UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 220-226

El rincón de los problemas
Funciones discontinuas en situaciones cotidianas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Use la situación que se muestra a continuación, para ilustrar casos de continuidad y discontinuidad de una función en el intervalo [0; 17].

En la bodega "TODO BUENO" hay un cartel con la siguiente oferta:

Paquete de 6 kilos de arroz por 15 soles.
Precio por kilo: 3 soles

El concepto de función es sumamente importante en la matemática y entre los diversos tipos de funciones, las funciones reales de variable real continuas y las discontinuas, son parte esencial del análisis matemático. En los libros de cálculo diferencial es infaltable mostrar funciones continuas y funciones discontinuas; es usual mostrar las funciones discontinuas a partir de gráficos de funciones que presentan "saltos" o "vacíos", de modo que no pueden trazarse "sin levantar el lápiz del papel"

Es natural encontrar funciones discontinuas en un libro de cálculo diferencial; sin embargo, cabe preguntarse si encontramos funciones discontinuas en "la vida real", en situaciones cotidianas.

Con este pensamiento en el cerebro, advertí que en los lugares de estacionamiento de vehículos – que en Perú reciben el curioso nombre de "playas de estacionamiento" – la manera usual de establecer sus tarifas de cobro por el servicio lleva a funciones discontinuas. Así, considerando la tarifa de pago:

"*4 soles por hora o fracción*",

inicié mi clase sobre funciones continuas, en el curso de Análisis en la recta real, de la maestría en enseñanza de las matemáticas, pidiendo a mis alumnos que grafiquen la función *P* correspondiente al pago de *P*(*t*) soles por *t* horas de estacionamiento. Luego de unos minutos de trabajo personal o con los compañeros vecinos, observé que habían hecho algunas gráficas y para que quede claro para todos, procedimos a hacerla socializando las experiencias.

Construimos una tabla como la siguiente:

Tiempo t (en horas)	Pago $P(t)$ (en Soles)
0	0
0,5	4
0, 75	4
1	4
1, 25	8
1, 5	8
2	8
2,1	12
2,9	12
3	12

Tabla 1

Aclaramos que la variable t está variando en los números reales, como corresponde a la variación continua del tiempo, y que la parte decimal se refiere a décimos o centésimos de hora.

Algunos alumnos habían hecho la tabla considerando minutos, por lo cual, a manera de ilustración, la Tabla 1 también la escribimos poniendo t en minutos, como se muestra en la Tabla 2:

Tiempo t (en minutos)	Pago $P(t)$ (en Soles)
0	0
30	4
45	4
60	4
75	8
90	8
120	8
126	12
174	12
180	12

Tabla 2

Manteniendo la variación continua de t en horas, y teniendo como referencia la Tabla 1, observamos que inmediatamente después de haberse cumplido un número entero de horas de estacionamiento, se produce “un salto” en los valores de la función pago, pues se pasa inmediatamente de 0 a 4, o de 4 a 8; o de 8 a 12. Así, se paga lo mismo por media hora y por una hora de estacionamiento (4 soles), pero no se paga lo mismo por una hora de estacionamiento (4 soles) y por una hora más un cuarto de hora de estacionamiento (8 soles). Estas observaciones las llevamos a la representación gráfica de la función *P*, de “pago por estacionamiento”, que mostramos en la Figura 1.

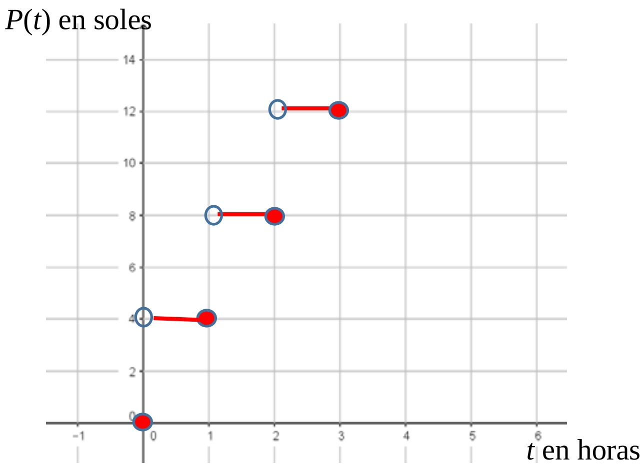


Figura 1

Percibimos que si bien la función *P* está definida para valores enteros de *t*, en esos puntos es que ocurre "el salto", que en términos matemáticos es la discontinuidad.

Entonces formulé la siguiente pregunta:

Si María dice que tuvo su auto estacionado cerca de 2 horas, ¿podemos saber cuánto pagó María por estacionamiento?

Luego de algunas intervenciones, concluimos que no podemos saber si pagó 8 soles o 12 soles, pues no tenemos claridad respecto a la expresión “*cerca de 2 horas*”. Si María tuvo el auto estacionado cerca de dos horas, pero menos de 2 horas, pagó 8 soles; pero si tuvo el auto estacionado cerca de 2 horas, pero un poco más de 2 horas, pagó 12 soles. Los alumnos relacionaron este hecho con el límite por la izquierda y el límite por la derecha de la función *P*, cuando su variable se aproxima a 2 por valores menores que 2 y por valores mayores que 2 respectivamente. Cada límite existe, pero son números diferentes (8 y 12) y en consecuencia el límite cuando la variable *t* se aproxima a 2 no existe.

Observemos que no es indispensable tener una expresión analítica de la función pago *P* para entenderla y para percibir que estamos ante una función real de variable real, cuyo dominio podemos considerar el conjunto de los números reales no negativos y cuyo rango es el de los múltiplos no negativos de 4. Más aún, se percibe gráfica e intuitivamente, que la función *P* tiene puntos de discontinuidad, cuando su variable independiente (tiempo *t*) toma valores enteros, y tiene intervalos de continuidad, que son intervalos abiertos, cuyos extremos son enteros consecutivos no negativos. Los registros tabular y gráfico de la función *P* son bastante ilustrativos. Lo importante es que a partir de una situación real, se construyó una función que permite percibir e intuir sus puntos de discontinuidad y sus intervalos de continuidad. Base fundamental para entender las definiciones formales y ampliar la perspectiva de matemática vinculada a la realidad.

Otra función discontinua

La experiencia anterior fue interesante y me quedé con la curiosidad de encontrar otra función discontinua, que provenga de una situación cotidiana. Cuando vi en una bodega el aviso de la oferta para la venta de arroz – como la que se presenta al inicio de este artículo – recordé haber trabajado funciones afines y lineales en contextos de venta de productos, considerando variaciones continuas y conjeturé que estaba ante la situación cotidiana que buscaba, para obtener otra función discontinua. Luego de examinar el caso a nivel personal, me pareció pertinente proponer el problema a mis alumnos. Lo hice en una evaluación, en la forma que está propuesto al inicio de este artículo y en la Figura 2 muestro parte de la solución de uno de los alumnos. El lector queda invitado a expresar esa función gráfica y analíticamente antes de ver la Figura 2. La mayoría de alumnos mostró una solución similar y es la que yo también había hallado y esperaba que los alumnos la encuentren.

Como el lector puede percibir, en la Figura 2 la función asigna a la cantidad *x* de kilos de arroz que se compra, la cantidad *f*(x) de soles que se paga, teniendo en cuenta la oferta, por cada 6 kilos de arroz. Gráficamente queda claro, por ejemplo, que por la compra de una cantidad de arroz cercana a los 6 kilos el pago es considerablemente diferente si la cantidad es menor o es mayor que 6 kilos. Por ejemplo, por 5,75 kg de arroz se pagará 5,75x3 soles; o sea 17,25 soles; pero por 6,25 kg de arroz se pagará 15 soles (por los 6 kilos, usando la oferta) más 0,25 x 3 soles; o sea 15,75 soles.

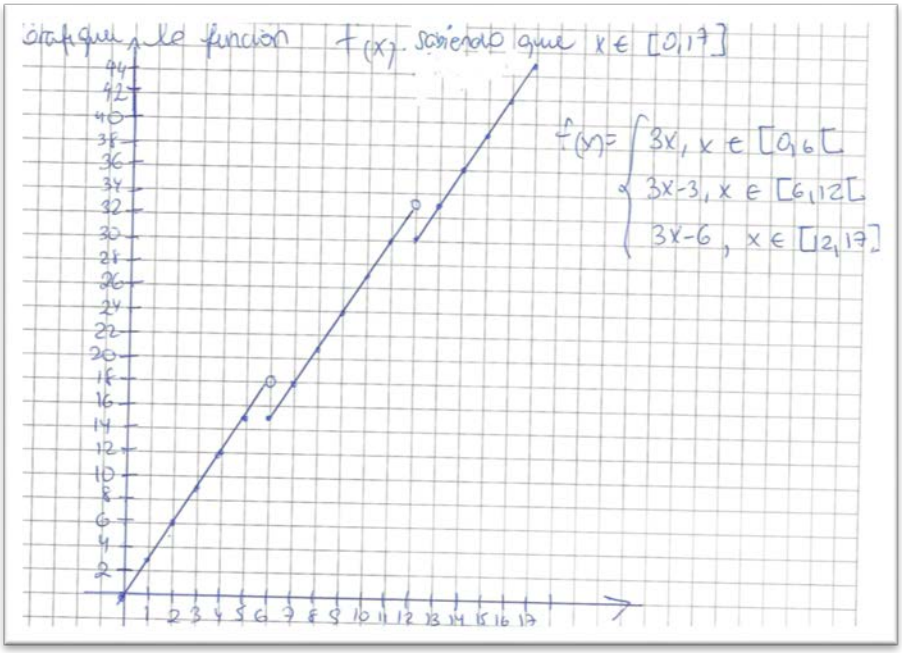


Figura 2

Analíticamente, la expresión $f(x)$ para x en el intervalo [0; 6[es muy sencilla, pues no es posible usar la oferta y en consecuencia solo se paga el precio de 3 soles por kg y se tiene:

$$\text{para } x \in [6; 12[\ ,\ f(x) = 3x$$

Cabe aclarar que se trata de un modelo matemático de la situación y que, por simplicidad, se asume que x toma todos los valores del intervalo [0; 6[, aunque en la realidad será imposible comprar, por ejemplo, $\sqrt{2}$ kg de arroz y pagar por ellos $3\sqrt{2}$ soles.

Si el número x de kilos que se compra es mayor o igual que 6, pero menor que 12; es decir, si $x \in [6; 12[$, lo que se pagará es $3x - 3$ soles, porque resulta de pagar 15 soles por los 6 kilos, más 3 soles por cada kilo o porción de kilo que excede de 6; o sea $15 + 3(x - 6)$. Así,

$$\text{para } x \in [6; 12[\ ,\ f(x) = 15 + 3(x - 6) = 3x - 3.$$

Razonamiento similar se hace para el intervalo [12; 17[:

$$\text{para } x \in [12; 17[\ ,\ f(x) = 30 + 3(x - 12) = 3x - 6.$$

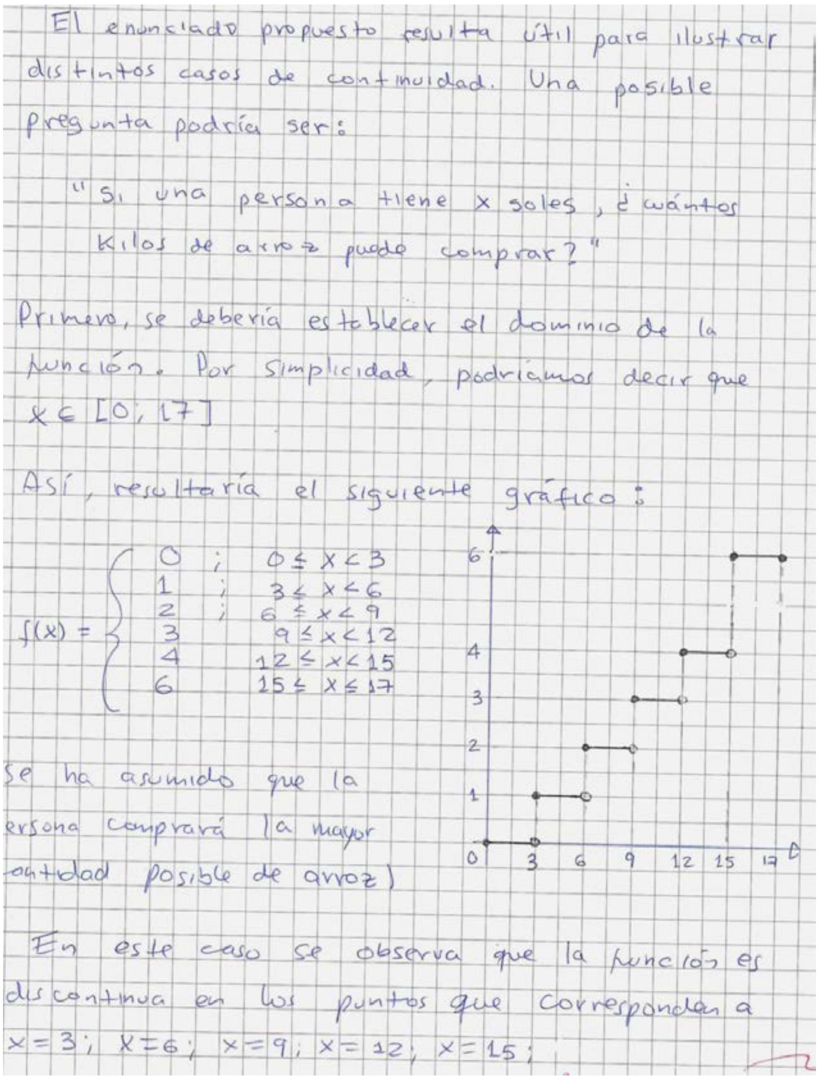
y así se obtienen las expresiones analíticas correspondientes para cada x del dominio [0; 17] de la función f.

Con las expresiones analíticas de $f(x)$ para x en los intervalos [0; 6[y [6; 12[, podemos calcular formalmente los límites por la izquierda y por la derecha, cuando x se aproxima a 6 y verificar que son números diferentes (18 y 15 respectivamente) y que en consecuencia tenemos un caso de discontinuidad para $x = 6$. Razonamiento similar nos lleva a concluir la discontinuidad de f en $x = 12$. Ciertamente, también puede examinarse formalmente las continuidades laterales de f en 0, 6, 12 y 17 y la continuidad de f en los puntos de los intervalos abiertos]0; 6[,]6; 12[y]12; 17[.

Otra función discontinua a partir de la misma situación

Me sorprendió muy gratamente la función que construyó otro alumno y que muestro en la Figura 3. Reconozco que inicialmente me dio la impresión de estar errada. Leyendo con atención, en este caso la función f lo que hace es asignar a la cantidad x de soles, la cantidad máxima de kilos de arroz $f(x)$ que se puede comprar, haciendo uso de la oferta, y considerando que no se puede comprar fracciones de kilo de arroz. Por ejemplo, con 7 soles, se puede comprar a lo más 2 kilos de arroz y es lo mismo que se puede comprar con 8 soles; con 8,90 soles y con x soles, si x es mayor o igual que 6 y menor que 9. Con 9 soles o más, pero menos de 12 soles, se puede comprar a lo más 3 kilos de arroz. Otra vez, para simplificar el modelo, se está asumiendo que x toma todos los valores reales de los subintervalos de [0; 17] considerados.

En este caso, hay discontinuidades evidentes – “saltos” – en los múltiplos positivos de 3, con el salto en 15 mayor que en los otros puntos de discontinuidad, por el uso de la oferta. Además, hay continuidad por la derecha para valores de x que son múltiplos de 3. La función nos recuerda a la función “máximo entero” y con este concepto podría obtenerse otra expresión analítica de la misma función.



El enunciado propuesto resulta útil para ilustrar distintos casos de continuidad. Una posible pregunta podría ser:

“Si una persona tiene x soles, ¿cuántos kilos de arroz puede comprar?”

Primero, se debería establecer el dominio de la función. Por simplicidad, podríamos decir que $x \in [0; 17]$

Así, resultaría el siguiente gráfico:

$$f(x) = \begin{cases} 0 ; & 0 \leq x < 3 \\ 1 ; & 3 \leq x < 6 \\ 2 ; & 6 \leq x < 9 \\ 3 & 9 \leq x < 12 \\ 4 & 12 \leq x < 15 \\ 6 & 15 \leq x \leq 17 \end{cases}$$

(Se ha asumido que la persona comprará la mayor cantidad posible de arroz)

En este caso se observa que la función es discontinua en los puntos que corresponden a $x = 3$; $x = 6$; $x = 9$; $x = 12$; $x = 15$;

Figura 3

Comentarios

1. Las experiencias mostradas son evidencias de la importancia de la creación de problemas, que ha estado presente al preparar una clase, al proponer una evaluación y al responder a la cuestión planteada en la evaluación. Todo, en el marco de la creación de problemas por elaboración; es decir a partir de situaciones, y teniendo como entorno matemático las funciones discontinuas.
2. Las funciones que hemos usado para ejemplificar funciones discontinuas en puntos de su dominio reflejan situaciones del entorno cotidiano y con ello facilitan la comprensión intuitiva y el aprendizaje de varios casos de continuidad y de discontinuidad de funciones reales de variable real. Cabe mencionar que no hemos ejemplificado casos de discontinuidad “evitable”.
3. El lector queda invitado a crear nuevos problemas para ejemplificar funciones con casos de discontinuidad. Como ya lo hemos expuesto en diversas ocasiones, una forma de crearlos es por *variación* y otra por

elaboración. La primera, haciendo modificaciones a problemas dados; por ejemplo, en el caso de la tarifa en la playa de estacionamiento, se podría introducir cambios como “la primera media hora es gratis”; o “por 4 horas o más, hay un descuento del 10% del total”, etc. Análogamente con la oferta de arroz.

Se obtendrán nuevos problemas por *elaboración,* encontrando otras situaciones que puedan llevar a funciones como las vistas (por ejemplo tarifas por el envío de paquetes, considerando intervalos para el peso y estableciendo un pago mínimo fijo, independientemente del peso). Así se tendrán situaciones interesantes de modelización que permiten definir funciones que se vinculan con la realidad y examinar en ellas sus puntos de continuidad y de discontinuidad.