REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 90-106

Concepções de licenciandos em Matemática sobre demonstração em Geometria

Gisela Maria da Fonseca Pinto, Agnaldo da Conceição Esquincalha

Fecha de recepción: 01/03/2016
Fecha de aceptación: 18/05/2016

Resumen	En pocas palabras, el texto presenta la génesis de la manifestación cognitiva en la geometria, de Balacheff, destacando sus principales conceptos. Entonces va a la cuenta de una actividad llevada a cabo con estudiantes de una licenciatura en Matemáticas en Río de Janeiro, con el fin de inferir sus puntos de vista con respecto a la demostración de algunos resultados geométricos que se exploran en la escuela primaria. **Palabras clave**: Demostración, Geometría, Licenciado en Matemáticas.
Abstract	Briefly, the text presents the genesis of cognitive demonstration in Geometry of Balacheff, highlighting its main concepts. Then it goes to the account of an activity carried out with students of a Bachelor's Degree in Mathematics in Rio de Janeiro, in order to infer their views regarding demonstration of some geometrical results that are explored in elementary school. **Keywords**: Demonstration, Geometry, Licentiate in Mathematics.
Resumo	O artigo discorre brevemente sobre a gênese cognitiva da demonstração em Geometria, de Balacheff, destacando seus principais conceitos. Em seguida, passa-se ao relato de uma atividade realizada com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática no Rio de Janeiro, com o intuito de inferir sobre suas concepções a respeito de demonstração de alguns resultados geométricos que são explorados na escola básica. **Palavras-chave**: Demonstração, Geometria, Licenciandos em Matemática.

1. Introdução

Os processos ligados ao ensino e aprendizagem de Geometria são normalmente complexos e difíceis para professores e alunos. Questões culturais já impregnam estas relações, como, por exemplo, os tipos de abordagem e a concentração nos últimos capítulos dos livros didáticos brasileiros, o que tem sido superado pelos critérios qualidade estabelecidos pelo Plano Nacional do Livro Didático como parâmetro de avaliação de coleções publicadas no Brasil.

Tais dificuldades são muitas vezes inerentes à natureza do conhecimento geométrico. Quais as fronteiras entre o conteúdo e o conhecimento que o aluno traz para a escola? Até que ponto se deve ou não exigir a formalidade do aluno e a denominação correta de formas ou a descrição de propriedades? As definições devem ser informadas ou construídas? Até que ponto é necessário "algebrizar" e "numerizar" o ensino de Geometria?

Estas e muitas outras questões tornam as pesquisas em Geometria sempre muito relevantes para a Educação Matemática. Neste trabalho, vamos abordar algumas destas questões, investigando como alguns alunos da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública situada no Estado do Rio de Janeiro, Brasil, se posicionam frente à demonstração de proposições familiares a eles. Vamos nos debruçar especialmente sobre o problema das demonstrações em Geometria, na perspectiva de Nicolas Balacheff.

2. Aporte teórico

Os Parâmetros Curriculares Nacionais brasileiros (1998) apontam a importância do início do desenvolvimento da abstração em Matemática na escola, ainda que os processos de formalização apareçam de forma elementar, mas com especial atenção para a investigação e o levantamento de conjecturas, oportunizando que o aluno desenvolva a capacidade de argumentação matemática.

Almouloud (2007) traz uma leitura do trabalho de Balacheff (1982), distinguindo os conceitos de explicação, prova e demonstração. A explicação estaria no campo do sujeito locutor, que comunica a outro a verdade de uma asserção matemática. Se um grupo a considera convincente, é considerada uma prova para esse grupo, ainda que a proposição seja falsa. Se a prova se refere a uma asserção matemática, Almouloud (2007, p. 3) comenta que Balacheff a chama, somente neste caso, de demonstração. Nessa concepção, as explicações podem ser provas para um determinado grupo, mas não para outro. Já as demonstrações, seriam provas com as características a seguir:

> 1) são as únicas aceitas pelos matemáticos; 2) respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas; 3) trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência. (Almouloud, 2007, p.3)

Existem outras perspectivas sobre os conceitos de prova e demonstração em Matemática, discutidas pelo próprio Balacheff (2004), confrontando colocações de outros pesquisadores a respeito. Ainda que perspectivas distintas possam ser assumidas, neste trabalho fazemos uso exclusivamente do entendimento de Balacheff para esses conceitos, em particular, no que tange ao seu uso no campo da Geometria, como descrito a seguir.

Nicolas Balacheff (1987) lança reflexões sobre a gênese cognitiva da demonstração, indicando a importância de uma evolução no pensamento geométrico de forma a que se promova a compreensão do significado de uma demonstração em Geometria. O autor entende que somente a partir daí os estudantes serão capazes de realizar as suas próprias demonstrações neste campo do conhecimento matemático. Balacheff mapeia em duas categorias as provas que os alunos produzem: as provas pragmáticas e as provas intelectuais. O tipo de prova apresentado pelo aluno pode dar indícios do grau de maturidade do conhecimento geométrico e das demonstrações apresentadas pelo aluno analisado.

As provas pragmáticas são explicações construídas a partir de algum tipo de ação direta do estudante sobre o objeto geométrico em tela: este analisa singularmente a proposição, em um caso particular que possa ser percebido pelo aprendiz como uma ação particular sua sobre o objeto, estendendo-se eventualmente a algum início de generalização, mas sem de fato alcança-la.

Por outro lado, as provas intelectuais são encontradas em situações em que se percebe claramente que o estudante não depende de uma ação, mas consegue refletir sobre elas por já estarem, tais ações, devidamente interiorizadas para o aluno, que também já é capaz de produzir um discurso lógico-dedutivo que encadeie de forma matematicamente coerente os objetos e suas relações.

A evolução nestas categorias depende de evolução nas formas de agir, formular e validar. Balacheff identifica quatro possíveis formas de validação neste processo de ascensão:

- Empirismo ingênuo: o estudante considera alguns poucos casos, particulares, considerando-os suficientes para validar a proposição. Não há questionamento quanto a particularidades. É uma validação imatura e rudimentar, normalmente inicial no processo de generalização e bastante resistente ao longo do desenvolvimento do pensamento geométrico. Como exemplo deste nível, Balacheff comenta sobre o problema da determinação do número de diagonais de um polígono, sugerindo que alunos que encontram-se neste nível teriam obtido experimentalmente a quantidade de 5 diagonais para o pentágono e observando que este número se mantém mesmo que se varie a forma do pentágono, e a partir daí concluindo peremptoriamente que o hexágono também tem 6 diagonais. Não observamos aqui nenhuma preocupação com a generalização ou com a extensão: o aluno crê que um exemplo basta para demonstrar a validade da proposição.
- Experiência crucial: o estudante pretende verificar a propriedade como um caso não tão particular, permitindo antever alguma generalização, muito incipiente ainda, porém. A “generalização” viria do fato de que “se funciona neste caso, então funciona sempre”. Percebemos então que o aluno já demonstra alguma preocupação em aludir à generalização, mas ainda parte de exemplos acessíveis a ele para chegar ao “sempre”. Retomando o exemplo de Balacheff sobre o número de diagonais de um polígono, o aluno faria um exemplo “crucial”, como determinar o número de diagonais de um polígono com muitos vértices, depreendendo um tipo de “generalização empírica” e concluindo que se vale para este caso atípico, então valeria para os demais.
- Exemplo genérico: neste nível, a validação consistiria em deixar claras as razões que validam uma propriedade. A verificação é construída sobre um exemplo, seguida de uma generalização, tomada então como uma demonstração particular que será válida para toda a classe representada. Balacheff retoma a determinação do número de diagonais de um polígono, indicando que o aluno

neste nível poderia tomar como exemplo um hexágono, mas ir generalizando as ideias, citando por exemplo que partem 3 diagonais de cada vértice uma vez que são 6 vértices menos o próprio vértice de origem e os vértices adjacentes a este, e que, portanto, teria ao todo 6 x 3 diagonais, mas como cada 2 vértices compartilham a mesma diagonal, então seria a metade deste resultado (9 diagonais). Note-se que apesar de ter se prendido ao caso do hexágono, o pensamento é generalizável a outros tipos de polígonos.

- Experiência mental: as validações neste nível independem de representantes particulares, de modo que a argumentação flui por meio de pensamentos que organizam e controlam logicamente a generalidade da situação. Voltando ao exemplo de Balacheff, o aluno neste nível comentaria genericamente que em cada vértice o número de diagonais é o número de vértices menos os dois vértices vizinhos, indicando ser necessário multiplicar este resultado diminuído do próprio vértice origem da diagonal pela quantidade de vértices, uma vez que o número de diagonais que parte de cada vértice é constante. A seguir, orienta sobre a necessidade da divisão por dois, considerando que cada diagonal é contada duas vezes neste processo.

O autor afirma ainda, que este último nível demarca a passagem da prova pragmática à prova intelectual, onde as ações passam a estar suficientemente interiorizadas e dirigidas à generalidade sem se preocupar com casos particulares. Se forem considerados os princípios de organização necessários à uma demonstração (conjunto institucionalizado de definições, teoremas e regras de dedução com validade socialmente compartilhada e que fundamenta o rigor matemático), podemos ter aí uma demonstração matemática. O nível exemplo genérico é como uma fase intermediária, ora podendo ser pensada como prova pragmática, ora como prova intelectual conforme a ação sobre o exemplo considerado dependa de concretização particular ou se esta usa a concretização somente como base para conseguir expressar um pensamento generalizador.

Balacheff destaca ainda que esta evolução, de provas pragmáticas para intelectuais, não depende somente das características da linguagem: a natureza e o status do conhecimento definem esta transição. As provas pragmáticas dependem de saberes práticos e de ações concretas; as provas intelectuais originam-se de reflexões e de debates sobre o conhecimento.

O significado das demonstrações, de que hipóteses levam a teses, ou seja, de que relações conhecidas entre objetos geométricos levam necessariamente a novas relações é um ponto de grande dificuldade para os alunos – e a categorização proposta por Balacheff deixa clara esta dificuldade.

3. Caracterização da pesquisa

O presente estudo foi conduzido com alunos 32 da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública situada no Estado do do Rio de Janeiro, todos integrantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, fomentado pelo Ministério da Educação da República Federativa do Brasil.

Inicialmente procedeu-se com a leitura e estudo mais aprofundado sobre as ideias propostas por Balacheff, sintetizadas na seção anterior, e publicadas em trabalhos acadêmicos do autor sobre a demonstração em Geometria feita por alunos na escola básica. No intuito de fazer um levantamento para analisar demonstrações dos sujeitos dessa pesquisa, elaborou-se uma pequena lista de atividades de demonstração em Geometria, que poderá ser vista a seguir. Os itens desta lista foram selecionados considerando-se: (a) a familiaridade do aluno com o conteúdo da proposição e (b) demonstrações curtas e que se relacionam a conteúdos ensinados na educação básica. As atividades não precisaram ser identificadas, o que permitiu que os alunos ficassem mais à vontade em responder aos itens. A seguir apresentamos ao leitor a folha de atividades.

Em que período você está?________________

Você já concluiu o curso de Geometria Euclidiana Plana[1]?

( ) SIM   Há quanto tempo? __________________

( ) NÃO

As questões a seguir referem-se à prova de situações provavelmente familiares a você. Procure resolvê-las com calma, lembrando que você não está sendo avaliado e que esta tarefa não vale nota. Não há necessidade de que se identifique, apenas de que procure resolver com calma e utilizando a argumentação que julgar mais adequada.

1) Considere um par de retas r e s concorrentes em um ponto P e os ângulos formados por elas. Esses ângulos são adjacentes ou opostos pelo vértice. Mostre que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

2) Mostre que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Ao mostrar isso, você demonstrou o Teorema de Pitágoras?

3) Mostre que em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º.

4) Mostre que um triângulo é equilátero se e somente se ele é equiângulo.

5) Considere um trapézio ABCD cujos lados paralelos são AB e CD. Considere também os pontos médios M do lado AD e N do lado BC. Prove que o segmento MN é paralelo a AB e CD e que seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos de AB e CD.

Figura 1. Quadro com o conteúdo da folha de atividades.

[1] Geometria Euclidiana Plana é uma disciplina do quarto período da Licenciatura em Matemática na Universidade em que foi realizada a pesquisa.

Os licenciandos tiveram um período de 2h para resolver as questões, de forma individual e sem consultar nenhum material e nem aos pesquisadores, que estavam presentes e conduziram a aplicação das atividades. As perguntas iniciais sobre a disciplina de Geometria Euclidiana Plana têm o intuito de avaliar sua influência sobre o pensamento geométrico dos estudantes. Nessa disciplina, a Geometria Plana é apresentada de forma axiomática, com nível de abstração bem mais profundo do que o escolar.

A seguir são apresentadas as respostas esperadas. Nestes desenvolvimentos, está-se usando o símbolo pelo número, num abuso de notação que simplifica o registro escrito, como por exemplo a soma das medidas dos ângulos $A\hat{P}C\ e\ C\hat{P}B$ por $A\hat{P}C + C\hat{P}B$.

1) Considere um par de retas r e s concorrentes em um ponto P e os ângulos formados por elas. Esses ângulos são adjacentes ou opostos pelo vértice. Mostre que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Hipótese: r e s são retas concorrentes em um ponto P.

Tese: ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração:

Consideremos r contida em um plano α; r divide o plano em dois semiplanos, que por sua vez são redivididos por s que intercepta r em P em regiões limitadas por duas semirretas de mesma origem – ângulos, portanto. Como cada dois destes ângulos, se adjacentes, formam um semiplano, então eles são suplementares e então a soma das medidas desses ângulos é igual a 180º. Temos então, considerando a denominação indicada na figura:

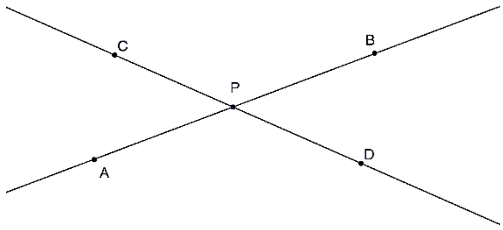

Figura 2. Retas r e s concorrentes em um ponto P.

Fonte: Imagem gerada com o software GeoGebra.

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{P}C + C\hat{P}B = 180^{o} \\ C\hat{P}B + B\hat{P}D = 180^{o} \end{array}\right\} A\hat{P}C + C\hat{P}B = C\hat{P}B + B\hat{P}D \therefore A\hat{P}C = B\hat{P}D.$$

Como os pares de ângulos adjacentes são suplementares, então o mesmo ocorre para os ângulos *APD* e *BPC*. Logo, podemos concluir que os ângulos que são opostos pelo vértice são congruentes.

Comentários: neste item, esperávamos que os alunos identificassem hipótese e tese, inicialmente. Além disso, alguma justificativa para a suplementaridade dos ângulos adjacentes seria algo necessário para que a demonstração seja consistente.

2) Mostre que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Ao mostrar isso, você demonstrou o Teorema de Pitágoras?

Hipótese: o triângulo é retângulo.

Tese: o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração (possibilidade i):

Seja o triângulo ABC retângulo em A e AH a altura relativa à hipotenusa BC (H é o pé dessa altura). AH divide ABC em dois triângulos: ABH e ACH. Nesses três triângulos assim formados (o inicial e os dois gerados a partir do traçado da altura) temos a congruência dos ângulos retos e ainda de um dos ângulos agudos, visto que os ângulos agudos são complementares por serem ângulos internos de triângulos retângulos que compartilham pelo menos a medida de um ângulo agudo. Esta observação nos permite concluir que os três triângulos são semelhantes. Considerando-os dois a dois, temos:

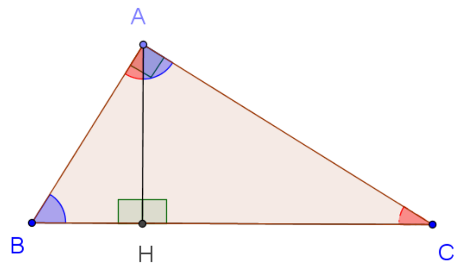

Figura 3. Triângulo ABC retângulo em A e altura AH relativa à hipotenusa BC.

Fonte: Imagem gerada com o software GeoGebra.

$$\Delta ABH \sim \Delta CBA \left(A\hat{H}B = C\hat{A}B = 90^o \; por\ hipótese, e\ A\hat{B}H = A\hat{B}C\ pela\ lei\ angular\ de\ Tales\right)$$
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} = \frac{AH}{AC} \therefore (AB)^2 = BH \cdot BC\ (1)$$
$$\Delta ACH \sim \Delta BCA \left(A\hat{H}C = C\hat{A}B = 90^o \; por\ hipótese, e\ A\hat{C}H = A\hat{C}B\ pela\ lei\ angular\ de\ Tales\right)$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB} \therefore (AC)^2 = CH \cdot BC\ (2)$$

$$Somando\ (1)\ e\ (2):$$

$$(AB)^2 + (AC)^2 = BH \cdot BC + CH \cdot BC = BC(BH + CH) = BC \cdot BC = (BC)^2$$

Demonstração (possibilidade ii):

Hipótese: triângulo AMN retângulo em A.

Tese: o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Construímos um quadrado de lado AM + NA e sobre os lados desse quadrado segmentos consecutivos de medidas AM e NA, conforme pode ser visualizado na figura a seguir.

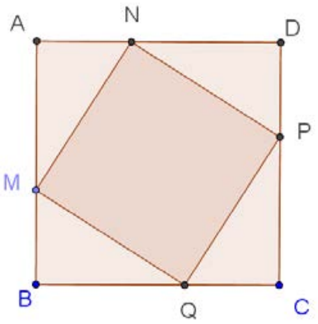

Figura 4. Quadrados.

Fonte: Imagem construída com o software GeoGebra.

Relacionando as áreas, encontramos:

$$(BM + MA)^2 = (MN)^2 + 4 \cdot \frac{BM \cdot MA}{2}$$
$$(BM)^2 + 2(BM \cdot MA) + (MA)^2 = (MN)^2 + 2(BM \cdot MA)$$
$$(\mathrm{BM})^2 + (AM)^2 = (MN)^2 \therefore (AN)^2 + (AM)^2 = (MN)^2$$

Então, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Comentários: neste item, espera-se que o aluno identifique corretamente hipótese e tese e que justifique as conclusões intermediárias, promovendo um encadeamento lógico-dedutivo.

3) Mostre que em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º.

Hipótese: existência do triângulo

Tese: soma dos ângulos internos igual a 180º

Demonstração:

Consideremos o triângulo ABC qualquer. Considere a reta s suporte do lado BC. Tracemos por A, a reta r paralela à s, determinando em A os ângulos determinados por r e AB e por r e AC. Estes dois ângulos e o ângulo no vértice A são adjacentes e consecutivos, estando todos contidos no mesmo semiplano e determinados pela reta que gera o semiplano – logo, a soma desses ângulos é 180º. Pelo Teorema das Paralelas, sabemos que o ângulo entre r e AB é congruente ao ângulo interno C desse triângulo e ainda que o ângulo entre r e AC é congruente ao ângulo interno B desse triângulo. Podemos então concluir que a soma dos ângulos internos desse triângulo é igual a 180º.

Comentários: espera-se que o aluno determine corretamente hipótese e tese e que justifique as conclusões intermediárias, como o Teorema das Paralelas para concluir pela congruência dos ângulos.

4) Mostre que um triângulo é equilátero se e somente se ele é equiângulo.

(⇒)

Hipótese: o triângulo é equilátero

Tese: o triângulo é equiângulo

Demonstração:

Seja ABC um triângulo equilátero – então temos AB = AC = BC e seja AM a mediana relativa ao lado BC.

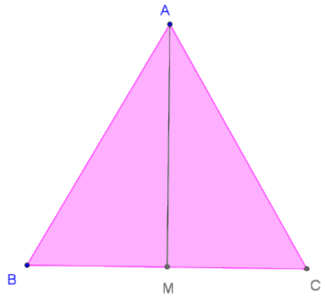

Figura 5. Triângulo ABC equilátero.

Fonte: Imagem gerada com o software GeoGebra.

Considerando os triângulos ABM e ACM, temos: AB = AC (por hipótese); BM = CM (por construção) e AM comum. Então pelo caso LLL da congruência de triângulos podemos concluir pela congruência entre esses dois triângulos, o que acarreta na congruência entre os ângulos B e C. Analogamente, reproduzindo esta construção tomando agora a mediana relativa ao lado AC, concluiremos pela congruência entre os ângulos A e C desse triângulo. Pela transitividade da igualdade, encontra-se a congruência entre A e B e consequentemente entre os três ângulos desse triângulo.

($\Leftarrow$)

Hipótese: o triângulo é equiângulo

Tese: o triângulo é equilátero

Demonstração:

Considere o triângulo equiângulo ABC. Traçando a bissetriz AM relativa ao ângulo A, obtém-se $B\hat{A}M = C\hat{A}M$ (por construção) e $\hat{B} = \hat{C}$ (por hipótese). Logo, pela Lei Angular de Tales, obtemos a congruência entre os ângulos $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C$, que além de congruentes são adjacentes e consecutivos, compartilhando uma mesma reta que origina o semiplano que contém o triângulo ABC, sendo então suplementares – o que implica em $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C = 90^{\text{o}}$. Observando os triângulos AMB e AMC, tem-se $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C = 90^{\text{o}}$, AM comum e $B\hat{A}M = C\hat{A}M$ (por construção), o que permite que se conclua que esses triângulos são congruentes pelo caso ALA da congruência de triângulos e a partir daí pela congruência entre AB e AC. De modo análogo obtemos a congruência entre BC e AC, tomando a bissetriz relativa ao vértice B, e por transitividade a congruência entre AB e BC, permitindo a conclusão pela equilateralidade desse triângulo.

Comentários: espera-se que o aluno demonstre ida e volta, além de identificar corretamente hipótese e tese em cada caso e que construa logicamente as conexões dedutivas.

5) Considere um trapézio ABCD cujos lados paralelos são AB e CD. Considere também os pontos médios M do lado AD e N do lado BC. Prove que o segmento MN é paralelo a AB e CD e que seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos de AB e CD.

Hipótese: ABCD é trapézio; M é ponto médio de AD e N é ponto médio de BC.

Tese: MN // AB; MN // CD e $MN = \dfrac{AB + BC}{2}$.

Demonstração:

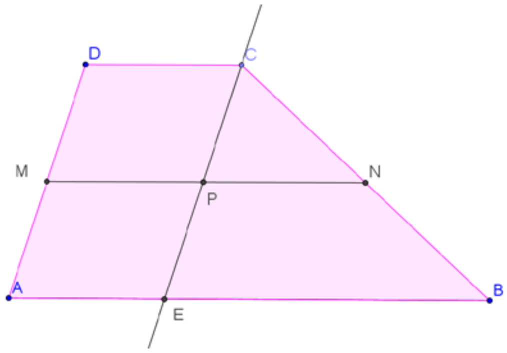

Figura 6: Trapézio.

Fonte: imagem gerada com o software GeoGebra

Seja ABCD um trapézio qualquer com AB//CD, e sejam M e N pontos médios de AD e BC, respectivamente. Traçando CE//AD, temos que AECD é um paralelogramo (quadrilátero com lados opostos paralelos), e então CD=AE e AD=CE. Seja P o ponto de encontro entre MN e CE. Vamos supor, por absurdo, que P não seja ponto médio de CE. Então os triângulos CNP e CBE não são semelhantes em razão ½ e então N não é ponto médio de BC, o que contraria a hipótese. Logo, P é ponto médio de CE pois está alinhado com M e N e, sendo assim, MD=PC e então MPCD é paralelogramo, o que implica em MN//AB//CD.

Além disso, observando os triângulos CPN e CEB, sabemos que são semelhantes em razão ½ (caso LAL da semelhança de triângulos), temos $BE = AB - AE = AB - CD$ e então $PN = \frac{AB - CD}{2}$.

Logo $MN = MP + \frac{AB - CD}{2} = CD + \frac{AB - CD}{2} = \frac{AB + CD}{2}$.

Comentários: espera-se neste item que o aluno identifique corretamente hipótese e tese e que proceda o encadeamento lógico-dedutivo, justificando cada passo de sua demonstração.

4. Resultados e discussões

A distribuição por período letivo em que se encontram os participantes desse estudo pode ser visualizada na tabela a seguir.

Período letivo	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de alunos	4	4	2	8	1	6	7

Tabela 1. Distribuição de alunos por período letivo.

A universidade onde estudam os sujeitos da pesquisa oferece a disciplina de Geometria Euclidiana Plana no 4º período do curso de Licenciatura em Matemática, cuja ementa é: retas, ângulos, círculos, semelhança e congruência; análise dos desdobramentos históricos de alguns conceitos específicos e suas implicações epistemológicas, entre eles, a independência do axioma das paralelas; introdução às Geometrias não–euclidianas: o modelo elíptico e o hiperbólico; caracterizações algébricas dos processos de construção por régua e compasso.

Apesar da ementa parecer satisfatória, a curta duração da disciplina, que dura apenas um período com quatro horas semanais, e as dificuldades em Geometria que os alunos apontam, podendo mesmo ser indicada como uma “falta de intimidade” com os conteúdos estudados pela Geometria que não sejam uma redução numérica ou algébrica de seus temas de estudo tornam o cumprimento desta ementa algo dificilmente atingido.

Portanto, o período letivo não determina necessariamente o contato do aluno com Geometria Euclidiana Plana. A tabela a seguir ilustra isso, mostrando há quanto tempo o aluno já cursou a referida disciplina.

Há quanto tempo concluiu a disciplina?	Ainda não cursou	Um Semestre	Um ano	Mais de um ano
Número de alunos	13	8	1	10
Desempenho no teste abaixo de 50%	10	7	1	7
Desempenho no teste acima de 50%	3	1	0	3

Tabela 2. Tempo de conclusão na disciplina versus desempenho no teste.

Podemos observar também que a correlação entre ter cursado a disciplina e ter um desempenho satisfatório no teste praticamente inexiste: dentre os 32 alunos que participaram deste estudo, em torno de 60% já tinham cursado a disciplina, sendo que os resultados estiveram abaixo dos 50% de aproveitamento para quase 80% desses estudantes.

Analisando as respostas dos alunos segundo a tipologia de Balacheff, encontramos o que pode ser resumido no quadro a seguir.

Questão	Empirismo Ingênuo	Experiência Crucial	Exemplo Genérico	Experiência Mental	Não foi possível determinar	Questão
1	0	0	2	21	9	**1**
2	0	2	0	10	20	**2**
3	0	0	2	16	14	**3**
4	0	0	0	2	30	**4**
5	0	0	1	0	31	**5**

Tabela 3. Distribuição da tipologia de Balacheff.

Esses números nos permitem inferir que os sujeitos da pesquisa apresentam algum conhecimento do significado de uma demonstração em Geometria – o fato de não termos encontrado nenhuma demonstração que pudesse ser enquadrada como empirismo ingênuo e praticamente nenhuma como experiência crucial denota isso. A maioria das demonstrações puderam ser consideradas como experiência mental – entretanto, foram bastante altos, mais frequentes que a experiência mental, exceto na questão 1, as situações em que não foi possível determinar. A impossibilidade de determinação do enquadramento da tipologia de Balacheff deve-se a erros ou ausência de resolução na questão. Destaque-se aqui as questões 4 e 5, em especial.

A primeira questão foi a que apresentou maior índice de demonstrações corretas pelos estudantes: 21 dentre os 32 estudantes apresentaram a demonstração correta, e outros 2 estudantes apresentaram uma validação para a proposição como um exemplo genérico, conforme pode ser visto na imagem que se segue.

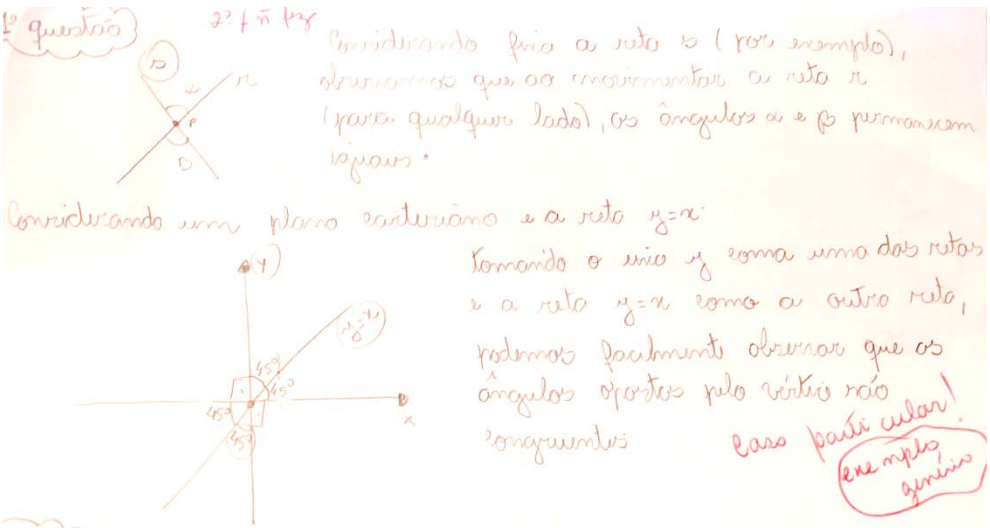

Figura 7: Exemplo de resposta para a questão 1.

O exemplo genérico fica claro nesta situação por apresentar toda a resolução uma linguagem que induz à generalização, mas que a fundamenta em um caso particular, tratando inclusive da equação desta reta numa mudança de quadro para a Geometria Analítica.

A questão 2, que tratava da ida do Teorema de Pitágoras, teve índices altos de erros ou abstenções também. Apenas 10 alunos demonstraram corretamente a proposição, usando a necessária generalização para a proposição. Destaca-se na sequência duas das validações que não podem se enquadrar como experiências mentais:

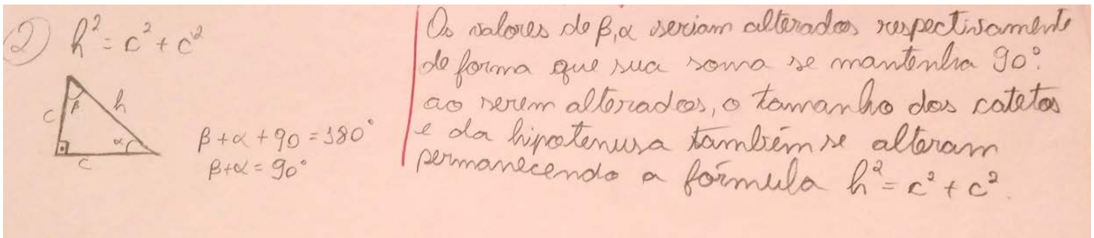

Figura 8: Exemplo de resposta para a questão 2.

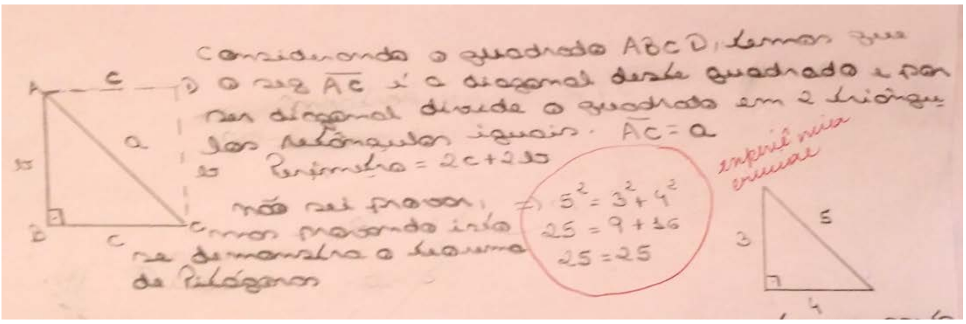

Figura 9: Exemplo de resposta para a questão 2.

Pode-se observar, na figura 8, que o aluno fundamenta-se em vivências provavelmente oriundas da geometria dinâmica, e que este direciona à generalização, entretanto sem ter formalização alguma. A resolução mostrada na figura 9 parte de um quadrado, ou seja, um caso extremamente particular, mas até então não numérico. O aluno reconhece que não sabe provar, mas mostra alguns casos em que sabe que a proposição vale, caracterizando novamente uma experiência crucial por conduzir a uma incipiência de generalização.

O item 3, apesar de frequentemente presente no cotidiano matemático de nossos alunos desde a educação básica, mostrou um perigoso equilíbrio entre as demonstrações corretas e as incorretas. Identificamos ainda duas tentativas de particularização, conforme podemos visualizar a seguir.

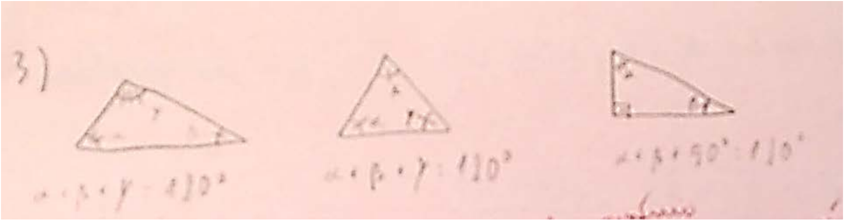

Figura 10. Exemplo de resposta para a questão 3.

É interessante observar que o aluno particularizou os tipos de triângulos, mas sem especificar medidas para os ângulos, apenas analisando as possíveis combinações entre os tipos de ângulos.

A questão 4 tratava da equivalência entre o caráter equilátero e equiângulo em um triângulo. Apesar de ser um assunto bastante familiar para os alunos, onde esta correspondência é facilmente tomada como hipótese, a demonstração não apresentou o mesmo grau de facilidade para os alunos. Os erros que podem ser destacados referem-se (a) à falta da demonstração da volta do teorema, ou seja, mostrar que se o triângulo é equiângulo, então ele é equilátero e (b) tentativas de algebrizar a demonstração que acabaram tomando a tese como hipótese, comprometendo o bom desenvolvimento da demonstração.

A questão 5 foi o que menos tentativas de resolução teve, não tendo também apresentado nenhum acerto integral. Houve uma tentativa de resolução considerando um caso particular do trapézio sendo isósceles:

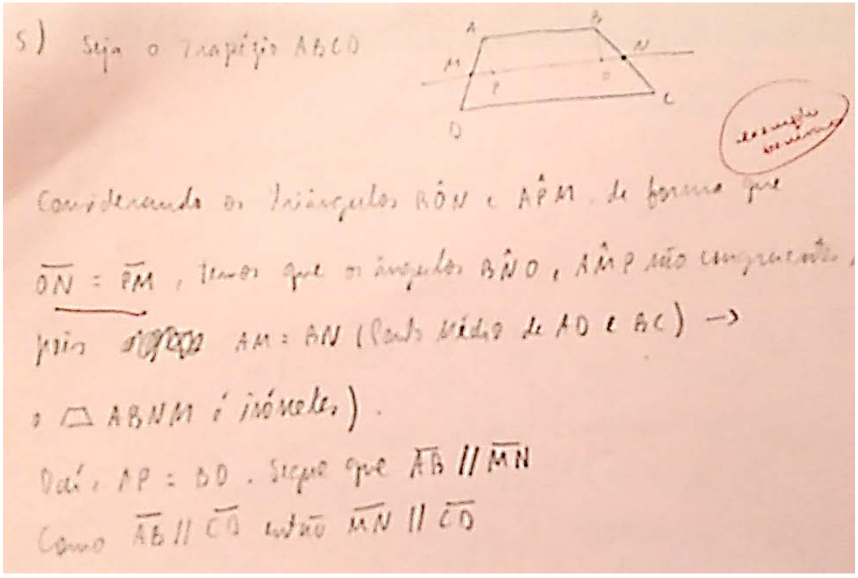

Figura 11. Exemplo de resposta para a questão 5.

Vemos aí uma clara tentativa de trazer a generalização para algum território que possa ser mais controlado pelo aluno, onde possam ser deduzidas propriedades de maneira mais fácil. Esse é um exemplo genérico por considerar um caso particular, mas fazer alusão ao caráter genérico da proposição.

5. Considerações finais

O desenvolvimento deste trabalho foi um momento bastante promissor no sentido de encarar o trabalho docente cotidiano em sala de aula com fonte de pesquisa para o professor. Especialmente no ensino de Geometria, este estudo torna-se particularmente interessante, posto que é uma área em que os alunos apresentam grande dificuldade desde a educação básica, dificuldades que muitas vezes os colocam, mesmo na Universidade, em mesmo nível que um aluno que esteja cursando ainda o Ensino Fundamental.

Uma possível percepção deste trabalho é que a superficialidade dos conhecimentos verdadeiramente geométricos e de pensamento geométrico dos alunos – brevemente professores de matemática da educação básica e, portanto, professores de Geometria – é pouco influenciada pela formação universitária inicial. Infelizmente, os resultados deste trabalho nos permitem inferir que a influência dos estudos matemáticos da Licenciatura para a Geometria, vão mais no sentido de corroborar a necessidade da demonstração, mas sem dar os fundamentos geométricos para isso.

Como demonstrar o Teorema de Pitágoras se os conhecimentos sobre semelhanças de triângulos são rasos? Como tratar da demonstração das propriedades relativas à base média de um trapézio se as ideias sobre quadriláteros, definições e propriedades são insuficientes? Como estabelecer a equivalência entre os triângulos equiláteros e equiângulos se a congruência de triângulos é uma ferramenta pouco conhecida e utilizada pelos alunos?

Conscientes da necessidade da demonstração mas sem aporte geométrico suficiente para isso, estes veem-se inibidos mesmo em tentativas de justificativas, inibindo a progressão aludida por Balacheff como necessária para que seja possível alcançar as provas intelectuais: empirismo ingênuo -> experiência crucial -> exemplo genérico -> experiência mental. É como nascer adulto sem ter aprendido a andar na infância. A ênfase das Análises e Álgebras nas demonstrações como técnica apenas, sem favorecer nem exigir conhecimentos consistentes podem ser bastante perigosas para a formação do futuro professor. O rigor matemático é necessário, lógico – afinal, formam-se matemáticos neste curso, mas a exclusividade para o rigor apresenta-se como um risco ao futuro do ensino de matemática.

Bibliografia

Almouloud, S. A. (2007). Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. *Anais*... 30ª. Reunião da ANPED. Recuperado el 29 de ebrero de 2016, de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf

Balacheff, N. (1982). *Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches em Didactique des Matémathiques*, 3(3), 261-304.

Balacheff, N. (1987). *Processus de Preuve et Situations de Validation. Education Studies in Mathematics,*18 (2), 147-176.

Balacheff, N. (2004). *The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 109.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Gisela Maria da Fonseca Pinto: Doutoranda em Ensino e História da Matemática e da Física pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Professora do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Possui pesquisas nas áreas de Educação Matemática Inclusiva, Formação de Professores de Matemática e Tecnologias Digitais em Educação Matemática. E-mail: gmfpinto@gmail.com

Agnaldo da Conceição Esquincalha: Estágio Pós-Doutoral em Educação Matemática na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Professor do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Possui pesquisas nas áreas de Formação de Professores de Matemática, Educação Matemática no Ensino Superior e Tecnologias Digitais em Educação Matemática. E-mail: aesquincalha@gmail.com