UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 176-191

La comprensión matemática de las funciones en interdisciplinariedad con la Física a través de problemas de la vida práctica

Lissette Rodríguez Rivero, Yudelkys Ponce Valdés, Andel Pérez González

Fecha de recepción: 14/03/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	La presente investigación tiene el objetivo de aplicar una propuesta de ejercicios interdisciplinarios que potencien la comprensión matemática de las funciones, pasando por un proceso de transferencia entre representaciones y con un vínculo estrecho con la vida práctica. Para su realización se emplearon métodos de investigación como: el inductivo – deductivo, el analítico – sintético y la observación pedagógica, que favorecieron la fundamentación y conformación de la propuesta; así como la elaboración de los ejercicios. Después de aplicada la misma se comprobó un mayor desempeño por parte de los estudiantes en la manipulación y comunicación de resultados relacionados con el concepto de función. **Palabras clave:** Funciones, interdisciplinariedad, Física.
Abstract	The objective of this investigation is to apply a proposal of interdisciplinary exercises that potentiate the mathematical comprehension of functions, through a process of transference between representations and with a close link to practical life. The methods used were the inductive-deductive, the analytic-synthetic and the pedagogical observation, which favored the foundation and conformation of the proposal, and the elaboration of the exercises. After having applied this proposal, a better performance on the part of the students in the manipulation and communication of results related with the concept of function was proven. **Keywords**: Functions, interdisciplinary, Physics.
Resumo	A investigação presente tem o objetivo de aplicar uma proposta de exercícios interdisciplinares que possibilitem a compreensão matemática das funções, passando por um processo de transferência entre representações e com um laço estreito com a vida prática. Para a realização destes, se utilizaram métodos de investigação como: o indutivo - dedutivo, o analítico - sintético e a observação pedagógica que favoreceram a fundamentação e conformação da proposta; como também a elaboração dos exercícios. Depois de ter aplicado a mesma, se verificou um maior desempenho por parte dos estudantes na manipulação e comunicação de resultados relacionados com o conceito de função. **Palavras-chave**:Função, interdisciplinaridade, Física.

1. Introducción

En la escuela cubana la línea directriz "Patrones y funciones" es la que rige el aprendizaje de las funciones desde la secundaria hasta el nivel Medio Superior, y es posteriormente en los estudios universitarios que disciplinas como Análisis Matemático, continúan profundizando esos estudios.

Estos contenidos han tenido dificultades históricamente. Durante la experiencia en las prácticas laborales, primero en la secundaria y posteriormente en la enseñanza media superior, se detectó un trabajo deficitario con respecto a los mismos. En la enseñanza media superior se corrobora que las funciones son las que más dificultades presentan en el momento de comprobar el aprendizaje de la Matemática y los estudiantes las identifican como un obstáculo difícil de vencer.

Aunque las causas que ocasionan estos problemas son diversas y tienen carácter multifactorial, en el centro de ellas y de forma relevante se manifiesta, a criterio de los autores, la falta de un accionar didáctico que conduzca de forma planificada y coherente hacia el desarrollo de la comprensión matemática, como objetivo básico en el proceso de enseñanza - aprendizaje de este contenido.

Según Batanero "la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto" (Batanero, 2005, p.257). Otros autores expresan: "diremos que un alumno comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas, es decir, la capacidad se traduce en la realización de prácticas que son evaluables públicamente" (Contreras y Ordóñez, 2006, p.69). El criterio que se asume es en función de que se tenga en cuenta ambas direcciones, porque desde la comprensión, el alumno debe ser capaz de integrar los elementos que forman un concepto, de seccionarlos para su análisis y de relacionar el concepto con situaciones intra - matemáticas, con otras ciencias y con la vida práctica. Dentro del proceso de comprensión de un determinado objeto matemático el estudiante debe ser capaz de manipularlo en toda su extensión. Y de qué manera se puede valorar el nivel de comprensión que posee un estudiante si no es por medio de prácticas evaluables.

Las prácticas que se presentan, a través de la ejecución por el estudiante de ejercicios didácticos, van dirigidas en dos sentidos que se combinan en uno: el trabajo con las diferentes representaciones del concepto de función y la vinculación de las funciones a la Física como modelos de fenómenos que dicha ciencia estudia. Se elaboraron ejercicios para el tratamiento interdisciplinario de este contenido y a través de dichos ejercicios se transfiere entre representaciones hasta llegar al modelo físico, o en sentido contrario. Los mismos son realizados a lápiz y papel, con la ayuda de software matemático (en este caso Derive 5.1) o mediante una combinación de ambos medios.

El objetivo del presente trabajo es aplicar una propuesta de ejercicios interdisciplinarios que potencien la comprensión matemática de los contenidos relacionados con las funciones.

Para su realización se seleccionaron los nueve estudiantes que cursan el segundo año de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Física en la

Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”. De ellos 3 son hembras y 6 varones; sus edades están comprendidas entre los 18 y 20 años. Antes de aplicar la propuesta, según los cortes evaluativos trimestrales, cinco estaban evaluados de bien (B), tres de regular (R) y uno de mal (M).

En esta investigación se aplicaron varios métodos como:

- La observación pedagógica en función de detectar las regularidades que afectan el trabajo con funciones, así como determinar posteriormente la influencia que produjo la aplicación de las tareas con carácter interdisciplinario en el aprendizaje de estos contenidos.

- El inductivo – deductivo, que permitió focalizar las principales dificultades y carencias en el accionar didáctico del proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones, lo cual dio la idea inicial de cómo resolver este problema.

- El analítico – sintético, que propició el estudio, a partir una búsqueda bibliográfica actualizada, de temas como la interdisciplinariedad y la transferencia entre representaciones, particularmente de funciones; para posteriormente extraer fundamentos teóricos que sirvieran de base a la propuesta.

Lo novedoso de este trabajo consiste en que crea mejores condiciones para el estudio de las funciones, ofreciendo ejercicios relacionados con fenómenos de la vida práctica. Se apoya en los conocimientos que los estudiantes poseen de la Física, contribuye a la sistematización de esos contenidos y además, desarrolla habilidades de trabajo con el software matemático Derive 5.1. De esta forma se favorecen las formas de manipulación y representación de las funciones. Además, con este nuevo enfoque, los alumnos fijan mucho mejor las propiedades de las funciones y sus diferentes representaciones, y sus aplicaciones sirven de motivación y de incentivo investigativo. Asimismo, se ofrece un correcto enfoque de situaciones relacionadas con la ciencia, la tecnología y el medioambiente.

2. Principales dificultades detectadas en la comprensión del concepto de Función

El análisis del proceso de enseñanza - aprendizaje de las funciones durante varios años, las visitas frecuentes a clases, y la preparación y revisión de exámenes, han permitido confirmar las serias dificultades que históricamente se presentan en la comprensión de esta temática en la:

1. Relación entre el concepto y las representaciones de este, identificando como uno ambos términos.
2. Determinación de las propiedades de las funciones, pues:

- Presentan dificultades al determinar el dominio de la función.
- El intervalo de la imagen en ocasiones no se identifica adecuadamente.
- Presentan dificultades al calcular el cero en algunos tipos de funciones.
- No contextualizan el dominio y la imagen en los problemas de aplicación.

3. Interpretación del gráfico, pues:

- No identifican en ocasiones el intervalo donde el gráfico es positivo o negativo.
- No reconocen la representación del dominio y de la imagen como sub intervalos de los ejes coordenados.
- No identifican la monotonía como tendencia.
- No reconocen el cambio de las propiedades al cambiar algunos parámetros de las funciones.

A partir de estas dificultades detectadas, se propone un trabajo que relaciona la **transferencia entre representaciones**, como ayuda a la **comprensión matemática,** en un **trabajo interdisciplinario** que propicia al estudiante llegar a una aplicación práctica del contenido recibido en las clases de Matemática. Todo ello, materializado a partir de la aplicación de tareas que contengan un balance adecuado de este accionar didáctico, haciendo **uso de la tecnología**.

3. Definición de Función. Representación de una Función

Existen en la literatura innumerables definiciones de función: Barnett (2003); Coret (1990); List (2002); Potápov (1986); Rodríguez (1988); Sánchez (2004); Stewart (2006), punto de partida para el estudio de las funciones en diferentes niveles de enseñanza y tipos de materias dentro de los mismos. En el presente trabajo asumimos la definición de función dada por Mederos y González (2005): Sean *A* y *B* conjuntos cualesquiera, se llama función de *A* en *B*, se escribe $f : A \to B$, a una terna ordenada (*A, B, f*) formada por el conjunto *A* (dominio de la función) el conjunto *B* (codominio de la función) y un conjunto de pares ordenados *f* (grafo de la función) que cumple las propiedades siguientes:

1. Si $(x;y) \in f \Rightarrow x \in A$ y $y \in B$
2. $\forall x \in A \; \exists y \in B : (x;y) \in f$
3. Sí $(x;y_1) \in f$ y $(x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

<u>Representación de una función:</u> Sea $f : A \to B$. Se considera representación a una terna de representaciones (α,β,γ) en la cual α es la representación del dominio, β es la representación del codominio y γ es la representación del grafo.

Una de las primeras representaciones de una función fue mediante *tablas* que ponen en relación una columna con otra(s); una(s) de valores independientes y otra de valores que son calculados a partir de los anteriores mediante una fórmula u observados con respecto a los primeros valores por una determinada relación.

Álvarez (2008, p.108) y Ministerio de Educación (2007, p.127), por ejemplo, han representado funciones mediante diagramas de *Venn*, donde a los conjuntos de partida y llegada se les ilustra con algunos elementos que pertenecen a ellos y mediante una flecha se establece la correspondencia entre ambos, indicando salida y llegada, dominio y codominio, respectivamente, con el uso de la saeta.

Otra representación muy conocida es la *analítica* o ecuación que describe a la función. En este caso tendremos una expresión que involucre mediante operaciones o relaciones matemáticas la variable independiente (frecuentemente denominada x) y la variable dependiente (denominada $y = f(x)$).

La representación cartesiana o *gráfico* de la función corresponde a la ubicación en las coordenadas cartesianas de los puntos representados por los pares ordenados que pertenecen a la función y que tienen la forma $(x;f(x))$. Esta representación constituye la principal forma de mostrar la función a los estudiantes, sobre todo con la ayuda de los asistentes matemáticos.

4. Comprensión matemática a través de la transferencia entre representaciones hasta llegar a la interdisciplinariedad

La comprensión matemática no se trata sólo de saber en qué medida el estudiante domina ciertos conocimientos o habilidades básicas de acuerdo con las exigencias del programa. Se trata de establecer qué conoce, cómo lo conoce y para qué lo utiliza; de averiguar lo que hace para resolver una tarea y por qué lo hace. En esta dirección se debe mover el pensamiento y la conducta del estudiante de una representación a otra y finalmente a la realidad objetiva.

Según Dreyfus (1991, p.39), criterio que comparten los autores: "Podemos observar, pues, que hay cuatro fases en los procesos de aprendizaje:

- Utilizar una única representación
- Utilizar paralelamente varias representaciones
- Relacionar representaciones paralelas
- Integrar las representaciones y pasar de una a otra con facilidad."

Al aplicar un concepto a una situación dada, se recurre a las representaciones concretas que en la posición asumida por los autores son situaciones de la Física representadas en fenómenos estudiados sobre esta.

Ocurre a menudo que como los objetos matemáticos pueden ser identificados por cualquiera de sus representaciones, al principio los estudiantes son incapaces de discriminar el contenido de la representación y el objeto representado. Es decir, para ellos los objetos cambian cuando cambia la representación, entonces ¿cómo puede un estudiante aprender a reconocer un objeto matemático a través de sus posibles representaciones?

Según algunos autores, entre los que destaca Duval (2000), la respuesta está en realizar procesamientos dentro de un mismo tipo de representación y realizar conversión o transferencia entre representaciones diferentes, que en este caso llegará hasta la búsqueda de modelos físicos que sean representables por una determinada función. Aquí es donde entra a jugar su papel un enfoque interdisciplinario de la enseñanza de la ciencia, en este caso la interdisciplinariedad innata entre la Matemática y la Física.

Si el proceso de transitar por diferentes representaciones, utilizando la transferencia entre ellas, se acompaña además del uso de varios soportes (lápiz y papel o soporte digital) la comprensión se logra de una manera más completa. Los estudiantes de estos tiempos nacieron con la tecnología y con sólo ofrecerles una introducción de cómo se manipula un determinado software logran ser muy creativos en su uso. En el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones está presente, desde sus inicios, la habilidad de transferir entre las representaciones analítica y gráfica. Esta habilidad se desarrolla inicialmente en el cuaderno y posteriormente se pasa al uso de asistentes matemáticos.

4.1. Derive 5.1, asistente matemático en el proceso de transferencia entre representaciones

Referido al uso de asistentes matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el modelo del profesional de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Física declara en sus objetivos:

"Enseñar a formular y resolver problemas (…) donde se manifiesten las relaciones ciencia-tecnología-sociedad-ambiente, utilizando contenidos de la física y la matemática, (…) y el aprovechamiento de las tecnologías de la información y las comunicaciones, que promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, sentimientos, actitudes y valores acordes con los principios de nuestra sociedad" (CNC, 2015, p. 8).

Es por ello que es tarea permanente desde las disciplinas del currículo dar cumplimiento a ese objetivo, y el presente trabajo es una muestra de ello. En el caso de la propuesta se utilizó Derive 5.1 por ser un software relativamente pequeño, fácil de manipular y con el lenguaje propio de la matemática muy cercano al trabajo con funciones. Además, de cursos introductorios los estudiantes estaban familiarizados con el entorno del mismo. Por ello fue necesario solamente introducirles el trabajo con funciones a través de tutoriales comentados, elaborados en el propio asistente, que ilustran ejercicios similares a los que después ellos ejecutarían en clases.

El Derive 5.1 en algunos casos se utiliza a modo de comprobación, como por ejemplo, en la resolución de ecuaciones o en ejercicios de realizar transferencia entre representaciones a lápiz y papel en los cuadernos. En otros, se utiliza como una herramienta rápida para transferir de la representación analítica a la gráfica, cuando se presenta esta habilidad en ejercicios de aplicación, donde el objetivo a desarrollar o evaluar no es la transferencia entre representaciones.

5. Interdisciplinariedad

En este trabajo se asume el concepto de Álvarez (2001, 2004), es decir que la interdisciplinariedad se entiende como un atributo del método que permite dirigir el proceso de resolución de problemas complejos de la realidad a partir de formas de pensar y actitudes sui generis asociadas a la necesidad de comunicarse, cotejar y evaluar aportaciones, integrar datos, plantear interrogantes, determinar lo necesario de lo superfluo, buscar marcos integradores, interactuar con hechos, validar supuestos y extraer conclusiones.

Como consecuencia, la visión interdisciplinaria se vuelve un factor fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que lo enriquece con múltiples beneficios que apuntan a la formación en el saber, hacer y ser de los estudiantes.

En otras palabras, la enseñanza y la investigación interdisciplinar implican un proceso de identificación, evaluación, resolución, creación, construcción y generación. Es decir, *identificar* el problema sobre el cual trabajar, *evaluar* las suposiciones y terminología del contexto del problema, *resolver* los conflictos entre disciplinas, *crear* un campo teórico - práctico común, *construir* una nueva comprensión del problema, *generar* un modelo de esta nueva perspectiva, y, por último, ponerlo en *práctica* para ver si soluciona problemas (Newell, 2001).

La interdisciplinariedad eleva el aprendizaje significativo en los estudiantes, ya que permite abordar los conocimientos científicos de una manera más global, permitiéndole entenderlos de una manera más amplia y completa. Entre las ventajas de la aplicación del enfoque interdisciplinario en el aula se destacan:

- Considerar y valorar puntos de vistas diferentes de un mismo contenido, lo que contribuyen a la formación de valores como la colaboración, comprensión, empatía y respeto.

- Tomar consciencia de los límites conceptuales y epistemológicos de las diferentes disciplinas, alimentando el espíritu crítico y aumentando la sensibilidad ante las posiciones que de otra forma no se habrían considerado.

- Minimizar la repetición de contenidos.

- Entender el rol de la ciencia y del conocimiento científico en la solución de problemas básicos de la humanidad y la sociedad (Grisolía, 2008).

Martínez, Perera y Álvarez (2011, p.17) expresan que “Existe un consenso en destacar un conjunto de problemas que a nuestro juicio requieren tener como respuesta la interdisciplinariedad”. Entre varios problemas que se señalan al respecto se aprecian:

- Presentación del contenido por estancos, de manera fragmentada y en muchos casos descontextualizado de la realidad en que vive el alumno.

- Dificultades en el alumnado para transferir lo aprendido de un contexto a otro.

En este caso ¿qué importancia tendrá para el estudiante llegar a comprender las funciones si no tienen ningún vínculo con la realidad que le rodea?; ¿para qué sirve un conocimiento vacío?, ya sea por el desconocimiento o por la no vinculación con otras ciencias. Es la realidad representada en un problema físico la representación más cercana de función a la realidad, al mundo que rodea a ese estudiante.

6. Tratamiento al problema. Propuesta de ejercicios

La resolución de problemas, se convierte en una oportunidad para construir, generar y transferir conocimientos científicos, yendo mucho más allá de un ejercicio en el cual solo se aplican formalizaciones matemáticas (Concari y Giorgi, 2000). Así la resolución de problemas es una estrategia de enseñanza-aprendizaje, que beneficia el aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal de los estudiantes, y permite establecer un puente entre la cotidianidad y lo visto en el aula. En el mismo sentido, estimula la capacidad de crear, inventar, razonar y analizar situaciones para luego resolverlas. Por otra parte, es una estrategia globalizadora en sí misma, ya que puede ser trabajada en todas las asignaturas, y además el tópico que se plantea en cada problema puede referirse a cualquier contenido o disciplina. (Pérez y Ramírez, 2011).

Es por ello que para obtener buenos resultados, relacionados con la comprensión, al aplicar problemas que contemplen funciones los docentes deben planificar ejercicios que logren un adecuado accionar didáctico en el tratamiento de las mismas (Rodríguez, 2011). En la actualidad no se concibe un proceso de enseñanza-aprendizaje sin la presencia de las tecnologías de la información y las comunicaciones. Esto pasó de ser una novedad a ser una necesidad en la formación de un profesional a la altura de los tiempos futuros. El uso de asistentes matemáticos, Derive 5.1 en el caso de esta propuesta, no sólo contribuye a hacer atractivo el problema propuesto, motivando a los estudiantes que casi siempre se sienten atraídos por la tecnología, sino contribuye además a obtener resultados fiables y de fácil manipulación a la hora de rendir una respuesta.

Partiendo de los presupuestos teóricos analizados, sólo resta proponer un conjunto de ejercicios que abordan una posible solución al problema planteado y que han sido diseñados para mejorar la comprensión del concepto función. Se potencia la transferencia entre representaciones y el uso de las funciones como modelos matemáticos de fenómenos físicos; imprimen la necesaria interdisciplinariedad que ilustra una de las posibles aplicaciones de las funciones en general; y contribuye a elevar el dominio que los estudiantes poseen en el uso de las tecnologías utilizándola en función de un aprendizaje completo y novedoso.

Entonces, se pueden mostrar algunos ejemplos de ejercicios que se aplicaron a los estudiantes de segundo año de la carrera Matemática-Física, donde se imparten los contenidos que aparecen reflejados en los ejercicios.

Ejercicios:

Ejercicio 1. (Modificado a partir del original en Barnett (2003, p.164).). La ley de Hooke establece que la relación entre el alargamiento de un resorte y el peso *w* que causa el alargamiento es lineal. Un cuerpo de 5 kg estira un resorte 0,025 m mientras que cuando no hay peso el alargamiento es cero.

a) Encuentra una función lineal f: $s = f(w) = mw + b$ que represente esta relación.

b) Calcula el alargamiento para pesos de 7 kg y 15 kg, respectivamente.

c) ¿Qué tipo de función describe ese problema físico? ¿Cuál es la pendiente de *f*? ¿Qué tipo de proporcionalidad existe entre *s* y *w*?

d) Representa gráficamente *f* para 0 kg ≤ *w* ≤ 40 kg. Ten en cuenta para el eje “y” una escala adecuada. Utiliza Derive 5.1.

e) Elabora una función, a partir de la función anterior, que describa la dependencia del peso con respecto al alargamiento del resorte.

f) ¿Qué relación tendrá la gráfica de la función del inciso anterior con la gráfica de la función *s*?

Análisis de las respuestas de los estudiantes: En el ejercicio, los incisos a y b fueron realizados por la totalidad de los estudiantes. Hubo dificultades en el inciso c porque no identificaron correctamente la pendiente (tres estudiantes), incluso el estudiante con mayores dificultades desconocía su relación con la inclinación de la recta con respecto a la dirección positiva del eje “x”. Los que presentaron mayor habilidad en el trabajo con el asistente Derive 5.1 (cinco estudiantes) obtuvieron la gráfica correcta (Fig.1), otros (cuatro estudiantes) realizaban los comandos correctamente pero la visualización requería el trabajo indicado con la escala del eje “y” y no comprendieron la implicación de dicha sugerencia.

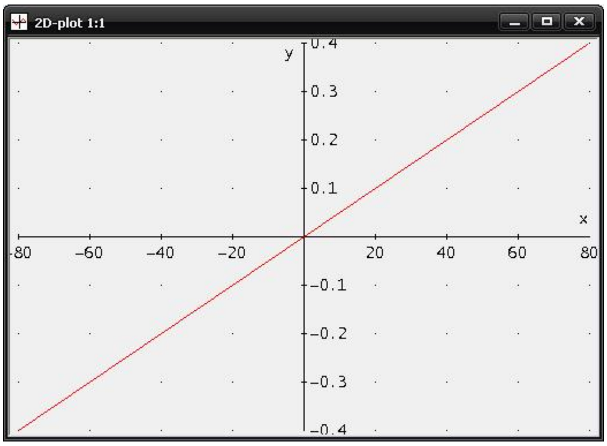

Figura 1. Respuesta Ejercicio 1, inciso d.

Fuente: Derive 5.1.

Ejercicio 2. Para altitudes de hasta 10 000 m la densidad de la atmósfera terrestre, en kg/m^3, es aproximadamente estimada por $D(h) = 1{,}225 - (1{,}12 \cdot 10^{-4})h + (3{,}24 \cdot 10^{-9})h^2$

a) ¿Cuál es el dominio de definición de la función expresada por la ecuación anterior? ¿Cuál es el dominio que impone el análisis del significado de la variable independiente?

b) ¿Cuál será la altura de un paracaidista en el momento que mide la densidad del aire y reporta 0,74 kg/m^3?

c) ¿Qué diferencia hay entre la densidad del aire a 1 000 m y a 10 000 m?

d) Representa gráficamente este comportamiento de la densidad del aire en dependencia de la altura. Utiliza Derive 5.1.

Análisis de las respuestas de los estudiantes: En el caso del presente ejercicio, sólo tres estudiantes lograron diferenciar que el dominio de la función matemática es el conjunto de los números Reales y de la misma función describiendo el problema físico es $D = \{h \in R / 0m \leq h \leq 10000m\}$. Como consecuencia de ello, en el inciso b estos mismos estudiantes no lograron descartar la respuesta que está fuera del dominio de definición de la función. El resto de los incisos, c y d, fueron respondidos correctamente por la totalidad de los estudiantes, siete de los estudiantes lograron realizar un trabajo adecuado con Derive 5.1 para obtener la gráfica correcta y además adecuada (Fig. 2).

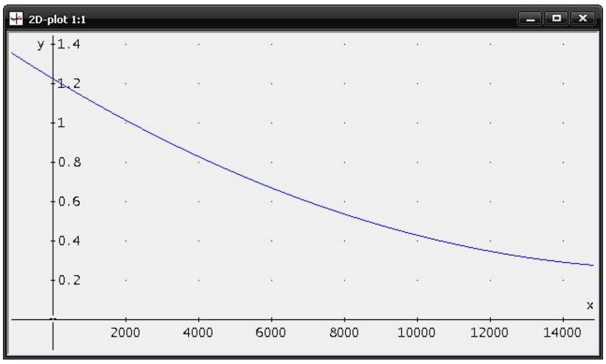

Figura 2. Respuesta Ejercicio 2, inciso d.

Fuente: Derive 5.1.

Ejercicio 3. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con masa inicial m_0 y una velocidad v se modela según la expresión: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, donde $c = 3 \cdot 10^5 m/s$.

a) De la expresión anterior, correspondiente a una función irracional, realiza un análisis de los valores admisibles para *v*.

b) Si fijamos la función para un objeto de masa 10 000 kg, ¿cómo queda la función $M(v)$?

c) Realiza un esbozo de la función anterior para $v \geq 0$. Compruebe el mismo utilizando Derive 5.1.

d) Discute con tu profesor de Física la opinión que puedas extraer del análisis del comportamiento de la función para valores cercanos a $c = 3 \cdot 10^5 m/s$.

Análisis de las respuestas de los estudiantes: En el caso del presente ejercicio, cuatro estudiantes llegaron a la respuesta correcta del inciso a, $-c < v < c$; resultado de analizar el argumento de la raíz. Prevaleció en los demás errores relacionados con la solución de inecuaciones fraccionarias y no con identificar el análisis pertinente al dominio de la función. Los incisos b y c (Fig.3) fueron respondidos satisfactoriamente por ocho estudiantes. Es importante destacar que para responder el inciso d todos fueron a consultar con su profesor de Física y un estudiante aportó además materiales interesantes consultados en internet, circulados al resto del grupo para su lectura.

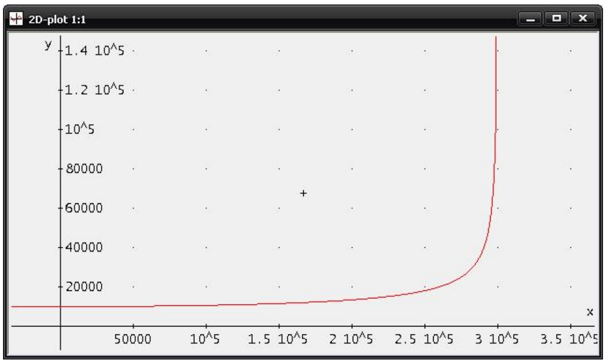

Figura 3. Respuesta Ejercicio 3, inciso c.

Fuente: Derive 5.1.

Ejercicio 4. (Modificado a partir del original en Stewart (2006, p.74).). Cuando se dispara el flash de una cámara, de inmediato las pilas empiezan a recargar el capacitor del flash, en el cual se almacena la carga eléctrica dada por: $Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)$. La capacidad máxima de carga es Q_o y t se mide en segundos.

a) ¿Qué capacidad tendrá, en relación a su capacidad máxima, a los 2seg de haber disparado el flash?

b) ¿Cuánto tarda en recargarse el capacitor hasta 90% de su capacidad?

c) Representa gráficamente el modelo para $0seg \leq t \leq 7seg$ y $Q_0 = 3V$. Utilice Derive 5.1.

d) Encuentra la inversa de esta función y explica su significado.

Análisis de las respuestas de los estudiantes: En este caso, teniendo en cuenta que ya los estudiantes comenzaron a apropiarse de herramientas de trabajo con funciones adquiridas en ejercicios anteriores, el desempeño de los mismos fue evaluado de excelente en el caso de seis estudiantes y tres de bien. El inciso que más dificultades presentó fue el d, no en el aspecto de formular la función inversa sino en encontrar el significado que para el problema físico poseía la misma.

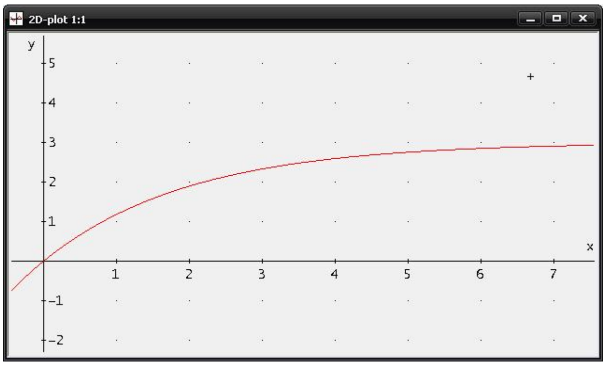

Figura 4. Respuesta Ejercicio 4, inciso c.

Fuente: Derive 5.1.

Ejercicio 5. (Modificado a partir del original en Palacio (2003, p.64).). A veces en investigaciones recurren a la fórmula $f(t) = Asen(bt + c) + d$ para simular las variaciones de temperatura durante el día, donde el tiempo *t* está expresado en horas, la temperatura *f*(*t*) en ºC y *t* = 0 corresponde a las 12 am. Supóngase que *f*(*t*) es decreciente a medianoche.

5.1. Calcula los valores a, b, c y d que se ajustan a la información y trace la gráfica de *f* para 0 ≤ *t* ≤ 24.

a) Cuando la temperatura máxima es de 10 ºC y la mínima 10 ºC, esta última a las 4 am.

b) Cuando la temperatura varía entre 10 ºC y 30 ºC y la temperatura media de 20 ºC se da por primera vez a las 9 am.

5.2. Analiza la función que modela dicho fenómeno en el inciso a) y diga en qué momento del día se alcanza la temperatura máxima. Investiga en qué latitudes y para qué época del año pudiera encontrarse este comportamiento de las temperaturas.

5.3. Analiza la función que modela dicho fenómeno en el inciso b) y diga a qué hora alcanza la temperatura mínima y a qué hora su temperatura máxima.

5.4. ¿Qué diferencia existe entre las imágenes de la función del inciso a) y del inciso b)? ¿Cómo es el dominio de ambas funciones?

<u>Análisis de las respuestas de los estudiantes:</u> En el ejercicio hubo que proporcionar niveles de ayuda para el inciso a, pero después de logrado el esbozo de ambas funciones, los análisis restantes fueron realizados con soltura por todos los estudiantes. Es interesante destacar que siete de los estudiantes recurrieron al uso de Derive 5.1 a modo de comprobación de los resultados.

Ejercicio 6. (Modificado a partir del original en Palacio (2003, p.71).). Se estima el espesor de la capa atmosférica de ozono con la fórmula siguiente: $\ln I_0 - \ln I = \mathrm{kxsec}\varphi$, en la cual I_0 es la longitud de onda de la luz solar antes de llegar a la atmósfera; *I* es la misma longitud de onda después de pasar a través de la capa de ozono de *x* centímetros de espesor; *k* es la constante de absorción de ozono para la longitud de onda, y *φ* es el ángulo agudo que forma la luz del sol con la vertical.

a) Transforma la expresión anterior como una función que depende de *φ* y de *I.*

b) Supón que la longitud de onda I_0 es de $3\,055 \cdot 10^{-8}$ cm y *k* = 1,88. Reescribe la expresión anterior de modo que queden sólo como variables independientes *φ* e *I.*

c) Calcula el espesor de la capa de ozono si *I* = $1\,776{,}16 \cdot 10^{-8}$ cm y $\varphi = 12^0$.

<u>Análisis de las respuestas de los estudiantes:</u> En este último ejercicio, solo dos estudiantes tuvieron dificultades en el inciso a. En el resto de los incisos, la totalidad de los estudiantes respondieron acertadamente. Es de destacar que, igual que en el caso anterior, en su mayoría acudieron a Derive 5.1 como herramienta de comprobación gráfica de los resultados.

7. Análisis de Resultados

Luego de aplicada la propuesta, se comprobó a través de las evaluaciones sistemáticas y parciales que los estudiantes superaron algunas de las dificultades que han sido detectadas históricamente. Se evidenció una mejor comprensión del concepto de función y de las propiedades de las funciones aplicadas a situaciones de la vida práctica, mediante la vinculación con contenidos de la disciplina Física. El uso del Derive 5.1 contribuyó a la motivación de los estudiantes y a una mejor interpretación de la representación gráfica de las funciones.

La Fig. 5 muestra la comparación de los resultados obtenidos en cortes evaluativos realizados por los profesores de las disciplinas Física y Matemática antes y después de realizado el trabajo. Como se puede apreciar, luego de aplicar la propuesta, donde dos estudiantes fueron evaluados de Excelente (E), seis de Bien (B) y uno de Regular (R). Además se pudo observar que los alumnos mostraron mayor disposición e independencia cognoscitiva.

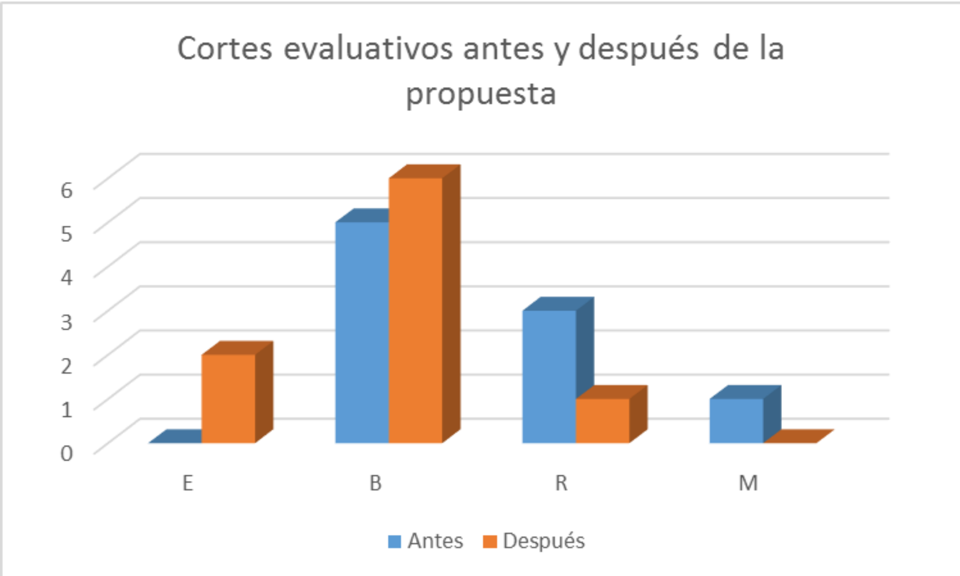

Figura 5. Gráfica comparativa de cortes evaluativos.

Fuente: Microsoft Excel 2013.

8. Conclusiones

Como resultado de una revisión bibliográfica del tema se han propuesto tareas con carácter interdisciplinario que al aplicarse, han dado como resultado que los estudiantes logren discernir, en su mayoría, entre el concepto de función y sus representaciones.

Han sido capaces de manejar con creatividad e independencia las diferentes formas de representar las funciones, manejando con precisión el efecto que produce en su representación gráfica cada uno de los parámetros presentes en ellas; lográndose así una mayor comprensión del concepto.

Han demostrado habilidades en el manejo de Derive 5.1 en el proceso de transferencia entre representaciones y en la comprobación de cálculos realizados a lápiz y papel. Se logra además que en las clases de Física estos estudiantes posean una herramienta matemática en la representación gráfica de fenómenos que se sustenten en un modelo matemático que responda a una función conocida y estudiada en las clases de Matemática.

Se han convencido de la utilidad de las funciones como modelos de problemas físicos, logrando un vínculo entre dos ciencias, que, unidas por naturaleza, en ocasiones se encuentran divorciadas en el proceso enseñanza-aprendizaje de ambas.

Estos avances se han evidenciado por haberse obtenido mejores resultados en las evaluaciones escritas posteriores a su aplicación y porque los alumnos se han mostrado más independientes y seguros a la hora de resolver cualquier tipo de tarea sobre el contenido abordado, por lo que aplicarlos ha sido favorable.

Bibliografía

Álvarez, M. (2001). *La interdisciplinariedad en la enseñanza – aprendizaje de las ciencias exactas en la escuela media*. Resúmenes del Congreso Pedagogía 2001, La Habana. Cuba. Recuperado el 29 de abril de 2016, de http://200.10.23.169/educacion/ed_ciencias_interdisciplinariedad.pdf

Álvarez, M. (2004). *Interdisciplinariedad. Una aproximación desde el proceso de enseñanza aprendizaje de las ciencias*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Álvarez, M. (2008). *Manual de ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior. Primera Parte*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Barnett, R. A., et al. (2003). *Precálculo funciones y gráficas. Vol 1. Primera Parte.* Félix Varela, La Habana. Cuba.

Batanero, C. (2005). *Significados de la probabilidad en la educación secundaria*. *RELIME*, Vol.8, N.3, 247-264.

Comisión Nacional de la Carrera Licenciatura en Educación en la especialidad Matemática-Física (CNC). (2015). Modelo del profesional. Plan de Estudio D modificado.

Concari, S. B., y Giorgi, S. M. (2000). Los problemas resueltos en textos universitarios de Física. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(3), 381-390.

Contrera, A., y Ordoñez, L. (2006). *Complejidad ontosemiótica de un texto sobre introducción a la integral definida. RELIME*, Vol.9, N.1, 65-84.

Coret, M., García, D., y Alavez, E. (1990). *Álgebra Moderna 1*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Dreyfus, T. (1991).*Advanced mathematical thinking processes, en Tall, D. (ed), Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht/Kluwer, 24-41.

Duval, R. (2000). *Basic issues for research in mathematics education (Plenary Address), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychologie of Mathematics Education*. Recuperado el 29 de abril de 2016, de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED452031.pdf

Grisolía, M. (2008). La Interdisciplinariedad en la Enseñanza de las Ciencias. Artículo enviado para su publicación en la revista *Ciência&Educação*. Recuperado el 13 de marzo del 2015 de: http://webdelprofesor.ula.ve/humanidades/marygri/documents/PPD/Interdisciplinariedad.pdf.

List, G., Walter, M., Baginski, M., Löschaw, G., Mertens, A., Schwanits, G.,…Goll, P. (2002). *Lógica Matemática. Teoría de Conjuntos y Dominios Numéricos.* Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Martínez, B., Perera, F., y Álvarez, M. (2011). *La interdisciplinariedad en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las ciencias*. Educación Cubana, Habana. Cuba.

Mederos, O., y González, B. (2005). La modelación en la educación matemática. *Talleres Gráficos de Salvador Impresor SA de CV Saltillo. Coahuila, México*.

Ministerio de Educación. (2007). *Matemática Décimo Grado*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Newell, W. H. (2001). A theory of interdisciplinary studies. Issues in Integrative Studies, 19, 1-25. Recuperado el 29 de abril de 2016 enhttps://www.researchgate.net/profile/William_Newell/publication/238490809_A_Theory_of_Interdisciplinary_Studies/links/004635314bfc74acf6000000.pdf

Palacio, J. (2003). *Colección de problemas matemáticos para la vida*. Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Pérez, Y., y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación, 35*(73), 169-194.

Potápov, M. (1986). *Álgebra y análisis de funciones elementales.* Mir, Moscú. URSS.

Rodríguez, L. (2011). *Didáctica de las funciones en la enseñanza Media Superior.II Evento Internacional "La Matemática, la Física y la Informática en el siglo XXI"*. Holguín, Cuba.

Rodríguez, R., Vassallo, J., Gómez, A., y Domínguez, H. (1988). *Cálculo diferencial e integral.* Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Sánchez Fernández, C. (2004). *Análisis Matemático. Tomo 1.* Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

Stewart, J. (2006). *Cálculo con trascendentes tempranas.* Parte 1. Félix Varela, La Habana. Cuba.

Autores:

Primer autor: Rodríguez Rivero Lissette**: Máster en Computación Aplicada (UCLV). Profesora Auxiliar del Departamento de Matemática Física en la Universidad de Sancti Spíritus, Cuba. Profesora de Análisis Matemático. Investiga en Análisis Matemático. Ha publicado en revistas como MATCH y SAR QSAR Environm Res, y en memorias de eventos.**

Segundo autor: Ponce Valdés Yudelkys: **Máster en Ciencias de la Educación. Mención Secundaria Básica (UNISS). Profesora Instructora del Departamento de Matemática Física de la Universidad de Sancti Spíritus, Cuba. Profesora de varias asignaturas dentro de la disciplina Física. Investiga la interdisciplinariedad Física-Matemática.**

Tercer autor: Pérez González Andel: **Doctor en Ciencias Pedagógicas (Uniss). Profesor Auxiliar de la Universidad de Sancti Spíritus, Cuba. Profesor de Didáctica de la Matemática. Investiga la formación inicial y didáctica del profesor de matemática. Ha publicado en revistas como Infociencia, Revista IPLAC, y Pedagogía y Sociedad.**