

## DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A LA ALFABETIZACIÓN PROBABILÍSTICA EN EL AULA: ELEMENTOS PARA SU CARACTERIZACIÓN Y DESARROLLO

**Ángel Alsina, Claudia Vásquez Ortiz**

**Fecha de recepción: 28/06/2016**  
**Fecha de aceptación: 25/10/2016**

<b>Resumen</b>	<p>Este artículo ofrece orientaciones al profesorado de Educación Infantil y Primaria para fomentar la competencia probabilística de los alumnos a través de tareas auténticas. En la primera parte se caracteriza la competencia matemática en general y la competencia probabilística en particular, que se concibe como la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real; su desarrollo se aborda a partir de dos aspectos interrelacionados: los contextos de enseñanza-aprendizaje y las conexiones entre los conocimientos matemáticos. En la segunda parte se describen diversas tareas auténticas, es decir, actividades que simulan un acercamiento a la vida real en un sentido razonable, para desarrollar la alfabetización probabilística en las aulas de Educación Infantil y Primaria.</p> <p><b>Palabras clave:</b> Alfabetización probabilística, competencia matemática, tarea auténtica, Educación Infantil, Educación Primaria</p>
<b>Abstract</b>	<p>This article offers guidelines for Preschool and Primary teachers to help them promote their pupils' probabilistic competence through authentic tasks. The first part defines mathematical competence in general and probabilistic competence in particular, which is conceived as the capacity to access, use, interpret and communicate information and ideas related to probability, in order to carry out and deal effectively with the demands of functions and tasks involving uncertainty and risk in the real world. The competence is treated and developed on the basis of two interrelated aspects: teaching/learning contexts and connections between mathematical knowledge. The second part describes different authentic tasks; i.e. activities that simulate real life situations in a realistic and rational way, in order to develop probabilistic literacy in Preschool and Primary school classrooms.</p> <p><b>Keywords:</b> Probabilistic literacy, mathematical competence, authentic tasks, Preschool Education, Primary Education</p>
<b>Resumo</b>	<p>Este artigo oferece orientações aos professores da Educação Infantil e</p>

	<p>Ensino Fundamental sobre o ensino da competência probabilística utilizando tarefas autênticas. Na primeira parte do trabalho caracteriza-se a competência matemática geral e logo, em específico, a competência probabilística. Essa última é concebida como a capacidade de acessar, utilizar, interpretar e comunicar informações e ideias relacionadas com a probabilidade, a fim de participar e gerir com eficiência as tarefas e funções que envolvem incertezas e riscos no mundo real; seu desenvolvimento é abordado a partir de dois aspectos inter-relacionados: os contextos de ensino-aprendizagem e as conexões entre os conhecimentos matemáticos. A segunda parte descreve várias tarefas autênticas, ou seja, atividades que simulam um contexto de uso real da probabilidade promovendo a alfabetização probabilística nas salas de aula da Educação Infantil e Educação Primária.</p> <p><b>Palavras-chave:</b> alfabetização probabilística, competência matemática, tarefa autêntica, Educação Infantil, ensino fundamental</p>
--	---

## 1. Introducción

- “Estoy seguro que mañana lloverá”
- “Si el primer semáforo está en rojo, estoy casi seguro que los restantes también estarán en rojo”
- “La probabilidad de ganar la lotería es bajísima, sin embargo es muy probable que alguien la gane”
- “Es probable que lo que dice sea verdad”
- “Ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Así que ahora estoy más seguro que en la próxima partida ganaré”

Los ejemplos anteriores ilustran situaciones en las que a diario nos vemos enfrentados al azar y en las que la incertidumbre se hace presente. En muchas ocasiones, nos dejamos confundir fácilmente ante estas situaciones debido a una escasa y errónea comprensión de los fenómenos inciertos. En este sentido, se pone de manifiesto que hace falta una educación para la incertidumbre. La probabilidad es la disciplina que puede dar respuesta a esta educación, que debería iniciarse en la etapa de Educación Infantil y proseguir durante toda la escolaridad. Por esta razón, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000) ha manifestado la conveniencia de que todos los alumnos accedan a estos conocimientos desde el nivel Pre-K-2 (3 años aproximadamente) hasta la etapa 9-12 (18 años aproximadamente). Aunque otros planteamientos americanos retrasan su incorporación hasta el final de la etapa de Educación Primaria (CCSSI, 2010), en nuestro trabajo se asume la visión del NCTM.

En este artículo, pues, vamos a focalizarnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad en Educación Infantil y Primaria, al ser las etapas en las que se ha incorporado más recientemente en el currículo. Asimismo, es donde se han detectado mayores dificultades para enseñar conocimientos probabilísticos que puedan ser usados de forma comprensiva y eficaz para poder hacer frente a una amplia gama de situaciones del entorno que implican la interpretación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones. Estos déficits en la

enseñanza de la probabilidad se deben a varios factores, entre los que destacan la escasa formación del profesorado de estas etapas y, en consecuencia, su débil conocimiento didáctico y disciplinar (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007; Vásquez y Alsina, 2015). Una de las principales consecuencias de estas carencias ha sido que, cuando se han enseñado conocimientos probabilísticos en estas primeras etapas de escolarización, el método predominante ha sido la instrucción a través de un libro de texto (Stylianides, 2009), a pesar de que en su mayoría dejan de lado aspectos claves, como por ejemplo el uso adecuado del lenguaje probabilístico (Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras, 2013). Estos trabajos han puesto en evidencia que los libros de texto no resultan ser el recurso más adecuado para una enseñanza eficaz de la probabilidad, por lo que se precisa una metodología que ofrezca herramientas a los alumnos para que puedan desenvolverse en las situaciones de incertidumbre que plantea constantemente el mundo contemporáneo. Es necesario, pues, avanzar hacia la alfabetización o competencia probabilística (Gal, 2005) a través de tareas auténticas, entendidas como aquellas que simulan un acercamiento a la vida real en un sentido razonable (Palm, 2008), más allá de saber resolver de forma mecánica ejercicios descontextualizados, a través de “fórmulas” que se aplican pero no se comprenden, lo que en muchas ocasiones comporta que, al intentar enseñar probabilidad, se termine sólo aprendiendo aritmética.

Desde este prisma, nuestra finalidad es ofrecer algunas ayudas al profesorado de las etapas de Educación Infantil y Primaria que les permita fomentar la competencia probabilística de sus alumnos a través de tareas auténticas, en el sentido descrito. Para ello, en primer lugar se va a caracterizar la competencia matemática en general y la competencia probabilística en particular, y en la segunda parte se van a ofrecer diversas orientaciones para favorecer su desarrollo en las aulas de Educación Infantil y Primaria.

## 2. De la competencia matemática a la competencia probabilística

Puesto que el principal objetivo de este trabajo es proporcionar algunas ayudas al profesorado de las primeras edades para fomentar la competencia probabilística en el aula, se considera necesario abordar dicha finalidad desde dos perspectivas interrelacionadas que otorguen el fundamento teórico para el diseño de tareas auténticas: a) la caracterización de la competencia matemática y su desarrollo en las etapas de Educación Infantil y Primaria; b) la posterior caracterización y desarrollo de la competencia probabilística en estas etapas educativas.

### 2.1. Caracterización de la competencia matemática y su desarrollo en las primeras edades

Existe abundante literatura que aborda la caracterización de la competencia matemática y su desarrollo, probablemente como consecuencia del énfasis que en su momento otorgó a este enfoque curricular el Proyecto DeSeCo (Definición y Selección de Competencias Clave) de la Red Eurydice de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo, que puso de manifiesto la necesidad de substituir paulatinamente un currículo orientado a la adquisición de contenidos por un

currículo orientado a la adquisición de competencias clave para la vida (Rychen y Salganik, 2004). En síntesis, con este nuevo enfoque curricular se busca que la escuela garantice la alfabetización, en el sentido que los alumnos tienen que comprender el conocimiento y saberlo aplicar en diferentes contextos cuando este conocimiento es necesario.

Alsina (2015) ha realizado recientemente una revisión de las principales aportaciones sobre la noción de “competencia matemática” de varios autores y organismos de reconocido prestigio en el campo de la educación matemática (NCTM, 2000; Niss, 2002; OECD, 2004; entre otros). A partir del análisis de estas aportaciones, concluye que para aprender matemáticas desde este enfoque social es imprescindible fomentar los siguientes aspectos en el aula:

- Pensar matemáticamente: construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones en las que tengan sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y realizar abstracciones.
- Razonar matemáticamente: realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar; argumentar las decisiones tomadas, así como la lección de los procesos seguidos y de las técnicas usadas.
- Plantearse y resolver problemas: leer y entender el enunciado, generar preguntas relacionadas con una situación problemática, planificar y desarrollar estrategias de resolución y verificar la validez de las soluciones.
- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
- Usar las técnicas matemáticas básicas (para contar, operar, medir, situarse en el espacio y organizar y analizar datos) y los instrumentos (calculadoras y TIC, de dibujo y de medida) para hacer matemáticas.
- Interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos con palabras, dibujos, símbolos, números y materiales.
- Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los demás, tanto oralmente como por escrito, usando de forma progresiva el lenguaje matemático. (Alsina, 2015, pp. 12-13).

En relación a la pregunta ¿cómo desarrollar la competencia matemática?, este autor indica que se va adquiriendo de forma progresiva a través de un proceso de enseñanza-aprendizaje que es complejo debido a que, en su esencia, requiere poder aplicar de forma comprensiva y eficaz el conocimiento aprendido en la escuela en todas las situaciones en las que estos conocimientos son necesarios. Por esta razón, considera que para fomentar el desarrollo de la competencia matemática en las aulas de Educación Infantil y Primaria es necesario considerar dos aspectos que se complementan: a) los contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; b) las conexiones entre los conocimientos matemáticos.

Sobre los contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, Alsina (2010) plantea que para favorecer el desarrollo de la competencia matemática es preciso partir de contextos de enseñanza-aprendizaje significativos y ajustados a las necesidades de los alumnos de las primeras edades para aprender matemáticas.

Haciendo un símil con la pirámide de la alimentación, propone la “Pirámide de la Educación Matemática” en la que se indican distintos contextos para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable:

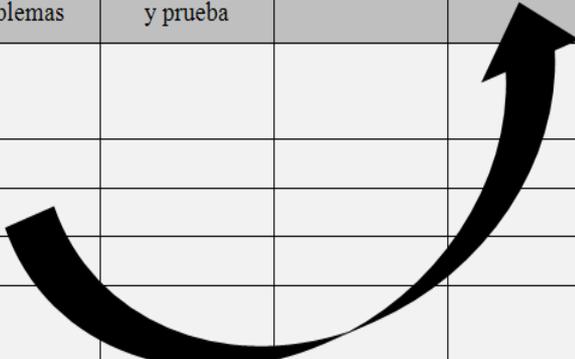
En la base de este organigrama piramidal están los recursos que necesitan todos alumnos y que, por lo tanto, se podrían y deberían “consumir” diariamente para desarrollar la competencia matemática. Ahí están las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día; la observación y el análisis de los elementos matemáticos de nuestro contexto (matematización del entorno); la manipulación con materiales diversos, dado que la acción sobre los objetos posibilita que los alumnos puedan elaborar esquemas mentales de conocimiento; o bien el uso de juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben “tomarse” alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios con un contenido matemático o los recursos tecnológicos como el ordenador y la calculadora. Por último, en la cúspide, se encuentran los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto. (Alsina, 2010, p. 13-14).

Bajo esta mirada es necesario poner especial atención al proceso de enseñanza-aprendizaje y a las diversas interacciones que se dan en el interior del aula, pues no hay que olvidar que el éxito de dicho proceso “depende fundamentalmente de lo que acontece dentro de la clase, en función de cómo interactúan los docentes y los educandos con el currículo” (Ball y Forzani 2011, p. 17). Por tanto, es recomendable centrar los procesos de enseñanza-aprendizaje en situaciones cotidianas que potencien la matematización del entorno. Sin embargo, como se ha indicado en la introducción, el libro de texto sigue teniendo un papel protagonista en el diseño y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, sobre todo cuando se trata de conocimientos que el maestro no domina. Parece necesario, pues, repensar la práctica docente para fomentar el desarrollo de la competencia matemática. En este sentido, en el manual De los Principios a la Acción (NCTM, 2015) se mencionan ocho prácticas basadas en investigaciones: 1) establecer metas matemáticas basadas en el aprendizaje; 2) implementar tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas; 3) usar y vincular las representaciones matemáticas; 4) favorecer el discurso matemático significativo; 5) plantear preguntas deliberadas; 6) elaborar la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual; 7) favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas; 8) obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes.

El NCTM considera que estas ocho prácticas constituyen “un conjunto de acciones muy recomendables para todo el profesorado, asesores pedagógicos y especialistas en matemáticas, así como para todo el personal administrativo de escuelas y distritos y cada uno de los líderes políticos y responsables de políticas” (NCTM, 2015, p. 4).

Con base en estos planteamientos, Alsina (2015) añade otro aspecto para fomentar el desarrollo de la competencia matemática: el trabajo de los contenidos matemáticos a través de los procesos matemáticos.

	Resolución de problemas	Razonamiento y prueba	Comunicación	Conexiones	Representación
Números y operaciones					
Álgebra					
Geometría					
Medida					
Estadística y probabilidad					



**Figura 1.** Conexiones entre contenidos y procesos matemáticos

Fuente: Alsina (2015)

La combinación de contenidos y procesos matemáticos favorece nuevas miradas que enfatizan no sólo el contenido y el proceso, sino -y especialmente- las relaciones que se establecen entre ellos. Partir de este enfoque competencial ya desde las primeras edades, en la que todo está integrado, es especialmente significativo, dado que cuando los niños usan las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, en los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

## 2.2. Caracterización de la alfabetización probabilística y su desarrollo en las primeras edades

El punto de partida imprescindible para abordar la alfabetización probabilística es poner de relieve que la enseñanza de la probabilidad es esencial para ayudar a preparar a los alumnos para la vida en general, y para los eventos aleatorios y fenómenos casuales de su vida cotidiana en particular (Bennett, 1998; Beltrami, 1999; Everitt, 1999). Es por esta razón que, como se ha indicado, la prestigiosa asociación norteamericana de profesores de matemáticas ha incorporado con fuerza la probabilidad en el currículo de matemáticas, caracterizándose por presentar un enfoque más experimental que permita proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde las primeras edades.

La probabilidad se refiere a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de hechos, por lo que debe interpretarse como una medida. No es pues una característica tangible, sino más bien una percepción que puede expresarse a través de medios informales o a través de notaciones matemáticas formales (Gal, 2005), de ahí que coexistan diversos significados de la probabilidad que se

complementan (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático) y que han dado lugar a la teoría de la probabilidad.

Desde esta visión, Gal (2005) caracteriza la alfabetización probabilística vinculándola a la alfabetización estadística, que concibe como la habilidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que permean la vida cotidiana, y para apreciar las contribuciones de la estadística en las decisiones públicas y privadas, profesionales y personales. De forma más concreta, Gal (2002) indica que la alfabetización estadística se refiere a la capacidad de las personas para interpretar, evaluar críticamente, y cuando sea pertinente expresar sus opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos, o fenómenos estocásticos. Gal argumenta, además, que el comportamiento estadísticamente alfabetizado requiere la activación conjunta de componentes cognitivos y de disposición. Los componentes cognitivos implican cinco bases de conocimiento: habilidades de alfabetización, conocimientos estadísticos (incluyendo también algún conocimiento probabilístico, incluso informal), conocimiento matemático, contextual o del mundo del conocimiento, y que se plantee el conocimiento de cuestiones críticas. El componente referente a la disposición se refiere a la presencia de una posición crítica, es decir, la voluntad de adoptar actitudes cuestionando ciertas creencias, como la creencia en el poder de los procesos estadísticos, la creencia en sí mismo como persona capaz de pensar estadísticamente y la creencia en la legitimidad de la adopción de una perspectiva crítica sobre información recibida de fuentes "oficiales" o de expertos.

Desde este prisma, Gal (2002, 2005) describe cinco elementos cognitivos (conocimientos) y tres elementos sobre la disposición (actitudes) que se proponen como los componentes básicos de la alfabetización probabilística. Estos elementos, que figuran en las Tablas 1 y 2, siguen la lógica utilizada por Gal (2002) para describir la construcción de la alfabetización estadística.

Elementos cognitivos	Conocimientos
<p><b>1. Las grandes ideas: variación, aleatoriedad, independencia, previsibilidad/incertidumbre.</b></p>	<p><b>La alfabetización probabilística es una construcción dinámica y relativa.</b></p> <p><b>La aleatoriedad es una construcción resbaladiza que ha sido debatida por muchos estadísticos (un posible punto de vista es que el azar es una propiedad de un resultado).</b></p> <p><b>La independencia implica que los eventos son inconexos y un evento no se puede predecir de otro.</b></p> <p><b>La previsibilidad y la incertidumbre se relacionan con nuestro conocimiento general acerca de la probabilidad de un determinado evento.</b></p>
<p><b>2. Cómo calcular las probabilidades: formas de encontrar o estimar la probabilidad de eventos.</b></p>	<p>Para el cálculo de probabilidades, los alumnos deben estar familiarizados con la manera de determinar la incertidumbre de eventos, tanto para poder entender los estados probabilísticos realizados por otros como para realizar estimaciones sobre la probabilidad de eventos y</p>

	comunicarlo a los demás. Aquí es donde los puntos de vista de la probabilidad clásica, frecuentista y subjetiva son útiles.
<b>3. Lenguaje: los términos y los métodos utilizados para comunicar acerca de la oportunidad.</b>	<p>Los alumnos deben entender el "lenguaje de la oportunidad", es decir, las diversas formas que se utilizan para representar y comunicar acerca del azar y la probabilidad.</p> <p>La probabilidad de eventos se puede representar cuantitativamente por múltiples sistemas, como en una escala de 0-1, fracciones (por ejemplo, 50/50), porcentajes, probabilidades, proporciones, etc., así como gráficamente. Por lo tanto, una expectativa básica es que los alumnos entiendan el significado de diferentes representaciones y se sientan cómodos moviéndose entre ellas.</p>
<b>4. Contexto: la comprensión del papel y las implicaciones de los problemas probabilísticos y mensajes en diferentes contextos y en el discurso personal y público.</b>	Los conocimientos relativos al contexto son necesarios tanto desde el punto de vista funcional como educativo. La comprensión de que el azar y la aleatoriedad no afectarán a los acontecimientos y procesos del mundo real permite a las personas prever que ciertos eventos serán más predecibles, mientras que otros no tanto.
<b>5. Preguntas críticas: cuestiones para reflexionar cuando se trata de probabilidades.</b>	<p>Los alumnos deben saber qué preguntas críticas realizar cuando se encuentran con una declaración de probabilidad o certeza, o cuando tienen que generar una estimación probabilística.</p> <p>Las preguntas deberían referirse a 5 elementos: el contexto (¿en qué medida implica aleatoriedad?); la fuente (¿quién hace una demanda probabilística?); el proceso (¿qué tipo de análisis se usa?); el significado del mensaje (¿qué indica la afirmación probabilística?); y la interpretación reflexiva (¿qué cuestiona el mensaje y cómo se interpreta?)</p>

Tabla 1. Elementos cognitivos de la alfabetización probabilística (Gal, 2005)

<b>Elementos sobre la disposición</b>	<b>Actitudes</b>
<b>1. Postura crítica.</b>	<p>Los mensajes cuantitativos que pueden ser engañosos, unilaterales, sesgados o incompletos (ya sea intencionalmente o no) deberían generar una actitud de cuestionamiento.</p> <p>Es, pues, necesario aprender progresivamente a invocar de forma espontánea la lista de preguntas que generan incertidumbre frente a argumentos que pretenden basarse en datos, informes de resultados, conclusiones de encuestas u otras investigaciones empíricas.</p>
<b>2. Creencias y actitudes.</b>	<p>Se distinguen tres constructos distintos dentro del dominio afectivo en educación matemática: emociones, actitudes y creencias.</p> <p>Es, pues, necesario desarrollar progresivamente una visión</p>

	positiva de sí mismo como individuo capaz de realizar razonamientos probabilísticos en situaciones de incertidumbre que sean relevantes, más que partir de datos anecdóticos o de experiencias personales.
<b>3. Los sentimientos personales en relación a la incertidumbre y el riesgo (por ejemplo, la aversión al riesgo).</b>	El grado de incertidumbre o previsibilidad experimentado puede ser la base de la propia percepción y capacidad para evaluar el riesgo asociado con los eventos o resultados de relevancia para la vida.

**Tabla 2.** Elementos referentes a la disposición de la alfabetización probabilística (Gal, 2002)

Sobre los componentes de la alfabetización probabilística expuestos, Gal aclara que a pesar de presentarlos por separado, todos interactúan entre sí de manera compleja durante el aprendizaje real. Esto significa que una instrucción que se centre sólo en uno o dos de los elementos no será suficiente para desarrollar un "comportamiento alfabetizado de probabilidad".

Considerando, pues, estos diferentes componentes, Gal (2012, p. 4) define la alfabetización probabilística como: "la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real".

Desde este punto de vista, ¿cómo se puede fomentar el desarrollo de la competencia probabilística en las aulas de infantil y primaria? De forma paralela a la respuesta que se ha aportado en relación al desarrollo de la competencia matemática, el abordaje de esta cuestión compleja requiere considerar también dos aspectos interrelacionados: a) los contextos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad; b) las conexiones entre los conocimientos matemáticos, puesto que la probabilidad "proporciona una excelente oportunidad para mostrar a los estudiantes cómo matematizar, cómo aplicar la matemática para resolver problemas reales" (Godino, Batanero y Cañizares, 1987, p. 12).

En relación a los contextos de enseñanza-aprendizaje, para poder plantear tareas auténticas que fomenten la alfabetización probabilística deberían considerarse -además de las aportaciones genéricas expuestas en la sección anterior- las orientaciones específicas de Batanero y Godino (2004, p. 429):

1. Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
2. Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
3. Organizar la recogida de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.

4. Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
5. Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Todavía desde la perspectiva de los contextos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, otros autores (Langrall y Mooney, 2005; Bryant y Nunes, 2012; Nunes, Bryant, Evans, Gottardis y Terlektsi, 2015) y organismos de reconocido prestigio (NCTM, 2000; Sheffield et al., 2002; Chapin, Koziol, MacPherson y Rezba, 2002) han realizado también aportaciones en beneficio del desarrollo de la alfabetización probabilística de los alumnos. Así, por ejemplo, y por lo que respecta a alumnos de 3 a 8 años, el NCTM (2000, p. 113) hace alusión a las situaciones de la vida cotidiana de los alumnos y los juegos: “Las ideas sobre la probabilidad en estos niveles deberían ser informales, y centrarse en juicios que emiten los alumnos con base en sus propias experiencias. Deberían realizarse actividades en las que subyazcan probabilidades experimentales, como lanzar dados”.

Bryant y Nunes (2012) y Nunes et al. (2015), en concordancia con Fischbein (1975), subrayan también la importancia de que el aprendizaje de la probabilidad en las primeras edades pasa necesariamente por interpretar y resolver adecuadamente situaciones problemáticas de la vida cotidiana, usar materiales manipulativos, etc.

En relación al segundo aspecto imprescindible para poder abordar el desarrollo de la alfabetización probabilística, que hace referencia como se ha indicado a las conexiones entre los conocimientos matemáticos, nos parece fundamental abordarlo desde las relaciones existentes principalmente entre los conocimientos numéricos, estadísticos y probabilísticos, además del planteamiento genérico de Alsina (2015) de trabajar de forma sistemática los contenidos de probabilidad a través de los distintos procesos matemáticos.

Desde esta perspectiva, para fomentar el desarrollo de la alfabetización probabilística es necesario considerar sus distintas fases de adquisición, en las que se entrelazan conocimientos matemáticos de distinta naturaleza. En sintonía con los planteamientos del NCTM (2000), el aprendizaje de la probabilidad en las primeras edades pasa por los siguientes estadios: a) se inicia de manera informal en las primeras edades, introduciendo el vocabulario vinculado a las nociones de probabilidad por medio de actividades centradas en los juicios que emiten los alumnos en base a sus propias experiencias, llevándoles a responder preguntas sobre la posibilidad de ocurrencia de sucesos, cuyas respuestas consideren el empleo de términos tales como: seguro, probable o imposible; b) sigue con la realización de experimentos aleatorios con material concreto como bolitas, fichas de colores, monedas, ruletas, etc. y de este modo comenzar a aprender cómo cuantificar la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso, además de empezar a comprender que la probabilidad de un suceso imposible se designa por medio del 0 y la de un suceso seguro por medio del 1, vinculando así a los alumnos

con la asignación numérica de la probabilidad a la ocurrencia de ciertos sucesos; y c) se finaliza la Educación Primaria con el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos sencillos, dejando para etapas posteriores el cálculo de la probabilidad de sucesos dependientes e independientes, así como conceptos de mayor complejidad.

### 3. Tareas auténticas para fomentar la alfabetización probabilística en Educación Infantil y Primaria

De acuerdo con los aspectos descritos hasta ahora, en este apartado se presentan diversas tareas auténticas que buscan ofrecer algunas directrices para responder a la pregunta ¿cómo enseñar probabilidad para fomentar el desarrollo de la alfabetización probabilística? Para el diseño de estas tareas auténticas se ha considerado el modelo de alfabetización probabilística propuesto por Gal (2002, 2005), así como los planteamientos de Godino, Batanero y Cañizares (1987) para abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje del azar y probabilidad en el currículo escolar.

#### 3.1. Aprendizaje de las primeras nociones probabilísticas

Niveles: 3-6 años

*Finalidad:* aprender lenguaje probabilístico elemental (imposible, probable, seguro) a partir de situaciones de la vida cotidiana, fomentando que los alumnos emitan juicios sobre la posibilidad de ocurrencia de ciertos sucesos.

*Contenidos implícitos:* grados de posibilidad de un determinado suceso, utilización de lenguaje probabilístico (posible, imposible, poco posible, etc.).

*Contextos de aprendizaje:* situaciones de la vida cotidiana de los alumnos, materiales manipulativos y juegos, acordes a su edad, que muestren situaciones en que la incertidumbre se hace presente.

*Desarrollo:* se presenta la situación a los alumnos y se establece un diálogo con ellos que invite a usar vocabulario probabilístico, a clasificar situaciones según si son posibles de ocurrir o no, etc. Por ejemplo, observando el comportamiento del tiempo atmosférico, predecir el tiempo que hará el día siguiente (figura 2); estimar qué número es posible que salga al lanzar un dado; dada una bolsa con bolitas, responder qué bolita tiene más posibilidades de salir, etc. Así, por medio de la realización de experimentos aleatorios con bolitas, fichas de colores, monedas, ruletas, etc. (figura 3), los alumnos irán incorporando de forma gradual el lenguaje probabilístico.



**Figuras 2 y 3.** Situaciones de incertidumbre para fomentar la adquisición de lenguaje probabilístico elemental

### 3.2. Cuantificación de la incerteza. Un primer paso: los grados de posibilidad

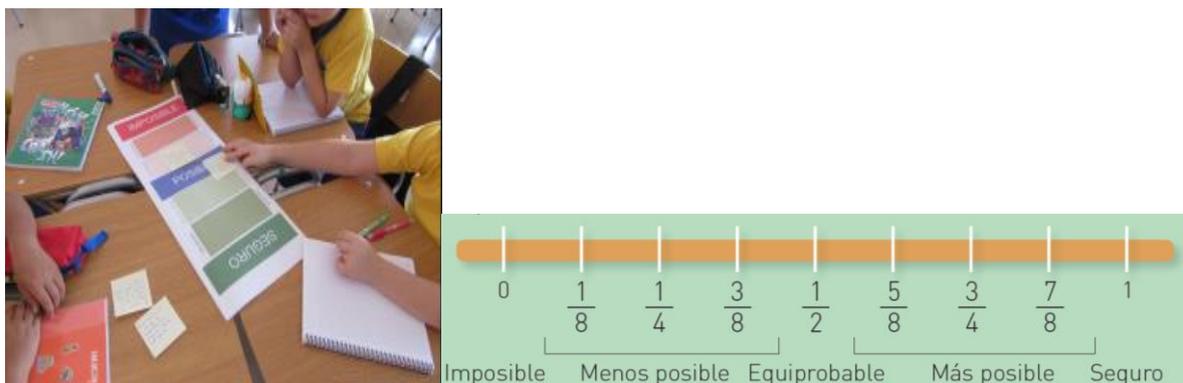
*Niveles:* 6-8 años

*Finalidad:* fomentar la expresión de predicciones sobre el comportamiento de ciertos fenómenos y sus resultados.

*Contenidos implícitos:* grados de posibilidad de ocurrencia de un suceso (imposible, casi imposible, poco posible, posible, bastante posible, casi seguro y seguro).

*Contextos de aprendizaje:* situaciones de vida cotidiana y materiales manipulativos (imágenes, etc.).

*Desarrollo:* Se organizan los alumnos en grupos de 4 ó 5 y se entrega a cada grupo un conjunto de situaciones que deben clasificar según el grado de posibilidad de que ocurra cierto resultado (figura 4). Posteriormente, mediante el planteamiento de buenas preguntas, se fomenta que los alumnos comprendan que las situaciones catalogadas como “imposibles” tienen probabilidad de ocurrencia 0, mientras que las situaciones clasificadas como “seguras” tienen probabilidad de ocurrencia 1, vinculando así a los alumnos con la asignación numérica de probabilidad a la ocurrencia de ciertos sucesos. Desde esta perspectiva, otra tarea auténtica consiste en plantear a los alumnos que expresen situaciones y las sitúen en la recta numérica que se muestra en la figura 5.



Figuras 4 y 5. Situaciones de incertidumbre para fomentar la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un hecho

### 3.3. Experimentación y probabilidad de ocurrencia

*Niveles:* 8-10 años

*Finalidad:* organizar la recogida de datos de forma que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.

*Contenidos implícitos:* espacio muestral, suceso o evento, experimento aleatorio, probabilidad de ocurrencia, comparación de probabilidades.

*Contextos de aprendizaje:* materiales manipulativos (por ejemplo, bolsas con bolitas de colores) y recursos tecnológicos (*applets*).

*Desarrollo:* se organiza a los alumnos en grupos de 4 ó 5 y se entregan 3 bolsas con 8 bolitas rojas y amarillas en cada una, distribuidas en distinta proporción (figura 6). Se plantea el experimento de extraer, sin mirar, una bolita amarilla de cada bolsa, acompañado de la realización física del experimento, repetida en múltiples ocasiones, ya que así se dará una justificación práctica a las respuestas que se intuyan a partir del concepto primario de probabilidad al que se puede llegar en estas edades. Se plantean preguntas para que los alumnos discutan sus intuiciones probabilísticas y por medio de la experimentación logren contrastar sus predicciones:

- si tienes que sacar una bola amarilla para ganar un premio, sin mirar dentro de la bolsa, ¿cuál elegirías para hacer la extracción?
- ¿en qué bolsa hay más probabilidades de obtener una bola roja?
- ¿cuántas bolas hay que añadir a cada bolsa y de qué color para que en las tres bolsas exista la misma probabilidad de sacar una bola amarilla?
- Siguiendo este mismo planteamiento, se pueden llevar a cabo experimentos con lanzamientos de monedas, planteando preguntas como por ejemplo:
- ¿si lanzas una moneda diez veces, qué es más probable, que salga más veces cara o más veces cruz?

- ¿y si la lanzas 100 veces?, ¿y 400?

Dado que este tipo de experimentos requiere muchos ensayos, se aconseja el uso de *applets* (por ejemplo, “lanzamiento de monedas” de la Utah State University: [http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames\\_asid\\_305\\_g\\_4\\_t\\_5.html?from=category\\_g\\_4\\_t\\_5.ht](http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_305_g_4_t_5.html?from=category_g_4_t_5.ht)). Estos recursos permiten a los alumnos, a partir de entornos virtuales, ver el comportamiento de una moneda al ser lanzado, por ejemplo, 400 veces al aire.



Figuras 6 y 7. Situaciones de incertidumbre para trabajar la experimentación y probabilidad de ocurrencia

### 3.4. Equiprobabilidad, conteo y principio multiplicativo

*Niveles:* 10-12 años

*Finalidad:* identificar la equiprobabilidad de los resultados de un experimento aleatorio, a partir de la utilización del principio multiplicativo como regla que simplifica el proceso de conteo.

*Contenidos implícitos:* equiprobabilidad, conteo del número de resultados de un suceso, espacio muestral, principio multiplicativo (combinatoria), noción intuitiva de la regla de Laplace.

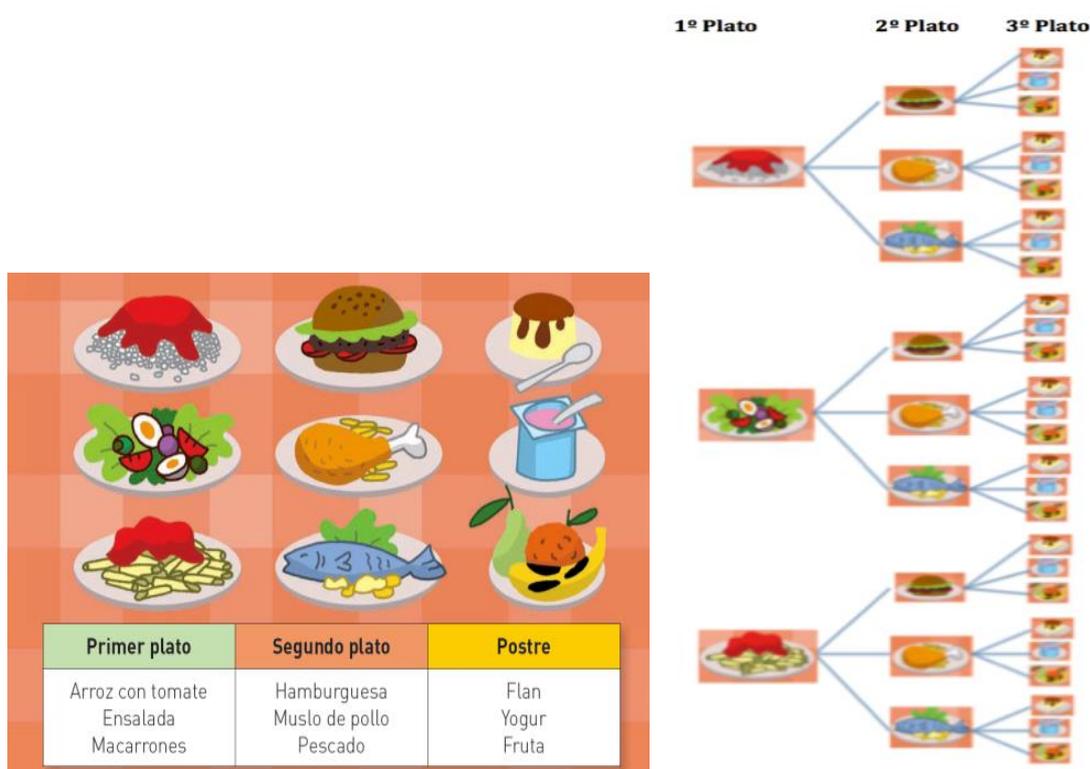
*Contextos de aprendizaje:* situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos, etc.

*Desarrollo:* se plantea a los alumnos una situación que consiste en determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso equiprobable, como por ejemplo elegir un determinado menú en una carta de un restaurante con tres primeros platos, tres segundos platos y tres postres (figura 8). Para ayudar a los alumnos a visualizar y contar las combinaciones posibles, es aconsejable usar como soporte imágenes (tarjetas) con los diferentes platos. A continuación se plantean preguntas del tipo:

- ¿cuántos menús distintos puedes elegir?

- realiza un diagrama para representar los menús.
- si ya has elegido el primer plato y el segundo plato, ¿cuántos menús distintos puedes hacer?

Como se ha indicado, el uso de material concreto en estas situaciones (por ejemplo, tarjetas con los distintos platos), puede facilitar la representación por medio de un diagrama de árbol así como la determinación del espacio muestral para el posterior cálculo de probabilidades de sucesos equiprobables.



**Figuras 8 y 9.** Situación de incertidumbre para trabajar la equiprobabilidad, el conteo y el principio multiplicativo (combinatoria)

#### 4. Consideraciones finales

En este trabajo se ha puesto de manifiesto la necesidad de fomentar de manera sistemática la alfabetización probabilística desde la etapa de Educación Infantil y durante toda la etapa de Educación Primaria, con el propósito principal de que los alumnos adquieran herramientas que les permitan interpretar adecuadamente situaciones en las que la incertidumbre se hace presente y tomar decisiones al respecto.

A lo largo del artículo se ha puesto de manifiesto que la enseñanza de la probabilidad en las etapas de Educación Infantil y Primaria dista todavía de ser una enseñanza eficaz, en el sentido planteado por el NCTM (2000): “una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender; y

luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien” (p. 17). La falta de una enseñanza eficaz de la probabilidad implica, como se ha indicado, que los alumnos no tengan acceso a conocimientos imprescindibles para poder usarlos de manera comprensiva en las situaciones de su vida cotidiana que implican la interpretación de mensajes probabilísticos y la toma de decisiones. Se ha hecho alusión a que la principal razón que se atribuye a una enseñanza deficitaria de la probabilidad en las primeras etapas educativas es, principalmente, la escasa o nula formación del profesorado y, en consecuencia, su débil conocimiento didáctico y disciplinar (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007; Alsina y Vásquez, 2015). Debe considerarse también que, como consecuencia directa de esta falta de conocimiento didáctico y disciplinar sobre la probabilidad, a menudo la enseñanza de la probabilidad se reduce a la mera instrucción a través de un libro de texto (Stylianides, 2009), sin ofrecer oportunidades a los alumnos para que tengan una verdadera experiencia estocástica.

De ello se desprende que es necesario un mayor desarrollo profesional del profesorado que contribuya a fomentar la alfabetización probabilística en el aula. Y muchos maestros que se sienten responsables del aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos, conscientes de su falta de conocimiento en este ámbito, están pidiendo a voces aportaciones que contribuyan a su propio avance profesional: “los maestros de matemáticas reconocen que su propio aprendizaje nunca termina y buscan siempre mejorar y perfeccionar su conocimiento matemático para la enseñanza, de la educación matemática y su cognición de los alumnos en cuanto aprendices de matemáticas” (NCTM, 2015, p. 99). Siguiendo los planteamientos de autores que, en el contexto de la didáctica de la probabilidad, llevan muchos años realizando aportaciones que contribuyan a esta finalidad (Gal, 2002, 2005, 2012; Batanero y Godino, 2004; Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Batanero, Ortiz y Serrano, 2007), nuestro trabajo pretende aportar un grano de arena más para fomentar la enseñanza sistemática de la probabilidad en las aulas. Y de forma más concreta, procurar romper con la instrucción probabilística a partir de situaciones de enseñanza descontextualizadas para avanzar hacia el desarrollo de la alfabetización probabilística a través de tareas auténticas.

## Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT INICIACIÓN N° 11150412 financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

## Bibliografía

Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.

Alsina, Á. (2015). *Cómo fomentar el aprendizaje de las matemáticas en el aula. Ideas clave para la Educación Primaria*. Barcelona: Editorial Casals.

Ball, D. y Forzani, F. (2011). Building a Common Core for Learning to Teach and Connecting Professional Learning to Practice. *American Educator*, 35, 17–21.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). VI. Estocástica: estadística y probabilidad. En J.D. Godino (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 405-455). Departamento de Didáctica de las Matemáticas: Universidad de Granada.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Eds.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Batanero, C., Ortiz, J.J. y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 7-16.

Beltrami, E. (1999). *What is random? Chance and order in mathematics and life*. Nueva York: Copernicus/Springer-Verlag.

Bennett, D. J. (1998). *Randomness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability*. Londres: Nuffield Foundation.

Chapin, S., Koziol, A., MacPherson, J. y Rezba, C. (2002). *Navigating through Data Analysis and Probability in Grades 3-5*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

CCSSI (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Recuperado de: [http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math\\_Standards1.pdf](http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf)

Everitt, B. S. (1999). *Chance rules: An informal guide to probability, risk, and statistics*. Nueva York: Copernicus/Springer-Verlag.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic reasoning in children*. Dordrech: Reidel.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Nueva York: Springer.

Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. En S.J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-7) [en línea]. Recuperado de: <http://www.icme12.org/upload/upfile2/tsg/2088.pdf>.

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos teóricos y propuestas curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.

Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2005). Characteristics of elementary school students's probabilistic thinking. En G. Jones (Eds.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 95-120). Nueva York: Springer.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Gottardis, L. y Terlektsi, M.E. (2015). *Teaching mathematical reasoning: Probability and problem solving in Primary School*. Oxford: University of Oxford.

OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. París: OECD.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 37–58.

Rychen, D.S. y Salganik, L.H. (2004). *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida*. México: Fondo de Cultura Económica.

Sheffield, L.J., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C.R., Greenes, C. y Small, M. (2002). *Navigating thought Data Analysis and Probability in Prekindergarten-Grade 2*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48.

#### **Autores:**

Alsina, Ángel: **Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España)**. Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina.

Email: [angel.alsina@udg.edu](mailto:angel.alsina@udg.edu)

Vásquez Ortiz, Claudia: **Profesora de Matemática y Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile**. Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación son la didáctica de la matemática, la didáctica de la probabilidad y la formación del profesorado de primaria.

Email: [cavasque@uc.cl](mailto:cavasque@uc.cl)