UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 47. Septiembre 2016
Página 23-43

Modos de compreender a Soma de Riemann e suas aplicações ao estar em um ambiente informatizado de aprendizagem

Luiz Carlos Leal Junior, José Milton Lopes Pinheiro

Fecha de recepción: 03/12/2015
Fecha de aceptación: 30/09/2016

Resumen	Este artículo objetiva comprender *como ocurre la constitución del concepto de Suma de Riemann mientras los alumnos estén realizando Actividades Exploratorias en un entorno informatizado de aprendizaje*. Para esto, se invitaron a desarrollar actividades junto a cosujetos de aprendizaje y a recursos tecnológicos, estudiantes de postgrado en Educación Matemática de la Universidade Estadual Paulista. Bajo perspectiva de la interrogación de esta investigación, se describieron y se analizaron las articulaciones de los sujetos en el tratamiento de las actividades. El movimiento de análisis ha permitido comprender la importancia de los recursos de la exploración junto a la informáticas para la constitución de los conceptos en Matemáticas. **Palabras-clave:** Suma de Riemann; actividades exploratorias; entorno informatizado de aprendizaje; educación matemática.
Abstract	This article aims to *understand how is the constitution of the concept of Riemann's Sum being students performing Exploratory Activities in a computerized learning environment.* To do so, they were invited to develop activities with cosubjects learning and technological resources, graduate students in Mathematics Education from the Universidade Estadual Paulista. In view of the question of this research were described and analyzed the joints of the subjects in the treatment of activities. The motion analysis allows us to understand the significance of the resources of the holding by the computer for the formation of concepts in mathematics. **Keywords**: Riemann's Sum. Exploration Activities. Computerized Learning Environment. Computing. Mathematics education.
Resumo	Este artigo tem por objetivo compreender *como se dá a constituição do conceito de Soma de Riemann estando os alunos realizando Atividades Exploratórias em um ambiente informatizado de aprendizagem*. Para tanto, foram convidados a desenvolver atividades, junto a cossujeitos de aprendizagem e a recursos tecnológicos, alunos da Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista. Sob a perspectiva da interrogação desta pesquisa, foram descritas e analisadas as articulações dos sujeitos no tratamento das atividades. O movimento de análise permitiu compreender a relevância dos recursos da exploração junto à informática, para constituição de conceitos em Matemática. **Palavras-chave:** Soma de Riemann. Atividades Exploratórias. Ambiente Informatizado de Aprendizagem. Educação Matemática.

1. Introdução

Pesquisas realizadas no âmbito do uso da Informática na Educação Matemática, como as de Powell e Alqahtani (2015) e Silva e Penteado (2009), desdobram articulações em torno do conhecimento matemático, mostrando que o avanço da presença dos recursos tecnológicos levanta seguidas interrogações sobre as possibilidades didáticas e pedagógicas das tecnologias informáticas levadas à escola. Essas questões interrogam as práticas junto às tecnologias informáticas, o conhecimento matemático constituído em ambientes informatizados, a geração de alunos em contato constante com novas tecnologias, o aprender e o ensinar valendo-se de aparatos tecnológicos, entre outros temas de estudo.

Imbricados em um contexto em que a tecnologia informática é presente, os autores deste artigo, constantemente interrogam esses temas a partir da perspectiva de suas práticas, o que faz surgir inquietações que se voltem às implicações que se desdobram nas possibilidades do uso da tecnologia informatizada nas escolas. Ir ao encontro dessas inquietações tornou-se uma tarefa constante na vida acadêmica e profissional dos pesquisadores.

Corroborou a busca de uma reflexão mais aprofundada no domínio dessas inquietações, o ingresso dos pesquisadores no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", no qual cursaram a disciplina intitulada A Utilização de Informática na Educação Matemática – no 2º semestre de 2015. O estudo aqui apresentado é fruto dessa disciplina e do trabalho solicitado pelo professor, que solicitara o desenvolvimento de uma proposta de ensino de um tema matemático junto a ferramentas computacionais.

A aplicação deste trabalho foi realizada com os alunos dessa disciplina. Foi escolhido, para o desenvolvimento do mesmo, o tema Soma de Riemann e, como apoio dado pela tecnologia, optou-se por trabalhá-lo propondo atividades na interface do *software* Geogebra, acoplado a um *blog* de autoria dos pesquisadores, disponível em: http://integracaoriemann.blogspot.com.br (LEAL JUNIOR; PINHEIRO, 2015).

Essa proposta foi aplicada aos 20 alunos da disciplina, estando os mesmos divididos em dez duplas, além do professor da disciplina, que realizou as atividades individualmente. Vale ressaltar que a maior parte dos alunos são professores de Matemática, todos participam do referido Programa de Pós-Graduação.

Há diversas pesquisas em Educação Matemática que têm indicado dificuldades com relação ao ensino e à aprendizagem do Cálculo, tanto Diferencial quanto Integral, bem como seus desdobramentos, os quais podem ser encontrados em Silva (2011), Trindade e Wanghon (2011), Silva et al. (2014), entre outros autores.

Almejando entender como se dá a introdução à noção de integral nos cursos superiores de Ciências Exatas, primeiramente busca-se neste estudo compreender como ela é feita em livros didáticos. Foi possível constatar que há muitas formas de introduzir o conceito de área, como uma proposta de introdução à noção de integral definida. As obras analisadas fazem essa introdução pelo conceito de Soma de Riemann. A essa análise, mais adiante é dedicada uma seção deste texto.

Todavia, as abordagens são variadas, podendo ser descritivas, breves, prescritivas, exemplificadoras, construtivistas ou formais. Mas a maioria o faz de maneira lacônica, não sendo permitido aos estudantes inferirem e conectarem as ideias, além de não conseguirem trabalhar os problemas geradores de um novo conceito. A Soma de Riemann é posta à percepção como um conteúdo heurístico, ou um conteúdo que não possibilita a conexão com a utilidade das ferramentas usuais para se calcular a área abaixo de uma curva/função.

Vê-se nas tecnologias informatizadas oportunidade para oferecer um tratamento que favorece a compreensão da Soma de Riemann que os livros didáticos não têm dado; uma compreensão que se dá no envolvimento do aluno com o tema junto a um *software* e, no caso proposto, um *software* de Geometria Dinâmica - GD. Para isso, questionam-se o dinamismo dos *softwares*, o movimento de objetos geométricos e suas relações passíveis de visualização. Borba e Penteado (2010) dizem que atividades em *softwares* gráficos favorecem a visualização e a experimentação, ao trazer essas possibilidades para o centro da aprendizagem matemática. “As novas mídias, como os computadores com *softwares* gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia e física” (p. 37).

Passa-se, então, a pensar nas atividades e nos objetivos das mesmas, de forma a melhor tratar os conceitos pretendidos. Veem-se com potencial significativo ao objetivo desta pesquisa as Atividades Exploratórias, que, conforme propõe Ponte (2003), apresentam uma estrutura prévia que deve ser explorada. Estrutura esta que sugere caminhos, mas os deixa abertos para que os alunos possam fazer conjecturas e buscar meios para validá-las. Ao interrogar sobre as Atividades Exploratórias a serem desenvolvidas, ficou evidente que a elaboração não seria uma tarefa simples. Junto à elaboração foi necessário antever objetivos, bem como os meios para alcançá-los, os quais seriam questões levantadas *a priori*, de forma a motivar uma busca que se iniciasse no desafio intelectual de compreendê-las, já articulando primeiras compreensões em torno do conceito. O encaminhamento deveria ser cuidadosamente apresentado, de forma a orientar os alunos à concepção dos conceitos pretendidos.

A introdução à integração, as contribuições da tecnologia para essa introdução e o tratamento exploratório de atividades para constituição do conceito de Soma de Riemann se mostraram temas relevantes a este estudo, especialmente por permitirem interrogar a construção do conceito por meio de Atividades Exploratórias expressas em ambientes tecnológicos. Essa interrogação, analisada com colegas de curso, com professores e autores de livros didáticos foi clareando-se, de modo a poder ser assim expressa: *Como se dá a constituição do conceito de Soma de Riemann estando os alunos realizando Atividades Exploratórias em um ambiente informatizado de aprendizagem*?

2. O que a questão interroga e a torna relevante

Para compreender o que é intencionado neste estudo, é importante buscar e evidenciar o que esta questão proposta interroga. Ela interroga, sobretudo, o *conceito de Soma de Riemann.* Junto a ele estão suas aplicações, seja em situações teóricas do Cálculo I ou em situações que envolvam aplicações do cotidiano, especialmente as relacionadas à formação acadêmica e profissional do estudante. Com isso, torna-se significativo buscar em livros didáticos, bem como em pesquisas acadêmicas, como se dá a introdução à integração, se há um tratamento da Soma de Riemann e como este tratamento é dado.

Interroga também pela *Atividade Exploratória*, no âmbito da investigação matemática, por sua elaboração e objetivos. Atividades de cunho exploratório abrem possibilidade à aprendizagem por descoberta, visto que os conceitos pretendidos pelo professor não são previamente dados, e o estudante deve buscar respostas para as questões levantadas. Questões essas que devem ser bem elaboradas e delineadoras de um pensar que possibilite ao aluno a percepção e a compreensão do conceito.

Questiona ainda pelo *ambiente informatizado de aprendizagem*, que pudesse satisfazer ao objetivo de apresentar as atividades, ofertar meios e ferramentas para melhor tratá-las, bem como possibilitar o registro dos dados que seriam necessários às considerações possíveis a este estudo. A tarefa de pensar em um ambiente informatizado que potencialize o aprendizado perpassa o pensar em acessibilidade, em potenciais de ferramentas, em questões estéticas que possibilitam um ambiente mais convidativo e, em outros fatores, que fazem dessa tarefa algo complexo. Tal complexidade sugere estudos mais fundantes em torno desse tema, e sobre como efetuar/compor experimentos junto a ferramentas computacionais, buscando otimizar o ambiente de aprendizagem.

Realizando o exercício de interrogar a questão que foi se constituindo, e aqui é expressa, é possível entender o que ela busca e, também, evidenciar outras questões que se desdobram, que, ao serem tratadas, contribuirão para compreensões relevantes a este estudo.

3. Formalização dos conceitos das Somas de Riemann

Há na literatura corrente sobre o tema cinco tipos de Somas de Riemann, os quais serão apresentados abaixo, cujas definições são interpretações de Leal Junior e Pinheiro (2015) das obras estudadas, com um olhar diferenciado, às quais foi conferida uma abordagem menos restritiva e mais completa do que aquelas apresentadas pela maior parte dos livros-textos analisados.

Primeiro, sobre a *Soma ao Ponto Médio - SPM*. Esse é o tipo mais comum de Soma de Riemann destacada nos livros. Autores, os quais serão apresentados na próxima seção, recorrem a ele em algum momento de suas teorizações matemáticas. Tal modelo consiste em: dada uma função contínua *f* definida no intervalo $[a, b]$, o qual será subdividido em n subintervalos, de onde se configurará a seguinte partição: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$. Assim, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ será o comprimento relativo ao subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de onde, recorrendo-se ao Teorema do valor médio[1], existirá um elemento t_i qualquer, o qual se denomina aqui de ponto amostral, de modo que a cada $i = 0,1,2,\dots,n,$ se possa construir um retângulo de base Δx_i e altura $f(t_i)$.

Então, ao somar a área dos n retângulos, obtém-se uma aproximação da área sob o gráfico da função $f(x)$, que será dada por $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$, e definirá a Soma de Riemann, quando se recorre ao ponto médio. Sobretudo, a área da região, nessas condições, será dada exatamente quando se aplica o limite, ou seja, fazendo n tender ao infinito: $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$.

Aliás, devido à regularidade da partição, pode-se inferir que todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ terão a mesma medida, isto é, todos os Δx_i terão medidas iguais a $\Delta x = (b-a)/n$.

A *Soma à Direita – SD* constitui-se de um raciocínio bastante similar ao anterior. Entretanto, ela pode ser analisada de um ponto de vista bem geral, pois vale para qualquer tipo de função contínua e, principalmente, que a maioria dos livros didáticos prefere omitir-se, trabalhando apenas com as funções crescentes e/ou decrescentes.

Isso porque, dado o subintervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 0,1,2,\dots,n,$ a altura do retângulo será calculada no extremo superior (supremo), ou máximo, desse intervalo, $f(x_i)$. Logo, a Soma de Riemann, para um dado n inteiro positivo, em que a base de todos os retângulos terá a mesma medida, será $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, e, quando se toma seu limite, tem-se a área $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$.

A *Soma à Esquerda – SE* é obtida de maneira análoga à SD. Todavia, o que as diferencia é que, dessa vez, a altura do retângulo será dada pela aplicação da função no extremo inferior (ínfimo), ou mínimo do intervalo, $f(x_{i-1})$. Logo, a Soma de Riemann, para um dado n inteiro positivo, será $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$, e, ao aplicar o limite, tem-se a área $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$.

Assim como na SD e na SE, na *Soma Superior – SS*, haverá a determinação da função e do intervalo para o cálculo da área de retângulos de bases cada vez menores. Proceder-se-á com a partição do intervalo em n subintervalos da forma $[x_{i-1}, x_i], i = 0,1,2,\dots,n,$ e em cada novo subintervalo toma-se o elemento $f(M_i)$, que será o máximo valor que *f* assume no i-ésimo subintervalo.

Sendo assim, como não haverá nesse subintervalo maior valor para a função em questão e, consequentemente, retângulo mais alto dentro do subintervalo em questão, tem-se, na soma total das áreas dos retângulos dessa partição, uma área

[1] O Teorema do Valor Médio: Se f é uma função contínua em [a,b] e derivável em]a,b[, então existe c pertencente a]a,b[, tal que a reta tangente ao gráfico de f traçada pelo ponto (c,f(c)) é paralela à reta que passa por (a,f(a)) e (b,f(b)), isto é, $f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (BARUFI et al., 2002).

maior que a área da função original, o que lhe garante o nome de soma superior, e que permite uma abordagem diferenciada, e até mesmo diferente, daquela usual, que geralmente é feita pela análise do comportamento da função, sendo ela crescente ou decrescente.

Logo, a Soma de Riemann - SS, para um dado n inteiro positivo, em que a base de todos os retângulos terá a mesma medida, será $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f\,(M_i)\Delta x$, e, quando da aplicação do limite, tem-se a área $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(M_i)\Delta x$.

De modo análogo à SS, define-se a *Soma Inferior - SI*. Não obstante, a diferenciação dos conceitos reside no fato de tomar o elemento $f(m_i)$, que será o valor mínimo de *f* no i-ésimo subintervalo. Sendo assim, como não haverá, nesse intervalo, menor valor para a função em questão e, consequentemente, retângulo menor dentro do subintervalo, tem-se, na soma total das áreas dos retângulos dessa partição, uma área menor que a área da função original, o que lhe garante o nome de soma inferior.

Então, a soma de Riemann - SI, para um dado n inteiro positivo, será $A \simeq \sum_{i=1}^{n} f\,(m_i)\Delta x$. Quando tomar o limite nessa aproximação, tem-se a área $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(m_i)\Delta x$.

É possível perceber, de acordo com as formulações apresentadas, que são trabalhadas em alguns livros didáticos, como Stewart (2013) e Thomas, Weir e Hass (2012), que os cinco tipos de Somas de Riemann são equivalentes. Para isso, basta perceber que, dadas as devidas partições, os pontos amostrais[2], o somatório e o limite dependerão, de uma maneira exclusiva, do parâmetro n. Quando o mesmo tende ao infinito, teremos a área, numa composição de retângulo de base cada vez menor (tendendo a zero) e alturas limitadas sobre a curva, desde que a função seja contínua e limitada ao intervalo [a,b].

4. Uma breve análise da abordagem dos livros didáticos analisados

Em prol dos objetivos desta pesquisa, fez-se necessário o estudo de como é abordada a Soma de Riemann em livros didáticos[3], e suas diferenciações conceituais e metodológicas. Com isso, é dedicada uma seção deste estudo a esses instrumentos tão significativos à temática em questão.

---

[2] Sejam eles aqueles determinados pelo teorema do valor médio, pelos extremos dos subintervalos e pelos pontos que maximizam ou minimizam os valores da função em questão. Também são os pontos a quem recorreremos para os respectivos cálculos das áreas dos sub-retângulos, os quais serão arbitrários na SPM, SS e SI e fixos na SD e SE.

[3] Os livros analisados, para elaboração deste trabalho, foram os que tiveram maior destaque em ementas de cursos de Cálculo I e Funções de uma variável. Isso para cursos da área de ciências exatas (matemática, física, química, engenharias e superiores de tecnologia) de centros universitários como Universidade de São Paulo-USP, Universidade Estadual de Campinas-Unicamp, Universidade Estadual Paulista-Unesp, Instituto Federal de São Paulo-IFSP, Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC, Universidade Federal de São Carlos-UFSCar, em uma pesquisa feita nos sites dessas instituições no período de 01/10/2015 a 10/10/2015.

Ao analisar os livros: Flemming e Gonçalves (2006), Iezzi, Murakami e Machado (2013), Guidorizzi (2008), Stewart (2013), Thomas, Weir e Hass (2012), Larson, Hosteler e Edwards (2006), percebe-se que poucos trazem uma abordagem da Soma de Riemann que seja agenciadora e significativa, ou que permita ao leitor e ao estudante uma formação sólida desse conceito. Uma abordagem superficial da Soma de Riemann pode causar dificuldades à sua apreensão, dado que um construto mal fundamentado, que não tenha sido potencializado e abordado de uma maneira efetiva, não possibilita ao estudante entender, compreender e relacionar-se com as propriedades que subjazem a esse conceito.

Na esteira dessas considerações, é feita aqui uma análise do tratamento da Soma de Riemann nas três primeiras obras acima, as quais a abordam de modo semelhante, sendo ela obtida por um procedimento bastante parecido com o proposto na Soma ao Ponto Médio. No entanto, os autores apresentam uma restrição sobre a função *f*, que deve ser contínua e não negativa, sem nenhuma explicação sobre a última restrição, que é feita para conferir melhor visibilidade e evitar o problema de área “negativa”. Também não é justificada a existência do ponto amostral para o cálculo das alturas dos retângulos em cada subintervalo.

Quando do cálculo do limite para a definição de área, não é fornecida explicação sobre os termos que compõem a fórmula, tem-se a possibilidade de pensar que os subintervalos podem não ter a mesma medida, e de questionar a existência dos limites. A percepção dos conceitos de infinitésimos e diferenciais que definem a integral definida não se trata de uma tarefa simples, portanto, a não evidenciação desses conceitos pode prejudicar o aprendizado de Integral e consequentemente de outros conceitos que se utilizam da mesma. Os autores estudados não detalham nem exploram, em suas obras, os conceitos de infinitésimos e diferenciais, não apresentam exemplos, e os exercícios relacionados são primários. Todavia, a parte operacional da integração definida, já como ente matemático constituído, é bastante forte e coerente.

Por outro lado, as três últimas obras acima citadas são similares e completas na abordagem da Soma de Riemann. Os autores iniciam uma explanação sobre somas finitas e áreas de polígonos, para que se tenha ideia do porquê de se utilizar retângulos para trabalhar essa definição, além de, em seguida, relacionar os tipos de Soma de Riemann, que aqui foram abordados. Esses trabalhos possibilitaram uma visão geral dos conceitos envolvidos e, não menos importante, deram uma visibilidade maior à problemática do cálculo de área. Com relação às SD, SE, SS e SI, trabalharam de modo intuitivo e por meio de exemplos. Já a formalização matemática da Soma de Riemann propriamente dita, fizeram-na pela SPM, apresentando seus modos construtivos de trabalho.

Os autores não restringem a função, exigindo que a mesma seja não-negativa, o que lhes confere uma generalidade maior, e maior abrangência para sua construção. Destacam que a área da função será exatamente igual ao limite da soma, e que todos os tipos de soma, que foram mencionadas acima, são equivalentes, quando se toma seu limite. Estes trabalhos didáticos trazem muitos exemplos diretos de suas definições, são bastantes coloridos e visuais, haja vista a abordagem de problemas sobre distância e deslocamento que seguem a integral definida, os quais são apresentados com muitos detalhes, e são trabalhados em meio a exercícios práticos e contextualizados.

.

5. Ideias que se mostram importantes para o estudo almejado

Ao interrogar a questão de pesquisa, mostrou-se significativo adentrar reflexivamente em temas que se apresentam, especialmente em o que se entende por Soma de Riemann, procurando expor um tratamento mais geral possível, sem perda de generalidade, ou apelando às restrições que os autores dos livros didáticos supracitados usam/usaram para ilustrar seus trabalhos.

Decorrente do estudo dessas obras, vislumbra-se a importância de se valorizar a constituição do conceito de Soma de Riemann por parte do sujeito, por meio de Atividades Exploratórias. Para Leal Junior e Onuchic (2015), trabalhar nessa perspectiva não limita os estudantes a trabalharem apenas com a definição, mas permite-lhes recorrer e visualizar outros conceitos relacionados, como limites, áreas de polígonos, questões de cinemática, funções e volumes.

Entende-se que se mostra significativo à constituição do conhecimento o tratamento de Atividades Exploratórias. Ponte (2003, p. 27) aponta que, ao trabalharem com Atividades Exploratórias, os alunos desenvolvem habilidades e capacidades "que envolvem conhecimentos de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidades de raciocínio e de uso desses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas", por meio da criticidade e reflexão sobre ideias e aplicabilidade das mesmas ao "lidar com situações das mais diversas". Explorar em sala de aula permite aos alunos, conforme Silva et al. (1999, p. 72), formar conjecturas, avaliar sua plausibilidade, permite "a escolha dos testes adequados para sua validação ou rejeição. Permitem ainda, procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessíveis testes e levantar novas questões para investigar".

Uma Atividade Exploratória possui estrutura aberta (PONTE, 2003), pois ela sugere aos alunos algumas atitudes, cujas implicações podem balizar conjecturas, reflexões e a concepção de conceitos matemáticos não esperados pelo professor. Apresenta-se aos alunos um modelo pronto, que deve ser explorado, compreendido e analisado. Sobre isso, Gravina e Santarosa (1999, p. 81) dizem que não são as ideias dos alunos que são representadas na atividade, há um desafio de compreendê-las. "A própria compreensão do modelo, o entendimento dos princípios de construção, já são, por si só, estímulo ao raciocínio, que favorecem a construção de relações e conceitos".

A proposta de trabalhar Atividades Exploratórias pode ser tratada também junto às Tecnologias da Informação e Comunicação - TIC, visto que a informática fornece ferramentas e meios que otimizam a busca e a exploração. Sobretudo, muito além das tarefas/atividades, importa considerar, também, a forma como são trabalhadas em sala de aula e no ambiente informatizado de aprendizagem. Segundo afirmam Ponte et al. (1998),

> Não basta quando se oferece aos alunos experiências matemáticas mais interessantes. Na verdade, ao pretender que os alunos desenvolvam a capacidade de formular problemas, de explorar, de conjecturar e de raciocinar matematicamente, que desenvolvam seu espírito crítico e a flexibilidade intelectual é-se levado a um outro modo de conceber o ensino e a criar um outro ambiente de aprendizagem. (Ibidem, p. 11).

Este estudo recorre às TIC como mecanismo/recurso de ensino e de aprendizagem, em que residem tecnologias informáticas, como um mediador que, de acordo com Oliveira (2005), corrobora o desenvolvimento de ferramentas que trazem benefícios e descobertas ao trabalho do professor, e melhor clareza sobre como trabalhar o conhecimento no âmbito de um conceito matemático, a exemplo de construção de gráficos e mobilização de várias representações matemáticas.

Para Simões (2000), o professor, de posse de seu material intelectual, o que inclui os livros didáticos, não é o único detentor do conhecimento e, atualmente, as informações são veiculadas de formas distintas e diversas, a exemplo das TIC. E, com o crescente aumento dos meios e formas de informações, os estudantes vêm à escola imbuídos de novas linguagens e ferramentas, como *softwares*, ambientes de aprendizagens e materiais didáticos diferenciados.

Borba e Penteado (2010, p. 64) dizem que o lançar mão do uso de TIC "não significa necessariamente abandonar outras tecnologias. É preciso avaliar o que queremos enfatizar e qual a mídia mais adequada para atender nosso propósito" (Ibidem, p. 64). Entretanto, quando se situa num cenário de inserção de tecnologia informática no ambiente escolar, pode-se perceber que a mesma tem sido vista "como um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade" (Ibidem, p. 65).

Informação não é conhecimento, ela deve ser trabalhada de modo a tornar-se um conhecimento (GLEICK, 2013). Por esse motivo, traz-se neste trabalho um local de informações, bem como um meio de trabalhá-las, um instrumento de mediação que amplia a capacidade dos estudantes, de modo a torná-las conhecimento a respeito do tema Soma de Riemann, como uma abordagem introdutória ao cálculo de áreas. Para Pierce (1975), um trabalho nesses moldes visa a atuação no meio em que se vive, além da percepção do signo/elemento criado pelo homem, e que se constitui como um objeto, forma ou fenômeno representando algo diferente de si mesmo.

A potencialidade das TIC, focada junto ao ensino e à aprendizagem de Matemática, foi solo sobre o qual foi constituída a proposta de introdução à integração por meio de Soma de Riemann, utilizando o s*oftware* Geogebra, no qual a questão da visualidade, que tem se mostrado como uma dificuldade em muitas situações pode ser melhor tratada, visto que o mesmo fornece ferramentas que facilitam a construção de gráficos que são muitas vezes inviáveis sem o auxílio do computador.

O ambiente de GD se mostra aberto à elaboração e realização de Atividades Exploratórias. Explorar implica em ações de testar, observar e conjecturar. A opção de "arrastar" dos *softwares* de GD oferta essa mobilidade aos alunos, permitindo-lhes transformar continuamente, e em tempo real, um objeto ou construção. "Sem dúvida, a principal característica de um *software* GD é a possibilidade do arrastar. [...] essa característica permite que estudantes explorem situações problema e façam conjecturas sobre o conteúdo que estão estudando" (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1070).

Segundo Pinheiro (2013), "o modo arrastar possibilita ao aluno estabelecer alguns pensamentos, e aplicá-los, no intuito de verificar a sensatez ou veracidade dos mesmos". O dinamismo proporcionado pelo *software* durante a exploração permite a visualização de objetos que se movem conforme a intenção do aluno. Junto à percepção do que se move, pode-se manifestar o que é invariante nesse movimento, e que determina as propriedades constituintes do objeto. A percepção de invariantes é fortemente destacada em trabalhos como os de Pinheiro (2013) e Powell e Alqahtani (2015), que dizem da relevância do aprendizado pela percepção do que não é *a priori*, mas que é descoberto pelos alunos no ato de mover. Com isso, uma propriedade pode ir constituindo-se à medida que o aluno vai movendo-percebendo-compreendendo.

Nessa perspectiva, as Atividades Exploratórias em ambientes GD devem convidar os alunos a explorar propriedades e teoremas dados, mas, também, a explorar objetos que, postos em determinada situação de movimentar, abrem possibilidades de percepção de propriedades imanentes aos mesmos.

6. Metodologia e procedimentos de investigação

Adere-se aqui a um modo de investigar no qual é preciso uma atentividade ao que é possível ver a partir de uma percepção imediata do vivido, que leva os procedimentos metodológicos desta pesquisa a adentrar as nuanças da investigação qualitativa. Sob a perspectiva desse modo de pensar, percebe-se, entre tantos outros aspectos, o que é partir para uma pesquisa com abertura para novas categorizações e para o entendimento do que é olhar e buscar compreender diretamente as coisas onde elas se manifestam originalmente, sem filtros teóricos que digam, de antemão, o que elas são.

Para esta pesquisa, foi criado um *site*, na modalidade *blog*, onde foi aberta a possibilidade de vivenciar a temática da introdução à integração pela Soma de Riemann. Nele foram postas algumas reflexões e problemas que se mostraram interessantes para a abordagem desse conceito.

Foram propostas as Atividades Exploratórias no *blog*, conforme especificado mais adiante, de modo a permitir ao estudante, com o auxílio dos pesquisadores, enquanto mediadores, tratar as informações expressas nas mesmas, de tal forma que, desse tratamento possam se constituir saberes matemáticos diversos, mesmo tendo as atividades o fundo propiciado pela Soma de Riemann.

Após a realização das atividades, os sujeitos foram convidados a visualizar duas postagens no *blog*. A primeira dizia da visão dos pesquisadores a respeito da problemática que envolve o conceito de Soma de Riemann. A segunda apresentava referências de alguns materiais didáticos, disponíveis na rede, dentre os quais dois ambientes do Geogebra Tube[4], em que os alunos poderiam interagir com a

[4] Disponível em: *blog*: https://tube.geogebra.org/?lang=tr. Acessado em 15/11/2015.

ferramenta, e perceber como se comporta a Soma em três perspectivas: SS, SI e SPM. Além disso, eles poderiam alterar as funções, os intervalos de definição das mesmas e o número de retângulos para estimar o cálculo da área.

Nas três postagens, as quais foram denominadas Matemáticas, foi proposta, em cada uma, uma atividade. Foi disponibilizada uma interface do *blog* com o Geogebra, em que o aluno recebia algumas questões que permeariam sua atividade de maneira descritiva, reflexiva, prescritiva, visual e analítica. Os estudantes buscariam, por meio das orientações, adentrar a formalização dos conceitos e intuir onde poderiam chegar em termos do cálculo de áreas. Foi criado um ambiente, por meio do Google Drive, para que os alunos, ao final de cada questão, pudessem escrever suas respostas, e em seguida enviá-las aos professores, em tempo real, de forma síncrona. Isso além do espaço, para comentários, disponível no próprio *blog*, em que os estudantes poderiam emitir suas opiniões sobre o material e a dinâmica daquela proposta de aula.

As atividades foram trabalhadas em duplas, dado o objetivo de um aprendizado que se dá também na percepção do outro, enquanto cossujeitos de aprendizagem, em um envolvimento em que o aprender e o aprendido são compartilhados.

7. Construção e análise dos dados

Aqui são apresentadas as atividades junto ao tratamento dado pelos sujeitos no envolvimento com as mesmas, ao mesmo passo em que são articuladas compreensões dos pesquisadores sobre a percepção e construção de conceitos que foram se mostrando aos sujeitos na vivência com as atividades. Entende-se ser suficiente, para a análise, trazer apenas algumas respostas dadas, mas que expressaram o mesmo sentido das demais respostas.

Intencionando manter a credibilidade da análise, foi recortado da planilha do Google Drive, para a qual os alunos reportaram suas articulações, um conjunto de respostas, sem mudar suas ordens prévias, nem mesmo inserir outras respostas neste conjunto, ou retirá-las. Com isso, visa-se não conduzir a análise, trazendo a ela respostas que, por julgamento, são ditas mais elaboradas e favoráveis.

Na primeira atividade proposta no *blog*, foram delineadas questões que, ao serem tratadas, pudessem permitir aos alunos chegarem ao conceito de Soma de Riemann, experimentando as possibilidades dinâmicas e visuais dadas na interface do *software* Geogebra. A atividade foi assim posta:

Use retângulos para estimar a área sob a curva y = e^x no intervalo [0, 1], atendendo os passos que seguem:

***Item 1* -** Marque a opção Mostrar Soma Inferior. Observe a área determinada por esta soma.
***Item 2* -** Marque a opção Mostrar Soma Superior. Observe a área determinada por esta soma.

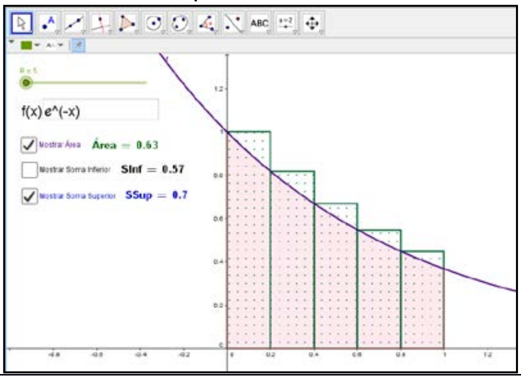

Figura 1: Atividade Exploratória 1.
Fonte: Os autores.

Para esta atividade, algumas questões e situações foram propostas. Elas são apresentadas aqui junto a algumas das respostas dadas pelos alunos.

QUESTÃO 1 - *O que pode ser dito sobre a área sob a curva quando olhada a soma do item 1? O que pode ser dito quando olhado o item 2? E o que pode ser dito sobre a área sob a curva quando olhados simultaneamente os itens 1 e 2?*
R1 - A soma inferior resulta numa área menor que a área real; e a soma superior dá uma área maior. Quando olhado simultaneamente, uma soma compensa a outra.
R2 - Utilizando a soma inferior (item 1), quanto mais retângulos, a área da figura aumenta e aproxima da área igual a 0,63. Utilizando a soma superior (item 2), quanto mais retângulos, a área da figura diminui e se aproxima da área igual a 0,63. Observados os itens 1 e 2 simultaneamente, vemos que os retângulos que faltam na soma inferior e o que ultrapassa pela soma superior se complementam.
R3 - A soma 1 chega ao valor mais próximo do exato de forma crescente, já a segunda de forma decrescente. E a área da curva é a integral.
QUESTÃO 2 - *Diga sobre a área sob a curva, agora estudando a Soma Inferior e Superior quando o intervalo é dividido em 8 partes, ou seja, considerando as áreas de 8 retângulos.*
R1 - Aumentando-se o número de retângulos, a soma de suas áreas aproxima-se mais da área real sob a curva.
R2 - A soma inferior é igual a 0,59. A soma superior é igual a 0,67. Percebemos que falta 0,04 na soma inferior e que sobra 0,04 na soma superior em relação à área de 0,63. Ou seja, uma se aproxima de 0,63 crescendo e a outra decrescendo.
R3 - O valor superior é aproximado para menos e o valor inferior aproximado para mais.
QUESTÃO 3 - *Aumentando gradativamente o número de retângulos no intervalo de 0 a 1, o que acontece com as somas Inferior e Superior ao serem comparadas com a área sob a curva?*
R1 - A soma superior e inferior vão se aproximando da área real.

R2 - Aumentando-se, gradativamente, a soma de suas áreas aproxima-se cada vez mais da área real sob a curva, ou seja, diminui-se a diferença entre a área sob a curva e a área determinada pelas somas superior e inferior.
R3 - As somas se aproximam a área da curva que é de 0,63.
QUESTÃO 4 - *Se pensarmos em um número n de retângulos, que tende ao infinito, o que pode ser dito sobre as áreas em questão?*
R1 - Elas são iguais.
R2 - Poderemos dizer que a área sob a curva é igual ao limite da soma das áreas dos n retângulos, quando n tende ao infinito.
R3 - Os retângulos cada vez ficarão próximos um ao outro e chega um momento em que a soma superior e inferior manterão o mesmo valor da área, independente de acrescentar outros retângulos.

Tabela 1: Atividade Exploratória n. 1.
FONTE: Material dos autores.

Dispôs-se um percurso a ser tomado pelos alunos para conduzi-los ao trabalho com determinado número de retângulos em um intervalo e, em seguida, ao propor o aumento gradativo da quantidade de retângulos, abriu-se a possibilidade da percepção de um invariante, a aproximação da área sob a curva através de SS e SI. Uma vez compreendido isso, aleijou-se uma generalização ao pedir aos alunos que trabalhassem com um número de retângulos significativamente alto.

Este percurso permitiu aos alunos diferenciar a área das somas finitas e, a partir delas, trabalhar as noções de limite e infinito, ao estudarem as somas em diferentes intervalos e números de retângulos. Tais noções são complexas, mas, nessa atividade, mostraram-se mais acessíveis, dadas as possibilidades dinâmicas/visuais do *software,* postas à disposição junto a esta atividade.

Na esteira dessas considerações, entende-se que as questões levantadas e as possibilidades do *software* deram conta de ofertar aos alunos uma percepção da singularidade das áreas pautadas, bem como das relações entre as mesmas. Mesmo sendo um conhecimento prévio da maior parte dos alunos, o conceito de Soma de Riemann, tal qual proposto na atividade, mostrou-se desafiador, visto que eles se embrenharam numa busca e, ao final, articularam suas compreensões, muitas delas desprendidas da formalidade posta nos livros. A motivação expressa pelos alunos no envolvimento com essa atividade, e o êxito dos mesmos ao argumentarem coerentemente sobre áreas e noção intuitiva de Soma de Riemann, conduzem esta pesquisa ao entendimento de que há potencial de aprendizado em atividades cuja proposta é o aprender explorando.

Sem falar de Integral, os alunos conseguiram perceber e expor que a soma das áreas dos retângulos, quando o número deles tende ao infinito, é igual à área sob a curva. Entende-se que essa percepção dá abertura ao tratamento de Integral. Abertura essa que se deu na intenção do aluno em estar com a atividade e a buscar as respostas que a mesma lhe solicitava.

A segunda atividade diz da aplicação de integral à cinemática, mais especificamente na questão da relação entre velocidade e deslocamento. Motivou esta questão a percepção da dificuldade de muitos alunos em relacionar a curva e a área limitada pela mesma em determinado intervalo e, até mesmo, em trabalhar com essa relação. Então, a atividade foi proposta para possibilitar, aos sujeitos da pesquisa, a percepção do que diz a curva em relação à área e do que diz a área em relação à curva, mais especificamente ao olhar para a "curva velocidade" e para o deslocamento dado pela área sob a mesma, em um intervalo definido, estando os sujeitos novamente explorando junto ao ambiente de GD.

Fica evidente que não apenas cada atividade possui uma estrutura que propõe um movimento aos alunos rumo a um conceito, mas as atividades, tomadas como um todo, também delineiam um roteiro ao se completarem, no sentido de que o apreendido com uma pode contribuir para o tratamento da outra. A Atividade Exploratória 2 foi assim posta:

Encontrar o deslocamento de um objeto durante um certo período de tempo, sendo que a velocidade do objeto é conhecida em todos os instantes, é uma tarefa simples, visto que problemas como este podem ser modelados pela fórmula: d = v . t (deslocamento = velocidade x tempo). Mas, e se a velocidade variar? Vamos investigar o problema no suposto caso a seguir:

Tempo (s)	0	0,25	0,5	0,75
Velocidade (km/h)	4	2,81	1,75	0,81

Os pares ordenados (tempo, velocidade) estão representados no eixo cartesiano que segue, bem como a curva f(x) que os contém:

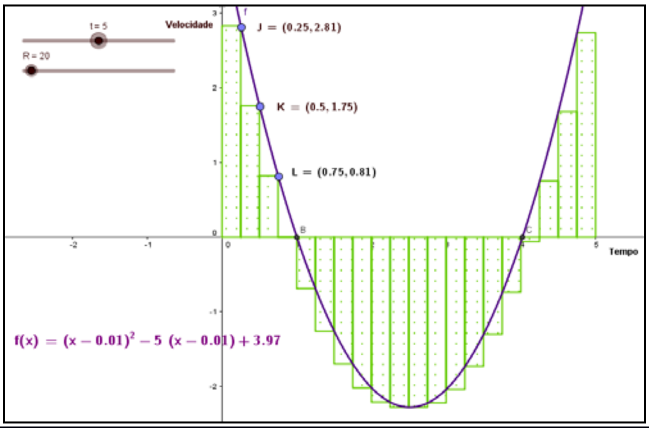

Figura 2: Atividade Exploratória 2.
Fonte: Os autores.

Foram levantadas as seguintes questões aos alunos:

QUESTÃO 1 - *O que representa a área de cada retângulo? O que representa a soma destas áreas?*
R1 - Representa o deslocamento naquele espaço de tempo. A soma representa o deslocamento total.
R2 - O produto representa a posição naquele instante e a Soma é o deslocamento naquele intervalo de tempo.

R3 - A área do retângulo representa o Deslocamento e a soma das áreas a distância.
QUESTÃO 2 - *O que pode ser dito sobre a curva f(x)?*
R1 - Representa a velocidade em relação ao tempo.
R2 - É uma parábola com duas raízes.
R3 - A curva gera o deslocamento expresso pela função.
QUESTÃO 3 - *O que pode ser dito sobre a área sob esta curva f(x)?*
R1 - Deslocamento do objeto.
R2 - A área representa o deslocamento no intervalo de tempo.
R3 - Representa a distância percorrida.
QUESTÃO 4 - *Se tomados outros tempos no intervalo [1, 4], e aumentado o número de retângulos, o que pode ser dito sobre a soma das áreas dos retângulos contidos neste intervalo?*
R1 - Esta área é negativa, pois está abaixo do eixo x.
R2 - A área dos retângulos se aproxima da curva, representando a distância percorrida no momento em que o deslocamento está sendo oposto ao da origem.
R3 - Quanto maior o número de retângulos, mais preciso será o valor da área.
QUESTÃO 5 - *Tomando o intervalo [0, 6], o que pode ser dito sobre a soma das áreas dos retângulos neste intervalo?*
R1 - Nos intervalos de 0 a 1 e de 4 a 6, a soma das áreas dos retângulos é positiva, pois está acima do eixo x; já nos intervalos de 1 a 4, a soma das áreas dos retângulos é negativa.
R2 - De zero a 6 tem três áreas, a soma delas vai dar negativo, pois a área da curva inferior ao eixo x é maior que as áreas que são superiores ao eixo x.
R3 - Quanto mais retângulos, mais se aproxima da área sob a curva (que é o deslocamento).

Tabela 2: Atividade exploratória n. 2.
FONTE: Material dos autores.

A percepção primeira, de que a área de um retângulo representa o deslocamento, possibilitou que os alunos concebessem o conhecimento de que a área sob uma curva, dada por uma “função velocidade”, considerando um intervalo, determina o deslocamento de um objeto. Este tratamento *a priori* trata-se de uma das maneiras de oportunizar a percepção de que a integral da “função velocidade”, em determinado intervalo, fornece o deslocamento. Muitas vezes, apenas é dito “a integral da velocidade é igual ao deslocamento”, informação essa que vem a ser abstrata quanto à formação dos conceitos envolvidos e, com isso, passa a ser decorada pelos alunos, e não entendida.

Uma vez compreendido o deslocamento enquanto área sob a curva de uma “função velocidade” em um intervalo definido, que foi objetivo das questões 1, 2 e 3, abriu-se com as questões 4 e 5 a possibilidade de atentar-se aos sinais das áreas, determinados pelo posicionamento das mesmas em relação ao eixo OY, o que é omitido por uma grande parcela dos livros didáticos, dentre os quais os aqui analisados. Calculando as áreas nos intervalos pedidos, com o auxílio da ferramenta “Soma de Riemann de ponto a ponto”, os alunos encontraram resultados positivos para as áreas superiores ao eixo OX, e negativos para as áreas inferiores ao mesmo eixo. Essa percepção foi exposta, no entanto, nessa atividade, não se avançou para aplicações desse conhecimento, visto que um tratamento foi dado na terceira atividade.

Os objetivos da segunda atividade foram alcançados pela maior parte das duplas. No entanto, encontraram-se nas respostas de outras duplas compreensões coerentes, porém, não alinhadas com os objetivos pretendidos pelos pesquisadores. Isso se deu pela abertura dada nas questões; preocupava-se em não se apresentar questões que viessem a direcionar as respostas, por isso perguntava-se “o que pode ser dito em relação a”, dessa forma direcionando-se o olhar, mas não as respostas. Esse é um risco que se corre ao se trabalhar com atividades exploratórias: obter respostas inesperadas. Mas esse fato é algo benéfico e significativo à aprendizagem, visto que novos olhares, distintos dos comuns, podem potencializar o movimento de aprender.

Como mencionado, o tratamento da Atividade Exploratória 3 se vale dos conhecimentos apreendidos nas atividades 1 e 2. Nela, intencionou-se a distinção entre deslocamento e distância. É relevante tratar essa diferenciação, dada a dificuldade de muitos alunos com a mesma, que os leva ao recorrente erro conceitual de colocar distância e deslocamento como iguais. Então, foi apresentada, aos sujeitos, a atividade conforme abaixo:

A função que possibilita a verificação da velocidade (em m/s) de uma determinada partícula é dada por $f(x) = 8x^3 - 31x^2 + 27x$, onde x é o instante medido em segundos.

A imagem abaixo traz a curva que descreve a velocidade atingida pela partícula e também informações relativas à distância e descolamento da partícula com o passar do tempo. Pretende-se analisar especificamente o deslocamento e a distância percorrida pela partícula após 2,5 segundos.

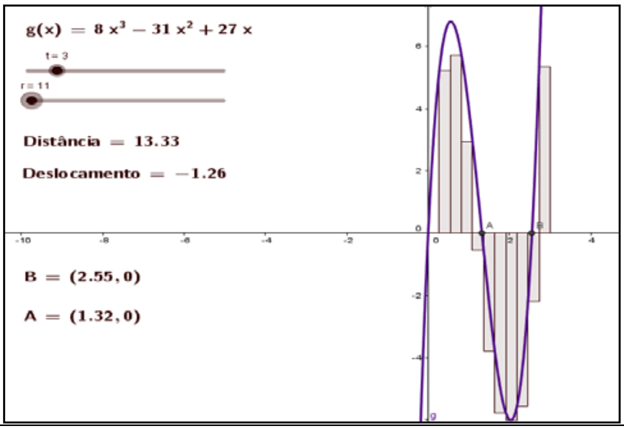

Figura 3: Atividade Exploratória 3.
Fonte: Os autores.

Como visto na figura, foram apresentados valores para distância e para deslocamento. O primeiro objetivo da atividade era perceber que, mesmo variando o tempo, o deslocamento é sempre menor ou igual à distância. O desafio que se põe na atividade é dizer do porquê dessa invariância e, com isso, diferenciar e definir matematicamente estes conceitos.

Expõem-se aqui as questões postas junto às articulações de parte dos alunos.

QUESTÃO 1 - *Com as indicações na tela do Geogebra e as possibilidades de movimento no mesmo, argumente sobre como o cálculo do deslocamento da partícula é feito.*
R1 - Se aumentarmos o número de retângulos, nos aproximamos do deslocamento da partícula.
R2 - O cálculo é feito através da soma das áreas dos retângulos nos intervalos, considerando a área dos retângulos abaixo do eixo x negativa.
R3 - O deslocamento da partícula é relacionado pelo tempo e a distância.
QUESTÃO 2 - *Como é feito o cálculo da distância percorrida pela partícula?*
R1 - É a soma em módulo do deslocamento.
R2 - É a soma do módulo das áreas de 0 a 1,32, de 1,32 a 2,5 e de 2,5 até outro tempo determinado.
R3 - A velocidade é definida pela função matemática, aplicando a integral à função (encontrar a área) para encontrar a distância percorrida pelo objeto.
QUESTÃO 3 - *Com liberdade de manipular o tempo a partir de 2,5 segundos, explique o comportamento do movimento da partícula e a relação entre a distância percorrida e o deslocamento da mesma.*
R1 - O tempo, a distância e o deslocamento aumentam juntos, mas o deslocamento nunca ultrapassa a distância.
R2 - Achamos que a distância é maior porque ela soma a área negativa, enquanto no deslocamento se subtrai a área negativa. É como se a área negativa fosse um percurso contrário ao primeiro percurso tomado.
R3 - A distância é sempre maior que o deslocamento.

Tabela 3: Atividade exploratória n. 3.
FONTE: Material dos autores.

O conhecimento referente aos sinais da área, trabalhado na segunda atividade, mostrou-se significativo para o desenvolvimento das duplas nessa atividade. Uma maioria logo percebeu que a distância seria maior que o deslocamento devido à área negativa, ou “deslocamento contrário”, como articulou uma das duplas.

O passo seguinte tomado pelas duplas foi o de validar essa intuição. Passaram, assim, a olhar para os intervalos e para as áreas/deslocamentos referentes aos mesmos. Com isso, conseguiram verificar que o valor na tela, que representava o deslocamento, referia-se à soma das áreas considerando seus sinais, duas áreas positivas e uma negativa. Por sua vez, o valor correspondente à distância considerava em módulo a área negativa e, com isso, tinha-se a soma de três “áreas positivas”. Essa percepção lhes possibilitou o entendimento da distinção entre o deslocamento e a distância, bem como entenderam o porquê de suas medidas também serem distintas.

As três atividades supracitadas foram pensadas, situando-as em um cenário de exploração, cujo objetivo foi propor situações de estar com conceitos relativos à Soma de Riemann e, por consequência, à Integral, cuja definição pode ser trabalhada em um momento posterior ao desenvolvido em campo nesta pesquisa. Essas atividades possibilitaram aos sujeitos um outro modo de estar com alguns conceitos, distintos dos modos como esses lhes foram apresentados na graduação.

A pesquisa levou à percepção de que os conceitos trabalhados, que já eram familiares aos sujeitos, da forma como lhes foram (pro)postos, trouxeram desafios, especialmente o de pensar suas práticas propondo a seus alunos situações nas quais eles devem envolver-se efusivamente para conquistar o que lhes é de direito, o conhecimento.

8. Algumas considerações pertinentes ao estudo

Pretende-se aqui expressar compreensões visando corroborar o já discutido nos tópicos anteriores. Faz-se isso trazendo algumas falas dos sujeitos quando interrogados sobre o potencial das atividades trabalhadas, essas falas são as que aparecem aqui entre aspas. O processo delineado até então possibilitou compreensões que transcenderam as primeiras intuições, o que permite indagar sobre o que se entende ser fruto da imersão nesta/desta pesquisa.

Entende-se que foi proposto um meio de estar com o conceito de Soma de Riemann que se mostra significativo à aprendizagem. No entanto, entende-se também que a abordagem aqui apresentada é uma dentre as muitas possibilidades de estar com esse conceito. Algumas foram relatadas pelos sujeitos, ao apontarem que, na graduação, estudaram a Soma de Riemann por meio da abordagem “tradicional” e enciclopédica, que para alguns foi suficiente, mas para a maioria foi frágil e pouco significativa, no sentido de que “a aprendizagem foi mecânica, visando apenas guardar informações para melhor desempenho na prova”.

Objetiva-se com esta proposta um aprendizado em que os alunos se doem à atividade, e esta se doe aos alunos em compreensões junto às possibilidades do *software*. Com isso, o aprender vai fazendo-se, constituindo-se de forma que cada passo deste fazimento seja significativo à aprendizagem, o que sugere a relevância do olhar para o processo, e não apenas para o fim do mesmo, o resultado. Dessa forma, a Soma de Riemann pôde ser compreendida e não adquirida ou decorada segundo a perspectiva de um aprendizado mecanicista.

As características aqui enunciadas, no que concerne às Atividades Exploratórias, justificam o tratamento delas nesta pesquisa. Além de oportunizar abertura para o pensamento crítico e reflexivo aos sujeitos no processo junto às mesmas, permitiram-lhes também voltarem seus olhares ao potencial dessas atividades para o ensino e a aprendizagem de matemática, visto que são professores e futuros professores, e a abordagem dada pela exploração lhes interessara como importante ferramenta metodológica. Os sujeitos relataram a relevância das atividades trabalhadas não apenas para a aprendizagem dos alunos, mas também "para o desenvolvimento de um novo olhar para a sala de aula, para os alunos, que podem ser pensados como exploradores do contexto expresso pelo professor". Essa percepção sugere, também, o repensar das práticas educativas, da postura do professor em sala de aula, de forma a somar perspectivas outras ao seu repertório docente, expandindo e potencializando as oportunidades de aprendizagem.

Para explorar são necessárias ferramentas, e o *software* aqui empregado mostrou-se suficiente dentro da proposta das atividades. Afirma-se isso ao olhar tanto para o desenvolvimento dos sujeitos quanto para os resultados expressos pelos mesmos. Entende-se que o *software* possibilitou conjecturas mediante as primeiras intuições provenientes da percepção de algumas singularidades, possibilitou também a validação das conjecturas quando o potencial dinâmico e visual do *software* se doou à percepção de invariantes, ao permitir extrapolar as singularidades, culminando em generalizações possíveis. Com isso, os sujeitos apontaram que "as ferramentas que possibilitam ampliar drasticamente as quantidades, arrastando objetos, permitiram perceber que o que era válido para uma ampliação gradativa do número de retângulos valia também para uma ampliação acelerada de retângulos".

Uma possibilidade que se abre junto ao proposto aqui é a do tratamento de atividades em ambientes não presenciais, visto que o trabalho se deu em um *blog* no qual, para o desenvolvimento das atividades, os sujeitos poderiam estar em qualquer ambiente que não a sala de aula. Não foi assim feito devido à proposta do professor da disciplina, que consistia em uma apresentação em sala seguida da discussão com a turma a respeito da mesma. A experiência vivenciada sugere propor esta possibilidade, visto que constantemente discute-se sobre o perfil dessa geração de alunos, que é natural de uma comunidade informatizada, de um sistema educacional que se abre às possibilidades da Educação a Distância.

Há sempre o incentivo dado aos alunos para que sejam mais independentes, mais ativos no processo de aprendizagem. Essa possibilidade de aprender sem estar em sala de aula é um desafio aos alunos, que, quando encarado, pode desencadear o desenvolvimento das habilidades que os professores desejam que os mesmos tenham, tal qual a de serem mais ativos, uma vez que, para participar de atividades *online*, o aluno deve organizar-se, focar na atividade, ações que se tornam complexas, dados todos os atrativos possibilitados por estar fora da escola.

Não só a Soma de Riemann, mas muitos tópicos do Cálculo podem ser trabalhados na perspectiva que trouxe este estudo. O retorno positivo dado pelos sujeitos permitiu e motivou pensar em outras possibilidades de pesquisas, dentre as quais o tratamento de outros problemas que inquietam nossas práticas com o ensino de Cálculo. Isso levou a mudar o título desta seção, que previamente era "considerações finais". Essas considerações são tomadas, aqui, como pontos de partida para novos estudos, que possam vir a contribuir para o ensino e a aprendizagem de Cálculo, uma vez que esta pesquisa expressa o potencial que subjaz ao tratamento de conceitos matemáticos junto às tecnologias informáticas.

Bibliografia

BARUFI, et al. *Cálculo Diferencial e Integral.* Universidade de São Paulo. 2002. Disponível em <http://ecalculo.if.usp.br/>. Acessado em 14/11/2015.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além de seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. (Org.). *Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica.* São Paulo: Cortez, 2011.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 104 f. 2010.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração.* 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2006.

GLEICK, J. *The Information: A history, a theory, a flood*. São Paulo: Ed. Schwarcs S.A., 2013.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, PGIE-UFRGS, v. 2, n. 1, p. 73-88, maio 1999.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC. 380 p. 2008.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. *Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, derivadas e noções de integral.* Vol. 8. 7. ed. São Paulo: Ed. Atual. 2013.

LARSON, R.; HOSTELER, R. P.; EDWARDS, B. H. *Cálculo.* Vol. 1. 8. ed. Tradução: CASTRO, H. M. A.; FIGUEIREDO, L. M. V.; BROLEZZI, JURIAANS, O. S.; HUMES, A. F. P. C.; TOLOSA, T. A. G. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

LEAL JR., L. C.; ONUCHIC, L. R. *Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista*. Bolema. UNESP. Rio Claro. 2015 (No prelo).

LEAL JR., L. C.; PINHEIRO; J. M. L*. Introdução à Integração*. Rio Claro. 2015. Disponível em <http://integracaoriemann.blogspot.com.br/>. Acesso em 30/09/2015.

OLIVEIRA, G. P. *Fluência tecnológica, comportamento e complexidades: um laboratório de informática, o tempo, as pessoas e outras coisas*. Ensaio. Avaliação e Políticas Públicas em Educação. Rio de Janeiro. v. 13, n. 48. pp. 307-332. 2005.

PIERCE, C. S. *Trechos de Charles Sanders Pierce.* Trad. HARTSHORNE; WEISS. São Paulo: Ed. Cultrix e Edusp. v. 1-6. 164 f. 1975.

PINHEIRO, J. M. L. *A Aprendizagem Significativa em ambientes colaborativo-investigativos de aprendizagem:* um estudo de conceitos de Geometria Analítica Plana. 2013. 202p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. (1998). O *trabalho* do *professor numa aula de investigação matemática.* Quadrante, v. 7, n. 2, p. 41-70.

POWELL, A. B.; ALQAHTANI, M. M. *Tasks and meta-tasks to promote productive mathematical discourse in collaborative digital environments.* In: International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology, 2015, Antalya. *Anais...* Antalya: ICEMST: 2015. p. 84-94.

SILVA, A.; VELOSO, E.; PORFÍRIO, J. ABRANTES, P. *O currículo de matemática e as actividades de investigação.* In: P. Abrantes, et al. (Ed.), Investigações matemáticas na aula e no currículo. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999. p. 69-85.

SILVA, A. P. da; PEREIRA, R. S. G.; DAMIN, W.; YONEZAWA, W. M. *Soma de Riemann e cálculo de área sob uma curva por integrais com auxílio do software Geogebra.* Revista Espacios. Caracas. v. 35, n. 4. 2014.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. *O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa.* In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Curitiba. *Anais...* Curitiba: UTFPR, 2009. p. 1066-1079.

SILVA, B. A. da. *Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 13, n. 3, pp. 393-413, 2011.

SIMÕES, M. D. N. *As TIC na Sala de Aula.* 2000. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/dulces/introdu%C3%A7%C3%A3o.htm>. Acesso em 01/11/2015.

STEWART, J. *Cálculo.* Vol. 1. 7. ed. Tradução: EZ2Translate; GARIBALDI, E. São Paulo: Cengage Learning. 2013.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo.* Vol. 1. 12. ed. Tradução: PEDROSO, K. R.; MACEDO, R. C. S.; ASANO, C. H. São Paulo: Pearson Education do Brasil. 2012.

TRINDADE, E. A. D; WANGHON, E. T. D. O Uso do Software Geogebra em Cálculo Análise Gráfica de Derivada e Integral. In: Anais *VIII Encontro Paraense de Educação Matemática.* Belém. p. 1-11. 2011.

Luiz Carlos Leal Junior: Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP. Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. Tem experiência nas áreas da Educação Matemática e Análise, focando-as sob a perspectiva da filosofia e teoria da aproximação. E-mail: **jhcleal@gmail.com.**

José Milton Lope Pinheiro: Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP, com pesquisa na linha Filosofia e Epistemologia na Educação Matemática. Atua também junto a linha Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática. Trabalha com formação de professores e engenheiros. E-mail: **jmilton.ufjf@gmail.com.**