variadas que permitan decir que conocen cómo hacer la tarea en cualquier situación.

No obstante, se considera que con la implementación de la modelación como estrategia metodológica de enseñanza sí se aportó al desarrollo de la estimación toda vez, que se fortalecieron aspectos como los notacionales, escritura alfanumérica, mejoramiento de las técnicas para medir y la utilización de instrumentos de medida, el cálculo aritmético, el uso de fórmulas, la interiorización de las unidades de medida de longitud, la cualidad que mide el volumen, la flexibilidad mental, entre otros, todos ellos relacionados directamente con la estimación de cantidades continuas en las estudiantes.

Se resalta por último el hecho de que la mayoría de las estudiantes adquirió la estructura multiplicativa del volumen sin dar muestras de que han adquirido la noción de “cubrir con capas”, este aspecto reviste importancia porque en investigaciones recientes de Sanmiguel & Salinas (2011, pp. 552) la tendencia era contraria: el uso de estrategias de recuento de cubitos desplazaba al uso de fórmulas o a la composición y descomposición de los cuerpos.

## Bibliografía

Axpe, M. (s.f). *La investigación etnográfica en el campo de la educación. Una aproximación meta-analítica*. Tesis de Doctorado.

Biembengut, M. & Hein, N. (2004) *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática*. *Educación Matemática*, V. 16 (2), p.105-125.

Biembengut, M. & Hein, N. (s.f) *Modelo, modelación y modelaje: Métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas*. Departamento de matemática – CCEN, Universidad Regional de Blumenau.

Recuperado de: [http://matesup.utralca.cl/modelos/articulos/modelacion\\_mate2.pdf](http://matesup.utralca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf).

- 
- Blomhøj, M., (2004) *Mathematical modelling – a theory for practice. International perspectives on learning and teaching mathematics. National center for mathematics education. Suecia*, pp. 45-159.
- Bressan, A. & Bogisic, B. (1996) *La estimación, una forma importante de pensar en matemática*. Biblioteca Nacional de Maestros. Recuperado de: <http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL000516.pdf>.
- Callís, J. & Fiol, L. (s.f) *Características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal*, p. 161-169.
- Cañón, M., (2009) *Orientaciones didácticas al tratamiento de la longitud en la escuela: del reconocimiento de atributos a la comprensión de los procesos de conservación*. En: ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. ASOCOLME. Memorias del 9° encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Valledupar, Cesar. p. 141-146.
- Castillo, J., Segovia, I., Castro, E., & Molina, M. (2011) *Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: Longitud y superficie*. Trabajo presentado en el Seminario de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y la Educación Matemática, Granada, 17-19 febrero.
- Chamorro, M., & Belmonte, J. (1991) *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.
- Chamorro, M. (1995). *Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria*. UNO revista de Didáctica de las Matemáticas, n° J, pp. 31-53.
- Colección Cuadernos de Matemática Educativa, cuaderno no. 5 (2002) *Estándares curriculares - área matemáticas: aportes para el análisis*. Asociación colombiana de matemática educativa, ASOCOLME.
- Córdoba, F. J. (2011) *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal.
- Dickson, L.; Brown, M. & Gibson, O. (1991) *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: editorial Labor, S.A.
- Duval, R. (2006) *Un tema crucial en la Educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. *La Gaceta de la RSME*, V. 9.1, pp. 143 - 168.
- Godino, J. (2002) *Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática*. XVI Convegno Nazionale: Incontri de la Matematica. Castel San Prieto Terme Bologna. Novembre.
- Godino, J.; Batanero, C. & Roa, R. (2002) *Proyecto Edumat-Maestros*. Febrero. Recuperado de: [http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5\\_Medida.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf)

Manotas, M., & Rojas, C., (2008) *Conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres alumnos universitarios*. *Zona próxima*, No. 9, p. 60 - 69.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares. Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Otero, M. & Banks-Leite, L. (2006) *Modelos mentales y modelos numéricos: Un estudio descriptivo en la enseñanza media*. *Relime*. V. 9, (1), p. 151-178.

Raviolo, A., Moscato, M., & Schnersch, A. (2005) *Enseñanza del concepto de densidad a través de un modelo analógico*. *Revista de Enseñanza de la Física*, vol. 18, N° 2. p. 93-103.

Sáiz, M. (2003) *Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria*. *Revista mexicana de investigación educativa*, V. 8 (18), p. 447-478.

Sáiz, M. (s.f) *El volumen ¿por dónde empezar?* Recuperado de: <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asiq4/ConfMagist.pdf>

Sanmiguel, A. & Salinas, M. (2011) *Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2° de ESO relacionadas con el concepto de volumen y su medida*. En Marín, M; Fernández, G.; Blanco, L.; Palarea, M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*.543-554. Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Saucedo, G. (2009) *Hacia la construcción del concepto de volumen*. En Zapico, I., & Tajeyan, S. (Ed.), *Acta de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática*. República Argentina, ciudad de Buenos Aires: SOAREM. Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Trigueros, M., (2009). *El uso de La modelación en la enseñanza de las matemáticas*. *Revista Innovación educativa*, V. 9(46), p. 75-87.

Villa, J. A. (2007). *La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo*. *Tecno Lógicas*. 19. 51-81

Primer autor: **Yaneth Milena Agudelo Marin**

**Licenciada en Educación con especialidad en Matemáticas, Magíster en Enseñanza de las Ciencias y estudiante de Doctorado en Educación. He sido docente de matemáticas en instituciones públicas y privadas de la ciudad de Pereira; Colombia, actualmente me desempeño como docente-tutora de la maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Manizales. [agudeloyanethmilena@gmail.com](mailto:agudeloyanethmilena@gmail.com)**

Segundo autor: **Ligia Inés García Castro**

**Licenciada en Orientación Escolar, Magister en Educación, docente de diferentes programas de maestría en el área de Cognición, didáctica de la matemática y Metodología de la investigación. Docente investigadora en el Centro de Estudios Avanzados en niñez y juventud en la línea de Cognición. Par evaluador de Colciencias en proyectos de investigación de diferentes universidades de Colombia. [liqjaines.garcia@gmail.com](mailto:liqjaines.garcia@gmail.com)**