

Un ejemplo de integración de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento didáctico de profesores de Matemáticas

Lyda Constanza Mora Mendieta, Édgar Alberto Guacaneme Suárez
 William Alfredo Jiménez Gómez

Fecha de recepción: 08/05/2016
 Fecha de aceptación: 30/09/2016

<p>Resumen</p>	<p>En el marco del proyecto de investigación titulado “El conocimiento histórico en la constitución de una visión sobre la naturaleza de la Aritmética y el Álgebra en maestros de Matemáticas en formación”, se describió el lugar que cumple la historia de la Aritmética y el Álgebra en un curso de “Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra” ofrecido para futuros profesores de Matemáticas. Se presentan entonces las descripciones de dicha historia, de la manera como se incorpora esta a la formación del conocimiento didáctico del contenido matemático y se ilustran las tareas propuestas en el curso analizado.</p> <p>Palabras clave: Historia del Álgebra y la Aritmética, conocimiento del profesor de Matemáticas, Enseñanza del Álgebra y la Aritmética.</p>
<p>Abstract</p>	<p>The research project entitled "The historical knowledge in the creation of a vision about the nature of arithmetic and algebra in mathematics teachers in training" inform about the place that meets the history of arithmetic and algebra in a course on "Teaching and Learning Arithmetic and Algebra" offered to future teachers of mathematics. Descriptions of this history, the way as the formation of pedagogical content knowledge is incorporated and the proposed tasks are presented.</p> <p>Keywords: History of Algebra and Arithmetic, Mathematics teacher knowledge, Teaching algebra and arithmetic.</p>
<p>Resumo</p>	<p>No projeto intitulado “O conhecimento histórico na criação de uma visão sobre a natureza da Aritmética e Álgebra em professores de Matemática em formação”, descrevemos o lugar que tem a história da Aritmética e Álgebra em uma disciplina “Ensino e aprendizagem da Aritmética e Álgebra” oferecido para estudantes de Licenciatura em Matemática. Neste artigo apresentamos descrições desta história, de como a história pode ser integrada à formação do conhecimento didático do conteúdo matemático dos futuros professores. As tarefas propostas na disciplina são também apresentadas neste artigo.</p> <p>Palavras-chave: História da álgebra e aritmética, Conhecimento dos professores de Matemática, Ensinando álgebra e aritmética.</p>

1. Introducción

La Historia de las Matemáticas [HM] se utiliza como herramienta en el espacio académico “Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra” [EAAA], el cual

constituye un curso de la “Licenciatura en Matemáticas”¹. Esta manera de integración de la HM se constituyó en objeto de análisis para el proyecto de investigación titulado “El conocimiento histórico en la constitución de una visión sobre la naturaleza de la Aritmética y el Álgebra en maestros de Matemáticas en formación”, financiado por el Centro de Investigaciones de la misma Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) en los años 2013 y 2014.

El curso en mención hace parte de la “Línea de Pedagogía y Didáctica específica” de la Licenciatura y está ubicado en el sexto semestre de diez a cursar. Dentro de la concepción de este curso se estableció como ruta de navegación:

- (i) La reflexión sobre la naturaleza de los objetos aritméticos y algebraicos, (ii) los aspectos curriculares sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra hasta ahora reconocidos y (iii) el estudio de propuestas de enseñanza o elementos a tener en cuenta en la enseñanza, en donde se incluye la identificación de materiales y recursos para el aula; y procesos propios del aprendizaje de algunos conceptos aritméticos o algebraicos. (Mora, 2009, p. 2)

Es así que desde su inicio (que data de 2010, año en que por primera vez se desarrolló el curso), la HM –y en particular, la historia de la Aritmética y el Álgebra [hAA]– se hizo presente, con la intención de que su estudio aportara a generar reflexiones sobre la naturaleza de los objetos aritméticos y algebraicos, a la vez que brindara información para responder preguntas tales como: ¿qué objetos han sido estudiados por la Aritmética y el Álgebra a lo largo de la historia?, ¿cómo se relacionan estas dos ramas de las Matemáticas?, o ¿son estas ramas independientes?, asuntos que hacían parte de la primera unidad del programa.

Con el pasar de los semestres de implementación del curso, la hAA ha ido ganando mayor presencia en este y se ha logrado integrar a los procesos de constitución de conocimiento didáctico del contenido matemático de los futuros profesores de Matemáticas formados en la Universidad. En este artículo se presentará entonces algunos aspectos de la visión lograda a través del proyecto de investigación sobre cómo aparece la hAA en un curso de Didáctica de la Aritmética y el Álgebra y, específicamente, en qué aporta a la formación de los futuros profesores.

Este artículo pretende entonces sumarse a la más de una treintena de documentos sobre la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática” publicados en la revista Unión (la mayoría de los cuales versan sobre la historia de la educación en Matemáticas) y aportar a lo discutido por Belisario & González (2012), bajo el subtítulo “[Historia de la Matemática (HM) - Educación Matemática (EM)] ↔ HMEM”, en lo que corresponde a la formación de profesores, pero en un sentido no exactamente referido allí.

2. La Historia de las Matemáticas que se pone en juego en el curso

Para describir y analizar la participación de la HM –y en particular la hAA– en el curso, se establecieron como unidades de análisis: las fuentes históricas, los

¹ Programa de formación inicial de profesores de Matemáticas, ofrecido por la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. (Colombia).

objetos históricos de referencia, el abordaje de los objetos históricos, los usos de la hAA y los objetos matemáticos.

2.1. Fuentes

Esta unidad de análisis se retoma de la propuesta que Guacaneme (2010) hace al presentar esta como una de diez tipologías de la HM; allí, *grosso modo*, se explicita la existencia de fuentes originales o primarias, de fuentes secundarias y de fuentes didácticas, caracterizándolas como sigue:

Dentro del tipo fuentes originales se encuentran, entre otros, los manuscritos originales de las obras matemáticas e incluso sus traducciones, la correspondencia entre matemáticos, los discursos de los matemáticos en congresos o eventos académicos, o los instrumentos y máquinas construidas para favorecer la producción matemática; los análisis, comentarios o recapitulaciones sobre estas fuentes originales, constituyen las fuentes secundarias. [...] Adicionalmente [...] se deberían incorporar las fuentes didácticas como un tercer tipo de fuentes, es decir, [...] los productos resultantes de transposiciones didácticas de la Historia con la intención de incorporarla a la enseñanza de las matemáticas. (Guacaneme, 2010, p. 138).

Así, en el curso hay un exiguo uso de fuentes primarias; se emplean traducciones al Español de fragmentos de obras de algunos matemáticos célebres (v.g., Elementos (de Euclides), *Arithmética* (de Diofanto), el Papiro de Rhind (Ahmes)). Respecto de las fuentes secundarias y fuentes de tipo didáctico, las últimas son las de mayor frecuencia.

Algunos de los ejemplos de fuentes secundarias utilizadas se referencian en la Tabla 1.

Documento
Boyé, A. (2003) ¿François Viète, inventor del álgebra? pp. 259-376. Traducción de: Sergio Toledo. Actas Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Fundación Canaria.
Ifrah, G. (2002). <i>Historia universal de las cifras</i> . Madrid: Espasa-Calpe.
Devlin, K. (2003). Prólogo. ¿Qué son las matemáticas? En: <i>El lenguaje de las matemáticas</i> . Intermedio. Bogotá. pp. 11-24.
Devlin, K. (2003). La importancia de los números. En: <i>El lenguaje de las matemáticas</i> . Intermedio. Bogotá. pp. 25-67.

Tabla 1. Fuentes secundarias empleadas en el curso

Algunas de las fuentes didácticas empleadas se reportan en la Tabla 2.

Documento
Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. Pre-publicaciones del seminario matemático García de Galdeano. Universidad de Zaragoza. No. 25
Esquinas, A. (2008). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica. Memoria para optar al Título de Doctor, Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España. (Versión electrónica).

Documento
Gallardo, A. & Torres, O. (2005). El álgebra aritmética de George Peacock: Un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica. <i>Memorias del IX Simposio de la SEIEM</i> . Universidad de Córdoba. España, 243–249
Godino, J., Font, V., Wilelmi, M. y Arreche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? <i>Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática</i> , 19, 34-46. (Versión electrónica).
Gálvez, A., Maldonado, A. y Guacaneme, E. (2012). ¿A qué llamamos Historia de la Aritmética? Una respuesta a través de cinco trazas. <i>Memorias XIII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa</i> . ASOCOLME. Universidad de Medellín, Universidad de Antioquia. pp. 347-352.
Guinness, G. (1999). Alguns aspectos negligenciados na compreensão e ensino de números e sistemas numéricos. <i>Zetetiké</i> , 7(11), 9 -27 (versión electrónica)
Macías, M.R. (2010). Evolución histórica del concepto de número. <i>Revista Autodidacta</i> 1(1), 28-47. (Versión electrónica).
Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión Histórica. <i>Revista IRICE</i> , 13, 105-132.
Medina, I. y Albarracín, A. (2012). <i>Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: La Aritmética</i> . Trabajo de grado. Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.
Mora, L. y Torres, J. (2007). <i>Concepciones de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre números reales</i> . Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. pp. 111-136.
Ochoviet, C. (2007). De la resolución de ecuaciones polinómicas al Álgebra Abstracta: un paseo a través de la Historia. <i>Revista digital Matemática, Educación e Internet</i> , 8(1), 1-19 (Versión electrónica).
Sessa, C. (2005). <i>Iniciación al estudio didáctico del Álgebra</i> . Buenos Aires: Libros del Zorzal.
Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). Inicios del álgebra y clasificación. En: <i>Iniciación al Álgebra</i> (pp. 37-70). Madrid: Editorial Síntesis.
Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. <i>Educational Studies in Mathematics</i> 22(1), 9-12. Traducción libre elaborada por Edgar Alberto Guacaneme (pp.1-12).
Triana, J. y Manrique, J. (2013) El papel de la Historia del Álgebra en un curso de didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas. Tesis de Maestría. Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.

Tabla 2. Fuentes didácticas empleadas en el curso

2.2. Objetos históricos de referencia

Para describir los objetos que se estudian se definieron tres subunidades, a saber: los objetos en sí mismos, los elementos de análisis y el tipo de Matemáticas aludidas.

La primera subunidad, es decir **el objeto histórico en sí mismo**, se incluye para establecer si en el curso hay referencia a: el estudio de biografías de matemáticos o de Escuelas (v.g., La pitagórica o la Escuela árabe), las versiones de las obras matemáticas (si estas son originales o traducciones, si son completas o fragmentos de estas), las cartas o correspondencia que se enviaban los matemáticos, la noción matemática (concepto, proceso, procedimiento) o problema matemático, las formas de pensamiento matemático (v.g., razonamiento sintético o analítico, formalismo, estructuralismo), y las teorías Matemáticas o porciones de ellas.

En relación con el objeto histórico en sí mismo, en el curso EAAA se hace referencia desde la perspectiva histórica a nociones matemáticas centradas en tipos de representaciones de ciertos conjuntos numéricos, a objetos que estudia el Álgebra o la Aritmética, y a la evolución de algunos objetos (como las ecuaciones). Y aunque en el curso no se estudia profundamente la biografía de matemáticos, sí se hace referencia a ciertos personajes, culturas o escuelas consideradas cruciales en la historicidad de la Aritmética o el Álgebra, como lo son las culturas babilónicas y egipcias, los pitagóricos, Euclides (sobre todo para tomar postura acerca de la llamada “álgebra geométrica”), Diofanto de Alejandría, los árabes (en particular al-Khowarizmi, Thabit Ibn Qurra y Omar Khyayam) y matemáticos europeos (Stevin, Vieté, Descartes, Gauss, Peacock, Galois, Dedekind, Hilbert, Noether y Cauchy, por ejemplo). Adicionalmente, se presentan algunos apartes de algunas obras representativas, y notaciones empleadas por Bombelli, Vieté y Descartes (para hacer referencia a la forma como eran presentados los problemas aritméticos o algebraicos así como sus soluciones, el tipo de lenguaje utilizado, las representaciones y los intereses); tales apartes son tomados de traducciones de las obras originales o de fuentes secundarias y didácticas. Es de resaltar, como lo han manifestado Gálvez y Maldonado (2012), que además de las fuentes que se utilizan, hay presencia de la interpretación personal de aspectos históricos de parte de la profesora del curso.

La segunda subunidad, es decir los **elementos de análisis**, se estableció para determinar si en el curso se incluye una historia conceptual (es decir una historia que enfatiza en los conceptos o incorpora tratamientos a cómo estos cambian a medida que pasa el tiempo), una historia de los problemas (que incluye la alusión a la evolución de los conceptos o procesos, pero asociados a los problemas que aportaron a su desarrollo) o una historia de las prácticas matemáticas o culturales involucradas en la evolución de los objetos matemáticos.

Sobre los elementos de análisis se reconoció que aunque en el curso EAAA los objetos de la Aritmética y el Álgebra no se profundizan desde su historia, el análisis que se hace de estos mezcla la historia conceptual y la historia de problemas; es decir, se hace referencia a la evolución de algunos de tales objetos en la constitución del desarrollo de las Matemáticas y algunas veces se estudian ciertos problemas relacionados con algunos de los objetos algebraicos o aritméticos.

La tercera subunidad retomada de una de las tipologías de la HM (Guacaneme, 2010), el **tipo de Matemáticas aludidas**, se requirió para determinar si las Matemáticas que hacen parte del estudio histórico pueden corresponder a la historia hegemónica (esto se corresponde con la historia de las Matemáticas occidentales, usualmente eurocéntricas) o a la historia no hegemónica (se refiere a la alusión o estudio de las Matemáticas propias de culturas específicas como comunidades indígenas o matemáticas orientales).

En relación con el tipo de Matemáticas aludidas, sin lugar a dudas, la historia que se estudia en el curso corresponde con las Matemáticas hegemónicas u occidentales, lo cual se relaciona directamente con la información en las fuentes citadas. Así, está poco presente la referencia que se hace a la historia de las Matemáticas no hegemónicas; por ejemplo, hay menciones a las Matemáticas de grupos indígenas a través de la alusión a la yupana o al sistema de numeración maya.

2.3. Abordaje de los objetos históricos

Esta unidad se refiere a dilucidar si los objetos histórico-matemáticos son presentados en el curso EAAA con distinto grado de profundidad, en cierta relación con el contexto sociocultural donde se desarrollaron, haciendo énfasis en los fracasos y en todo el proceso de construcción o presentando solo los productos finales desprovistos de obstáculos y desde diferentes perspectivas; para ello se consideraron varias subunidades, algunas inspiradas en algunas tipologías de la HM propuestas por Guacaneme (2010).

La **profundidad de estudio de los objetos** se refiere a si el tratamiento histórico incorporado se aproxima al relato histórico (o presentación general de hechos o del objeto considerado y de datos cronológicos, anécdotas o biografías), o bien si se hace un análisis histórico en el que se enfatiza en el contenido matemático, en la evolución de los objetos, en los problemas que se dieron.

En lo que corresponde con la profundidad de estudio de los objetos, en el curso se usa prioritariamente el relato histórico (se ubican fechas, épocas, nombres, obras y hasta se mencionan anécdotas); no obstante, en algunos pocos momentos se interpretan algunos hechos históricos (por ejemplo la forma como resolvían ecuaciones los babilónicos, al-Khowarizmi o Thabit Ibn Qurra), pero no alcanza el nivel de análisis histórico.

También se examina la **relación con el contexto sociocultural**, es decir se determina el nivel de atención al contexto social y cultural al presentar la historia de cierto objeto matemático. Específicamente se identifica si la historia que se pone en juego en el curso tiene una tendencia internalista en donde el centro de atención son los conceptos matemáticos en sí mismos y su estructura lógica, sin hacer referencia a los aspectos culturales o sociales alrededor de los objetos, o bien si hay una tendencia externalista en la cual se enfatiza en los asuntos sociales y culturales que incidieron en el desarrollo de los objetos matemáticos. Se incluye una opción intermedia en la cual se intenta un equilibrio incluyendo tanto la referencia a los aspectos sociales y culturales como al desarrollo de los objetos matemáticos.

En lo que corresponde con las relaciones con el contexto sociocultural, a pesar de no hacerse un estudio profundo de la hAA, se intenta que los maestros en formación logren ubicar el contexto sociocultural de ciertas épocas como una variable que interactúa con la producción matemática. Por ejemplo, se menciona el aporte de Simon Stevin a la notación de las expresiones decimales y su interés por hacer unas obras como *De Thiende* –también conocida como *La Disme*– (El decimal) y *Tafelen van Interest* (Tablas de interés), dirigidas principalmente a los mercaderes y comerciantes de la época, para facilitarles los cálculos. También se estudia la emergencia del simbolismo algebraico en el Renacimiento en relación con el cambio de pensamiento que se dio en la época y la invención de la imprenta. Asimismo se estudian las razones por las cuales se plantearon cinco teorías para los números reales en el mismo año (1872), y los intentos fallidos a lo largo de la historia para justificar las reglas para operar números negativos a partir de hechos reales que eran ignorados o considerados absurdos. En este sentido la HM abordada en el espacio EAAA no se puede clasificar en *internalista*, *externalista* o *intermedio*, aunque se puede evidenciar que hay alguna aproximación a la historia externalista.

Los **detalles históricos** constituyen también una subunidad de análisis. En esta, siguiendo las ideas de Grattan-Guinness (2004), se procura establecer si se hace un tratamiento de la HM como historia (tendencia que se refiere a los estudios históricos en los cuales cobran gran interés aspectos como: la presencia de las motivaciones que dieron origen al objeto o noción matemática, las relaciones y diferencias con otros objetos o nociones, la evidencia de las dificultades asociadas al desarrollo de la noción, entre otros detalles) o como herencia (tendencia que alude a la presentación de la historicidad de las nociones matemáticas centradas básicamente en los desarrollos exitosos).

En lo que tiene que ver con los detalles históricos, no se puede establecer si la aproximación a la HM en el espacio académico se puede clasificar como historia o como herencia, pues si bien, la intención de la profesora es que los maestros en formación sean conscientes de las dificultades asociadas a la evolución de ciertos objetos o las motivaciones que se dieron para que uno u otro concepto se desarrollara (historia), en las acciones docentes se evidencia mayor tendencia hacia la herencia.

Una última subunidad incluye la **perspectiva (interpretación) de quien hace la mirada** histórica. Aquí se reconocen dos aproximaciones: una desde la visión del autor original o historia cultural en la que se procura que el objeto matemático sea interpretado lo más fiel a como lo pensó el autor (enfaticando en las ideas del autor matemático, respetando las ideas originales y el contexto de la época) y otra desde la visión actual en la cual la presentación de los hechos históricos se hace desde la percepción existente, es decir desde el punto de vista del historiador moderno (por ejemplo empleando la simbolización y significación moderna) aún bajo el riesgo del anacronismo.

Acerca de la perspectiva (interpretación) de quien hace la mirada, se reconoce que en el curso EAAA principalmente se hace referencia a la presentación de hitos históricos o a la alusión a ellos desde la percepción actual, aunque la formadora hace referencia a entender ciertos hechos desde la perspectiva de los autores originales.

2.4. Usos de la hAA

Esta unidad se refiere al para qué de la presencia de la HM o de la alusión a ella; así, siguiendo la idea de Jankvist (2009) se determinan dos subunidades: la historia como herramienta y la historia como fin. La primera tiene que ver con el uso de la HM como un instrumento que busca contribuir al aprendizaje de las Matemáticas o del conocimiento didáctico del contenido matemático o de otro tipo, pero no histórico propiamente dicho. La historia como fin se refiere a que la HM es el fin en sí mismo; aprender HM es el propósito.

Sobre los usos de la HM, es claro para la formadora que su objetivo es usar la HM como una herramienta que aporte al conocimiento didáctico del contenido matemático; ella asegura que su objetivo no es que los estudiantes aprendan HM como tal (v.g., épocas o hechos sobresalientes *per se*), sino que si bien es importante que se ubiquen en un contexto histórico, el objetivo es desarrollar algunos de los conocimientos profesionales como futuros profesores de Matemáticas, por ejemplo, reconocer si los objetos aritméticos o algebraicos reconocidos en la HM se corresponden con los propuestos o desarrollados en los

currículos colombianos (Colombia – Ministerio de Educación Nacional, 1998, 2006), comprender que los posibles errores de sus estudiantes son similares a los que se dieron en la constitución de un objeto matemático (por ejemplo la aceptación de los números negativos) o que los niveles de aprendizaje que presentan los niños –por ejemplo, al avanzar en el proceso de simbolización– también se dieron en la historia del Álgebra (v.g., lenguaje retórico, sincopado, simbólico algebraico), entre otros elementos. La formadora afirma que la HM es uno de los organizadores curriculares del espacio que orienta (Mora y Guacaneme, 2004); en este sentido se ratifica el uso como herramienta, pero en este caso en el ámbito curricular de la formación de profesores de Matemáticas.

2.5. Objetos matemáticos

Con fines analíticos en esta unidad se establecieron objetos aritméticos y objetos algebraicos.

Para determinar los **objetos aritméticos** se tomó como base el estudio de la Historia de la Aritmética realizado por Gálvez y Maldonado (2012), quienes identificaron trazas de la Aritmética en la HM (llamadas así por los autores). Para la organización de estas unidades de análisis se utilizó este trabajo, asumiendo como objetos de la Aritmética: Los sistemas de numeración o numerales (se refiere a la historia de los símbolos que representan números o numerales, bien sea que representen naturales u otros números); los sistemas numéricos (se considera la formalización de sistemas numéricos específicos, es decir el proceso de objetivación de los sistemas numéricos); la Teoría de números; la logística (se refiere a las estrategias o herramientas para el desarrollo de cálculos numéricos o procedimientos para hacer operaciones; se considera aquí el uso de ábacos o métodos para hacer operaciones); el concepto de número (alude a las diferentes respuestas que a lo largo de la HM se ha dado a la pregunta qué es un número); y la lúdica aritmética (se refiere a la consideración de objetos que aparecen en la HM, relacionados con la Aritmética como lo son, por ejemplo los cuadrados mágicos, y que tienen un tinte lúdico).

Ahora, en lo que concierne a los **objetos algebraicos**, se tomó como base el estudio de la Historia del Álgebra realizado por Manrique y Triana (2013). Allí se identifican algunos objetos (conceptos o procesos) a saber: ecuación, relaciones entre tipos de números, estructuras algebraicas, simbolización algebraica, generalización algebraica, visualización algebraica y establecimiento de heurísticos.

Los **objetos aritméticos y algebraicos** que se mencionan en el curso EAAA son: sistemas de numeración, sistemas numéricos, Teoría de números, la logística, el concepto de número, ecuaciones (como herramienta para resolver problemas, como objetos de estudio en sí mismas), relaciones entre tipos de números, estructuras algebraicas (de sistemas numéricos específicos, como objetos en sí mismas), simbolización algebraica, y generalización algebraica. Se indica que se mencionan, porque no son estudiados a fondo, aunque algunos de estos son abordados con un poco más de profundidad como lo son: los sistemas de numeración (para distintos tipos de números, esto tiene relación con las representaciones), los sistemas numéricos, las ecuaciones y la simbolización.

3. ¿Cómo se incorpora la Historia de las Matemáticas en el curso?

La incorporación de la HM se puede dar en tres perspectivas o modos: como una alusión, como una integración o para determinar la propuesta curricular. La alusión a la HM se refiere al uso de la HM para presentar anécdotas, hechos, fechas, épocas de interés, obras de matemáticos, ejemplos de problemas matemáticos provenientes de la historia o estudio de estrategias utilizadas para resolver ciertos problemas, bien para introducir un tema o para motivar su estudio. Por su parte, la integración de la HM tiene que ver con la enseñanza efectiva de las Matemáticas y de la HM a través de la HM, el análisis eficiente de los procesos cognitivos del aprendizaje y la comprensión, mediado por la Historia y, la enseñanza de las Matemáticas que incluye su Historia como parte consustancial de las Matemáticas. Finalmente la determinación de la enseñanza a partir de la HM corresponde al uso de la HM de una manera profunda, la HM sustenta o fundamenta las acciones didácticas que se realizan en el aula o la organización curricular en general.

En el curso EAAA se halló que aparece de las tres formas.

3.1. La alusión a la HM

En el curso se considera fundamental dotar a los maestros en formación de respuestas a preguntas como: ¿qué es Aritmética o qué es Álgebra?, ¿cuáles son los objetos de estudio de estas ramas de las Matemáticas?, ¿se han transformado tales objetos a lo largo de la historia?, y ¿tiene la Aritmética y el Álgebra objetos relacionados o son estos independientes? La racionalidad de esta consideración es simple: al enseñar se debe tener claro qué se enseña, con el fin de asumir posturas conscientes y críticas frente a propuestas curriculares explícitas, tanto en la política educativa como en los libros de texto que impactan la enseñanza de las Matemáticas.

En relación con esta forma intervención, en el curso EAAA se alude a anécdotas, hechos históricos, obras o problemas famosos constitutivos de la hAA, que permiten un ámbito de evidencias sobre las relaciones entre estas dos ramas de las Matemáticas y con otras (como lo es la Geometría).

3.2. Integración de la HM

La integración de la HM se hace explícita en la identificación de una secuencia curricular para la enseñanza de la Aritmética y el Álgebra. Después de que los maestros en formación han identificado qué objetos son propios de la Aritmética y el Álgebra, estos se organizan en una línea de tiempo desde la HM y se compara con la secuencia curricular propuesta por los Lineamientos (Colombia – Ministerio de Educación Nacional, 1998) y los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (Colombia – Ministerio de Educación Nacional, 2006), con el ánimo de reconocer si la secuencia de enseñanza de estos objetos se corresponde con su historicidad. En este sentido, por ejemplo, se procura reconocer si la secuencia típica en la enseñanza de los sistemas numéricos en la vida escolar (N, Z, Q, R, C) se corresponde con la secuencia constructiva históricamente, o si la secuencia de enseñanza de las ecuaciones las involucra como herramienta y como objeto de estudio en sí mismas, tal como se dio históricamente.

Asimismo la integración de la HM se hace explícita para el reconocimiento de representaciones de los diferentes tipos de números (naturales, enteros, racionales, irracionales y reales). Está claro que uno de los aspectos que componen el sentido numérico es la comprensión de distintas representaciones de los números; en esta dirección y buscando que los maestros en formación estén dotados de diversas representaciones de los números para disponer de opciones para llevar al aula, y que sean conscientes de ellas, la HM se utiliza como medio para que los maestros en formación reconozcan representaciones relacionadas con distintos sistemas numéricos. Por ejemplo, para los números irracionales históricamente aparecen las representaciones radicales, los segmentos inconmensurables, la representación decimal infinita no periódica, las fracciones continuas infinitas, las series, entre otras. Más allá de reconocer tales representaciones, la idea en el curso EAAA es que se destaquen ventajas y desventajas de estas al ser llevadas al aula de la Educación Básica o Media y que se construyan justificaciones acerca del porqué aparecen o no en los textos escolares.

3.3. La determinación de la enseñanza a partir de la HM

Esta determinación de la enseñanza proveniente de la HM es evidenciada en la configuración del orden temático en parte del curso EAAA a través de la HM. En las más recientes versiones del curso EAAA se ha planteado un orden temático en el abordaje de elementos propios de la enseñanza y el aprendizaje de sistemas numéricos atiende al orden histórico. En este sentido, se estudian las representaciones, los posibles errores cometidos por los estudiantes y reportados en investigaciones, así como posibles interpretaciones y modelos de enseñanza, cuando estos existen, de los números naturales, los números racionales, los números enteros y los números reales.

4. Ejemplos de tareas específicas

Algunas de las consignas de las tareas –que incorporan elementos o tratamientos de la hAA– propuestos a los maestros en formación en el curso EAAA se reportan en cada una de las tablas siguientes.

La tarea 1 expuesta en la Tabla 3 se propone con posterioridad a un trabajo que se hace inicialmente con los maestros en formación donde se busca que asuman una postura acerca de lo que consideran es Aritmética y Álgebra a partir de sus experiencias como estudiantes y desde el estudio de documentos curriculares (Lineamientos curriculares de Matemáticas, Estándares básicos de competencias matemáticas, Pruebas SABER colombianas, Principios y Estándares propuestos por el National Council of Teacher of Mathematics, Pruebas PISA y libros de texto de circulación nacional); con base en esa primera idea se espera que los maestros en formación se acerquen a la hAA de una manera argumentada eligiendo sucesos que consideren cruciales para la Aritmética y el Álgebra. La elección del hecho incluye la ubicación de un personaje destacado (se les indica a los maestros en formación que para uno de los hitos debe estar como personaje una mujer, esto para modificar un poco la idea de que en la HM solo hay presencia masculina), así como la época (el objetivo con esto es ubicarlos en una línea de tiempo y aportar a la comprensión de

que los sucesos matemáticos no se dan al margen del contexto histórico sino que son fruto de diversas situaciones políticas, culturales y sociales, entre otras) y los obstáculos que se dieron al constituirse tal suceso (con el fin de responder a si ese obstáculo podría verse reflejado en la enseñanza o el aprendizaje de la Aritmética o el Álgebra en la vida escolar).

Tarea 1
<p>Escribir en un párrafo de no más de 10 renglones qué es Aritmética (hombres) o qué es Álgebra (mujeres), con base en la revisión curricular que se ha hecho sobre la Aritmética y el Álgebra desde Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003), Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006).</p> <p>A partir de la idea anterior, seleccionar tres hitos históricos (sucesos cruciales, hechos importantes) de la Aritmética o del Álgebra, según corresponda.</p> <p>Para cada hito, presentar; además del hecho:</p> <ol style="list-style-type: none"> i. Personaje(s) involucrado(s) (buscar, en lo posible, que alguno de los personajes elegidos, para algún hito, sea una mujer). ii. Época. iii. Obstáculo(s) que se dio(dieron) en la constitución de tal hecho histórico e indicar si este(os) puede(n) verse reflejado(s) en la enseñanza o el aprendizaje de la Aritmética o el Álgebra. <p>Tales hitos deben ser presentados en un octavo de cartulina (papel periódico, kraft,...) aludiendo a los elementos indicados. Y además deben ser presentados, en un texto, posterior al párrafo inicial indicado en el numeral 1, de manera tal que se tenga clara el porqué de la elección. (No olvidar incluir bibliografía).</p>

Tabla 3. Tarea 1. Historicidad Aritmética y Álgebra

Esta tarea resulta retadora para los maestros en formación, pero también enriquecedora cuando se hace su puesta en común, pues se amplía la visión sobre la Aritmética y el Álgebra, se establecen nuevas relaciones entre objetos matemáticos, aparecen otros objetos que no habían sido considerados como importantes desde la revisión curricular (en particular lo que corresponde a la objetivación), se identifican concepciones, se hace conciencia sobre la importancia del contexto social en la HM y de las posibles relaciones entre obstáculos epistemológicos y obstáculos de aprendizaje.

Después de la discusión de la tarea se hace una línea de tiempo para establecer relaciones y diferencias entre la secuencia curricular en la escuela y la historia de la constitución de los objetos algebraicos y aritméticos en la hAA, con el ánimo de identificar ventajas y desventajas de una u otra secuencia y construir posturas como futuros docentes de Matemáticas en la construcción de currículo escolar.



Figura 1. Foto de los carteles elaborados por maestros en formación resultado de la Tarea 1.
 Fuente: Archivo de la formadora (2011).

La tarea 2, detallada en la tabla 4 tiene como objetivo principal aportar al conocimiento del maestro en formación inicial en relación con su sentido numérico identificando distintas representaciones para los conjuntos numéricos enseñados usualmente en la escuela, así como cuestionarlos acerca del porqué algunas representaciones no aparecen en los libros de textos consultados y sus ventajas o desventajas al incluirlas de manera tal que en el momento de su práctica pedagógica acudan a tales saberes y reflexiones.

Algunas de las representaciones, por ejemplo, que se reconocen en la historia y no en los libros de texto son las fracciones continuas y las series para los números irracionales, algunas representaciones con radicales o geométricas (como la de Wallis) para los números imaginarios, configuraciones puntuales para los números naturales y algunas representaciones para los números negativos con varillas o sincopadas. En general los maestros en formación consideran que si bien en los libros de texto se utilizan distintas representaciones para ciertos números, casi siempre aparecen las mismas en los libros, también observan que hay presencia de muchas imágenes en los libros de primaria (fotos de objetos reales y ábacos para los números naturales por ejemplo) que usualmente no son combinadas en el aula con los objetos reales en sí de manera que aporten a la manipulación; además, consideran que hace falta enriquecer el abordaje de los conceptos con otras representaciones tanto desde la misma HM como desde la Didáctica de las Matemáticas (regletas de Cuisenaire, bloques de Dienes o tarjetas de Montessori para los números naturales) así como mayor alusión a representaciones utilizando software especializado (v.g. Geogebra), que ayudan a la comprensión de los estudiantes.

Tarea 2	
Según el sistema numérico elegido (Números Naturales, Números Enteros [énfasis en los números enteros negativos], Números Racionales positivos, Números Reales [énfasis en los números irracionales], Números Complejos [énfasis en los números imaginarios]):	
i.	Desde documentos de Historia de las Matemáticas [HM], identificar tipos de representaciones (desde los tipos ya estudiados, por ejemplo: Simbólicos, verbales, gráficos y manipulativos) con ejemplos específicos, fechas y culturas o personajes asociados.
ii.	Elegir libros de texto (en lo posible de una misma serie editorial para el caso en el que se trate el sistema numérico en distintos años escolares) donde se trate el sistema numérico e identificar allí tipos de representaciones con ejemplos específicos.
Indicar cuáles representaciones de las identificadas en la HM no aparecen en los textos escolares y viceversa e indicar sus ventajas y desventajas (para la enseñanza o el aprendizaje).	

Tabla 4. Tarea 2. Representaciones y Sistemas Numéricos

Desde la experiencia de los maestros en formación, usualmente la introducción al estudio de las ecuaciones se da través de ejercicios de manipulación y posteriormente aparecen los problemas, por lo cual este se constituye en el modelo a seguir. Con la tarea 3 presentada en el Tabla 5 se busca controvertir esta idea desde el estudio de la historia de las ecuaciones reconociendo que estas surgen desde la resolución de problemas, lo cual se logra de manera satisfactoria ya que además de ser evidente en los documentos históricos, varios libros de texto inician con la solución a un problema.

Tarea 3	
Elegir un libro de texto donde se introduzca el estudio de las ecuaciones, describir cómo se hace tal introducción y qué modelos de enseñanza de las ecuaciones se privilegian en el texto. Establecer si hay alguna relación en tal introducción con la Historia de las Ecuaciones (por ejemplo desde lo presentado por Katz (2007) o por Triana y Manrique (2013)) y producir algunos comentarios al respecto.	
Katz, V. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. <i>Educational Studies in Mathematics</i> , 66(2), 185-201.	
Triana, J. y Manrique, J. (2013) El papel de la Historia del Álgebra en un curso de didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C. (pp.40-50).	

Tabla 5. Tarea 3. Ecuaciones y modelos de su enseñanza

5. Conclusiones

La hAA estudiada en el curso EAAA procede de fuentes documentales que no necesariamente contienen información histórica especializada o profunda; no obstante esta condición es suficiente para los propósitos formativos del espacio académico en relación con el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático [CDCM]. Tales fuentes contienen aproximaciones variadas a la HM en las que se entrecruza información sobre los matemáticos, los contextos, los objetos matemáticos, fragmentos de obras matemáticas, problemas matemáticos y sus soluciones, aproximaciones de culturas hegemónicas y no hegemónicas, resultados matemáticos exitosos y no trascendentales, formas de pensamiento matemático, procesos algebraicos, etc. Cada una de estas aproximaciones parece incorporarse a través de las tareas propuestas por la profesora del curso, más que como un fin de

aprendizaje mismo en herramienta para favorecer aspectos del CDCM de los futuros profesores.

Definitivamente el ambiente académico de la Universidad Pedagógica Nacional y de su Licenciatura en Matemáticas constituye el escenario que propicia que las preocupaciones e intenciones (personales e institucionales) por integrar la HM al conocimiento del profesor de Matemáticas tenga un lugar, adicional a un curso de HM. Desde una perspectiva analítica se puede entonces reconocer que los discursos meta-matemáticos (como el precedente de la Didáctica de las Matemáticas o de la HM) tienen un lugar de encuentro en cursos como el de EAAA y se procuran poner al servicio de la formación de conocimiento y competencias de los futuros profesores de Matemáticas.

Un papel importante asignado a la hAA en el espacio EAAA tiene que ver con la potencialidad adjudicada a la HM de ampliar la visión de la Matemática, de sus disciplinas, de los objetos matemáticos (conceptos, procesos, procedimientos, heurísticas, entre otros), los contextos científicos de surgimiento e intervención de las Matemáticas, las vicisitudes humanas que acompañan la construcción de una obra matemáticas, etc. Este papel supera la visión utilitaria de la HM como una panacea para los problemas educativos de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas o de la consideración de la HM como discurso motivacional o discurso de contexto de los temas de Matemáticas que se estudian en la Educación Básica o Media.

Es preciso destacar que si bien no se reconoce una variedad de apuestas metodológicas para ubicar la HM en el curso EAAA, sí se advierte una constante y es la preocupación de que la hAA se convierta en un conocimiento funcional para el profesor de Matemáticas, por ejemplo constituyéndose en un discurso que permita comparar con aspectos curriculares, con aspectos cognitivos e incluso con aspectos epistémicos.

Aunque pueda parecer una verdad de Perogrullo, está claro que incluir una perspectiva histórica para favorecer el CDCM de los futuros profesores de Matemáticas implica y requiere necesariamente tanto una formación en HM, por parte del formador, como una convicción de que esta puede integrarse en un espacio de formación, en donde el discurso matemático y el didáctico interactúan. Si bien la formación del formador de profesores de Matemáticas no fue objeto de estudio en la investigación, la observación y el análisis de algunos videos tomados lleva a reconocer que la tarea de incorporar la HM al CDCM es altamente exigente y requiere que el formador tenga no solo un conocimiento histórico sobre los asuntos de la Aritmética y el Álgebra, sino que tenga la competencia de hacer diseños curriculares en donde el mismo se ponga en juego a favor del aprendizaje y desarrollo del CDCM de sus estudiantes, futuros profesores de Matemáticas. Tal proceso implica necesariamente disponer de un conocimiento sobre el CDCM y al menos unas intuiciones de cómo favorecerlo.

Bibliografía

- Belisario, A., & González, F. E. (2012). Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, [En línea] 31, 161-182. Recuperado el

16 de marzo de 2014, de

http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/31/archivo_16_de_volumen_31.pdf

- Colombia - Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Colombia - Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN.
- Gálvez, A., Maldonado, A. (2012). *El papel de la Historia de la Aritmética en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas*. [Tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., Colombia.
- Grattan-Guinness, I. (2004). The mathematics of the past: Distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica*, 31(2), 163–185.
- Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista Virtual Educyt*, [En línea] 2(2), 136-148. Recuperado el 8 de noviembre de 2012 de <http://revistalenguaje.univalle.edu.co/index.php/educyt/article/view/1826/1759>
- Jankvist, U. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.
- Mora, L. (2009). *Documento de avance de propuesta para orientar el diseño del espacio académico: Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra*. [Documento interno de trabajo] Bogotá, D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.
- Mora, L. y Guacaneme, E. (2014). La Historia de las Matemáticas como organizador curricular a favor del Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático. Ponencia presentada en el *XII Coloquio Regional de Matemáticas y II Simposio de Estadística*, San Juan de Pasto (Nariño-Colombia) 21 a 23 de mayo de 2014.
- Triana, J., Manrique, J. F. (2013). *El papel de la Historia del Álgebra en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas*. [Tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., Colombia.

Mora Mendieta Lyda Constanza: **Profesora en la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. (Colombia). Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Magíster en Docencia de la Matemática de la misma universidad, y Experta Universitaria en Diagnóstico y Educación de Alumnos con Alta Capacidad de la UNED.**
lmendieta@pedagogica.edu.co

Guacaneme Suárez Édgar Alberto: **Profesor en la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. (Colombia). Licenciado en Ciencias de la Educación Especialidad Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, y Magíster en Educación con Énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle.** guacaneme@pedagogica.edu.co

Jiménez Gómez William Alfredo: **Profesor en la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. (Colombia). Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Magister en Docencia de la Matemática de la misma universidad.** wjimenez@pedagogica.edu.co

Lyda Constanza Mora Mendieta.

lmendieta@pedagogica.edu.co

Calle 72 11-86 Oficina B-316. Bogotá, D.C. – Colombia

+57 1 5941894 Ext. 254