

Resultados de una intervención didáctica basada en el modelo 3UV en estudiantes de primaria

Resultados de uma intervenção didática baseada no modelo 3UV em alunos do ensino fundamental

Tzindejeh Rodríguez Quintero, José Antonio Juárez-López, Estela de Lourdes Juárez-Ruiz

Fecha de recepción: 13/03/2022

Fecha de aceptación: 15/04/2022

<p>Resumen</p>	<p>El presente trabajo muestra los resultados de una investigación cuyo objetivo fue indagar el efecto de una intervención didáctica con estudiantes de primaria en el desarrollo temprano del pensamiento algebraico. Para tal fin, se tomó como base de diseño y análisis el modelo 3UV para incorporar el trabajo algebraico con los tres principales usos de la variable. En este estudio se incluyen los resultados del pre-test y el post-test, así como algunas de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, sobre todo aquellas que más llamaron la atención por su misma naturaleza. Palabras clave: Álgebra, educación primaria, intervención educativa, pensamiento matemático</p>
<p>Abstract</p>	<p>This work shows the results of an investigation whose objective was to investigate the effect of a didactic intervention with primary school students on the early development of algebraic thinking. The 3UV model was taken as a basis for design and analysis to incorporate algebraic work with the three main uses of the variable. The results of the pre-test and post-test are included in this study, as well as some of the answers provided by the students, especially those that attracted most attention by their very nature. Keywords: Algebra, elementary school, educational intervention, mathematical thinking</p>
<p>Resumo</p>	<p>O presente trabalho mostra os resultados de uma investigação cujo objetivo foi investigar o efeito de uma intervenção didática com alunos do ensino fundamental no desenvolvimento inicial do pensamento algébrico. Para isso, o modelo 3UV foi usado como base para projeto e análise para incorporar o trabalho algébrico com os três principais usos da variável. Este estudo inclui os resultados do pré-teste e pós-teste, bem como algumas das respostas dadas pelos alunos, especialmente aquelas que mais chamaram a atenção pela sua própria natureza. Palavras-chave: Álgebra, educação primária, intervenção educativa, pensamento matemático</p>

1. Introducción

El álgebra puede parecer dirigida solo para aquellos que tengan cualidades específicas para lograr entenderla, hasta podría creerse que aún se tiene en mente que esta área sigue siendo para un grupo selecto. El hecho de mencionar que la aritmética resulta fácil posiblemente se deba a que está relacionada con situaciones que se pueden vivir diariamente como ir a comprar mercancías y pagar. Pero con el álgebra es distinto, se le percibe como una cuestión aislada que raramente o tal vez nunca será empleada en la cotidianidad de la vida. Castro et al. (2011) comentan que el álgebra es percibida como un “guardián” que no permite el acceso a los estudiantes hacia niveles superiores de estudio. Entonces, es necesario un cambio para que ese “guardián” permita el paso a todo aquel que lo desee o lo requiera. Podríamos decir que el álgebra debe presentarse a los alumnos como algo diferente, alcanzable, en lugar de hacerles ver que se trata de cuestiones tan complicadas que hasta resultan difíciles de explicar para los mismos profesores.

Se puede apreciar claramente que las investigaciones respecto al aprendizaje del álgebra son tema de interés entre la comunidad de educación matemática. Como menciona Ursini (2011), desde los setentas las investigaciones relacionadas con las dificultades en el aprendizaje del álgebra han resultado ser vastas. En ellas, los investigadores han realizado numerosas propuestas, pero desgraciadamente las dificultades que presentan los estudiantes aún siguen siendo palpables.

Para esta investigación se consideró importante el trabajo algebraico en primaria ya que como menciona Castro (2012) “El aprendizaje del álgebra se hace difícil a la mayoría de los estudiantes. Esta es una afirmación con la que están de acuerdo las comunidades de profesores y de investigadores en educación matemática” (p.76). La propuesta que se describe en este artículo permitió que en el grupo de estudiantes hubiera mejora en el empleo de habilidades relacionadas con el uso del pensamiento pre-algebraico.

2. Problemas y objetivos

Al comenzar este proceso de investigación se optó por revisar bibliografía relacionada con el cambio curricular de álgebra temprana y se decidió establecer al Modelo 3UV como fundamento para desarrollar este proyecto. La investigación se basó en la siguiente pregunta: ¿Cuál es el efecto sobre el pensamiento pre-algebraico que tienen unidades didácticas basadas en el modelo 3UV en alumnos de 6to grado de primaria? El objetivo general fue “Analizar el efecto sobre el pensamiento pre-algebraico que tiene una intervención basada en el modelo 3UV con estudiantes de 6° grado de primaria. Mientas que los objetivos específicos se describen a continuación:

- Evaluar el desempeño de un grupo de estudiantes de 6° grado como resultado de la implementación de unidades didácticas diseñadas con base en el modelo 3UV.
- Valorar los procedimientos y estrategias mostrados por los estudiantes en cada una de las actividades propuestas para los tres usos de la variable.
- Desarrollar en los alumnos los tres usos de la variable.
- Describir el avance entre el conocimiento aritmético y pre-algebraico.

- Medir el rendimiento en el uso de las variables a través de un pre y post test.

3. Antecedentes y marco teórico

La introducción del álgebra al currículo de primaria no es algo tan novedoso, ya muchos otros han realizado trabajos de intervención en el aula que apoyan la idea del álgebra temprana, como es el caso de Radford (2011) quien comenta que el introducir progresivamente el álgebra en los primeros grados, puede facilitar el acceso de los estudiantes a conceptos algebraicos más avanzados en grados posteriores.

Kilpatrick (2011) dice que “El álgebra no es algo que deba posponerse hasta que se haya dominado la aritmética, sino que debe estar presente en el plan de estudios desde el principio” (p.126). Lo mencionado anteriormente tiene lógica porque las dos áreas se pueden trabajar simultáneamente, lo que permitiría a los alumnos desarrollar con eficiencia su pensamiento algebraico dejando a un lado la transición abrupta entre ambas.

En algunos países, como mencionan Cai et al. (2011) han decidido que el álgebra debe estudiarse formalmente e incluirla directamente en los programas de estudio al contrario de otros que postergan su aparición hasta el octavo o noveno grado. Al incluir el álgebra desde un inicio esos países han logrado un mayor rendimiento académico en sus alumnos al enraizar álgebra y entrelazarla con la aritmética.

Cai et al. (2011) comentan que el beneficio de empezar con el estudio del álgebra desde la primaria puede notarse a simple vista; en el caso de Singapur los conceptos algebraicos son introducidos desde sexto grado. Watanabe (2011) explica lo que sucede en Japón, en donde no hay una materia que se llame álgebra en primaria ni en secundaria, pero en el currículo de primaria se encuentran establecidas actividades algebraicas desde primer grado.

El surgimiento del álgebra temprana se debe principalmente, como menciona Socas (2011), a la forma en que se ha tratado de comprender la relación existente entre Aritmética y el Álgebra. Debe existir un cambio curricular donde no solo se les vea como una transición entre una y otra sino encontrar verdaderamente cómo se relacionan para incorporarlas simultáneamente. Esto puede lograrse tomando en cuenta los resultados de las investigaciones enfocadas sobre las dificultades y errores en la enseñanza de ambas.

La edad para comenzar a trabajar con el álgebra en actividades escolares no está especificada, es por lo que resulta bastante común observar estudios cuyo rango de edad puede resultar bastante amplio ya que puede comenzar con alumnos que se encuentran en grados preescolares. También se ha percibido el gran empeño que tienen algunos investigadores por enfocarse en trabajar con alumnos de primaria tal es el caso de Schliemann et al. (2011), que decidieron encaminar su trabajo hacia el desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de tercer grado de primaria. Su investigación demostró que después de trabajar a través de problemas verbales y notación algebraica existió un avance considerable en el desarrollo del pensamiento algebraico. En los resultados comentaron que los alumnos llegaron a reconocer a las variables no solo como incógnitas, sino como representaciones generales.

Se puede apreciar que en la mayoría de los estudios mencionados anteriormente se hace énfasis en que al trabajar con variables es necesario

abordarlas desde la generalización y posteriormente se avance hacia otros aspectos del pensamiento algebraico. Debido a que tantas investigaciones se han realizado bajo un camino similar, podría parecer que esa es la manera más viable, aunque es necesario tomar en cuenta otras visiones que permitan ir trabajando con ellas o bien realizar algunos ajustes sobre las propuestas que ya han sido efectuadas con anterioridad y que por supuesto han permitido tener un punto de partida para futuras investigaciones.

3.1. El modelo 3UV

El modelo 3UV surgió como una propuesta que engloba a los tres usos principales de la variable que se estudian en la educación secundaria: la variable como incógnita, la variable como número general y la variable en relación funcional. Aunque el modelo 3UV se enfoca principalmente en el trabajo con estudiantes de secundaria, no descarta la idea de incorporarlo en otros grados. Tal es el caso del estudio realizado por Juárez (2011), quien detectó las dificultades que se manifestaron en docentes de matemáticas en educación secundaria al aplicárseles un cuestionario de álgebra elemental, en el que se observó la necesidad de mejorar sus destrezas algebraicas centradas en esa rama para que su conocimiento sea más sólido y por consiguiente sus clases se vean fortalecidas con una mejor preparación.

Investigaciones previas como la de Socas (2011), ya han sentado un precedente importante acerca de cómo los alumnos han logrado desarrollar o potenciar su pensamiento algebraico a través de propuestas enfocadas en la generalización, pero para este estudio se considera que, en lugar de trabajar con las variables de manera aislada, el mejor camino es haciendo uso del modelo 3UV desarrollado por Ursini y Trigueros (2001). El motivo principal para hacer uso de este modelo es debido a la flexibilidad que ofrece al abordar cada una de las diferentes conceptualizaciones de la variable.

Como se mencionó anteriormente, con el modelo 3UV es posible trabajar con grupos de diferentes edades, tal es el caso del estudio realizado por Lluvia y López (2011), quienes decidieron implementarlo en tercer grado de primaria. En esta investigación se pudo apreciar que no trabajaron con todas las variables propuestas en el modelo, únicamente se enfocaron en la variable como incógnita y como número generalizado. Decidieron llevar a cabo su trabajo con un grupo control y experimental a través de intervenciones didácticas. En los resultados de su investigación encontraron diferencias entre pre-test y post-test en el grupo experimental pero no en el de control, concluyendo que haber aplicado el modelo 3UV como herramienta resultó bastante útil.

Por otra parte, Durán (1999) se basó en el modelo 3UV con la finalidad de potenciar el pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de sexto grado de primaria. En este caso únicamente empleó en sus intervenciones la variable como número general. El progreso de los estudiantes es evidente en los resultados que presenta como anexos llegando a concluir que las intervenciones basadas en el modelo son adecuadas para lograr los objetivos fijados desde el inicio de su trabajo.

Las investigaciones mencionadas anteriormente sientan un precedente idóneo para trabajar el pensamiento algebraico, en específico el empleo del modelo 3UV con estudiantes de primaria, y así, llevar a cabo una secuencia didáctica en la que figuren los tres principales usos de la variable.

Este modelo es descrito por Ursini (2011) “como una herramienta teórica desarrollada durante varios años de trabajo y pruebas” (p.69), así que es parte de una seria investigación cuyo desarrollo no ha sido fortuito. Este modelo ya ha sido ampliamente utilizado, pero en palabras de la autora “es perfectible”. Esto permite que las actividades que se deseen realizar sean suficientes y no solamente se deban aplicar las que hayan sido realizadas previamente. Este modelo realiza una labor triple. Primero, trabajar con cada uno de los usos de la variable, después reunir las todas en una actividad integradora donde los alumnos puedan pasar de uno de los usos a otro y por último seguir en la espiral de actividades trabajando con cada uso, pero ahora con un grado mayor de dificultad.

Para este trabajo se contempló el empleo del modelo 3UV propuesto por Ursini et al. (2005), ya que se considera como el más adecuado debido a su forma de introducir cada uso de las variables y relacionarlas de manera que no se perciban como algo aislado, además mencionan que tanto la interpretación, la simbolización y la manipulación de la variable tienen el mismo grado de relevancia, lo que parece ser lo más pertinente, de lo contrario se enfrascaría a los alumnos en visualizar de una sola manera a las variables, lo cual podría representarles obstáculos en grados de escolaridad posteriores.

3.2. Aspectos del modelo 3UV

El modelo surge principalmente como propuesta para la enseñanza y manipulación de los tres principales usos de la variable. Cada uno de los tres usos se desglosa en aspectos descritos por Ursini como a continuación se presentan:

Incógnita específica

- I1** Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
- I2** Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.
- I3** Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
- I4** Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.
- I5** Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Número general

- G1** Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.
- G2** Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor
- G3** Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.
- G4** Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
- G5** Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Relación funcional

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema. (Ursini et al., 2001, pp. 328-329)

Para la presente investigación se seleccionaron solo algunos aspectos de cada uno de los tres usos, como se puede apreciar a continuación en la Tabla 1.

Variable como incógnita	Variable como número general	Variable en relación funcional
I1, I2, I3, I4	G1, G3, G5	F1, F2, F3, F6

Tabla 1. Aspectos seleccionados para cada variable. Fuente: elaboración propia.

Esta selección se debió a que se consideraron como los más pertinentes para que fuesen trabajados con estudiantes de primaria, primeramente, porque en los aprendizajes clave uno de sus ejes es *Número, álgebra y variación*, lo que abre la puerta al trabajo algebraico. Se trabajó también bajo el supuesto de que esos aspectos se podrían desarrollar eficazmente, ya que en los aprendizajes esperados para sexto grado se pueden apreciar algunos que son la antesala para el trabajo con dichos aspectos. Tales aprendizajes, propuestos por la Secretaría de Educación Pública (2017), dicen que el estudiante “Analiza sucesiones de números y de figuras con progresión aritmética y geométrica, calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con un número natural como constante, resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones” (p. 234). En la sección de orientaciones didácticas se pueden percibir como sugerencias algunas actividades o preguntas que se pueden plantear en el grupo, como ¿Cuánto necesito sumar o restar a cierta cantidad para obtener otra previamente determinada? Se les muestran tablas para que calculen los valores faltantes en situaciones de proporcionalidad, dándoles el valor unitario y en otros ejemplos no. También se les proponen secuencias de figuras para que ellos las completen y expliquen la regularidad de la sucesión.

Al interior de este modelo, podemos destacar que “propone una enseñanza en espiral que acerque gradualmente a los alumnos al trabajo con los distintos usos de la variable en situaciones cada vez más complejas, para así abordar las diversas temáticas del álgebra” (Ursini et al., 2005, p. 39). Esto quiere decir que se deben trabajar por separado actividades que incluyan solo uno de los usos de la variable

para posteriormente llevar a cabo tareas que involucren los tres usos. La primera fase de esta enseñanza en espiral juega un papel importante ya que mediante ella se pretende lograr la comprensión de cada uno de los distintos usos de la variable, mientras que en la fase integradora se tiene como finalidad la de desarrollar en los alumnos la capacidad de pasar entre los diferentes usos. Es necesario contemplar que, al ser una espiral en ascenso, cada actividad debe tener un grado de complejidad cada vez más demandante, donde se diferencien los usos y al terminar debe seguirle una actividad integradora.

4. Metodología

4.1. Diseño de la investigación

Durante esta investigación se pretendió, por un lado, comprender, describir e interpretar el proceso de trabajo y los resultados obtenidos por un grupo de estudiantes de sexto grado de primaria al ser partícipes en la implementación de las secuencias didácticas basadas en el modelo 3UV, y, de esta manera conocer los resultados que se obtienen al trabajar con un tipo de actividades específicas diseñadas bajo ese esquema. Se consideró verificar si es que a través de ellas se lograría introducir a los alumnos a los distintos usos de las variables. Asimismo, se pensó que era oportuno desarrollar este trabajo bajo un enfoque interpretativo para que se pudieran tomar en cuenta nuevas cuestiones que en un principio no se habían vislumbrado, pero por supuesto sin perder la noción principal de la investigación.

Por lo tanto, la investigación es de tipo mixta. La parte cualitativa se realizó mediante un análisis de contenido de las producciones de los estudiantes durante la aplicación de la secuencia didáctica y el método de observación participante de tipo no estructurada. Este tipo de observación fue la más adecuada ya que, de esta forma, se lograría registrar las acciones realizadas por los estudiantes sin enfocarse únicamente en una sola cuestión y así poder analizar otras variables que pudieran surgir durante el desarrollo de las secuencias.

La parte cuantitativa fue pre-experimental con un diseño de preprueba/posprueba con un solo grupo como lo mencionan Cohen y Manion (2002). Se aplicó un pre-test y posteriormente se realizó la intervención a través de las unidades didácticas basadas en el modelo 3UV. Al finalizar la intervención, se aplicó un post-test (mismo instrumento), para revisar el desempeño de los estudiantes en cuanto al empleo del pensamiento pre-algebraico para resolver las situaciones planteadas. La hipótesis de investigación es que hay un cambio significativo de mejora entre las evaluaciones del pre-test y pos-test por la intervención realizada.

Para determinar si existe diferencia significativa entre los resultados del pre-test y pos-test se decidió recurrir a la prueba paramétrica t Student para muestras relacionadas, con un análisis previo de normalidad de los datos. También fue necesario validar el instrumento de evaluación, ya que a pesar de que en su mayoría fue extraído del cuestionario de Trigueros et al. (1996) no permaneció totalmente igual, así que fue sometido a una validación a través de tres jueces expertos los cuales emitieron una valoración mediante una escala tipo Likert con tres niveles: *Totalmente en desacuerdo*, *En desacuerdo*, *Indiferente (ni de acuerdo ni en desacuerdo)*, *De acuerdo* y *Totalmente de acuerdo*. Una vez recibidas las valoraciones y observaciones, se atendieron cuidadosamente cada una de ellas modificando las actividades del instrumento para cumplir con lo solicitado por los jueces, los cuales dieron su aprobación final al cuestionario. El instrumento fue evaluado a través de

una escala de tres niveles: *no respondió*, *respondió con errores* y *respondió correctamente*. Para verificar su confiabilidad se recurrió al Alpha de Cronbach, la cual resultó ser de 0.81, que para pruebas escolares es excelente (mayor a 0.70).

La población seleccionada para esta investigación consistió en un solo grupo, entonces, la población coincidió con la muestra, por lo cual se trató de un muestreo censal.

4.2. Sujetos

El grupo de estudiantes en el que se desarrolló la investigación fue de sexto grado, durante en el ciclo escolar 2018-2019. En ese momento el grupo estaba conformado por un total de 34 alumnos de los cuales 21 eran niños y 13 eran niñas, cuyas edades oscilaban entre los 11 y 12 años.

El trabajo requirió de un total de 23 horas distribuidas entre las seis semanas que duró la intervención. La cantidad de alumnos en cada una de las sesiones de la secuencia varió, algunas faltas se debieron a enfermedades y otras por causas no justificadas.

Las sesiones fueron planificadas como una clase extra a las que ya tenían normalmente, pero fue implementada durante el horario escolar establecido por la normatividad de la escuela, específicamente se llevó a cabo de las 12:00 p.m. a la 1:00 p.m.

5. Análisis y resultados

Al comenzar el análisis cualitativo de los datos obtenidos mediante el instrumento de evaluación, se realizó una primera clasificación de todas las respuestas. La clasificación fue organizada a través de tablas de la siguiente manera: contestadas correctamente (aciertos), contestadas incorrectamente (errores), total de preguntas respondidas independientemente si los resultados fueron correctos o incorrectos y para finalizar, el conteo de preguntas no resueltas. Para el caso de las gráficas empleadas se tomaron en consideración las mismas categorías de clasificación excepto la de total de preguntas respondidas.

El instrumento de evaluación fue organizado en apartados según el uso de las variables propuesto en el modelo 3UV. Se organizó en tres hojas, la primera con actividades relacionadas con la variable como incógnita que abarcó las preguntas de la 1 a la 6; la segunda hoja estuvo enfocada en actividades relacionadas con la variable como número general, preguntas de la 7 a la 13; y la tercera hoja incluyó actividades enfocadas en la variable en relación funcional de la cual forman parte las preguntas 12 a la 20.

Cada uno de los apartados del modelo 3UV incluyó al menos una actividad al final de la hoja que reflejaba un grado mayor de complejidad en comparación con las demás. Para la variable como incógnita fue la pregunta 6. En la variable como número general fueron las preguntas 12 y 13. En el caso de la variable en relación funcional las preguntas 19 y 20.

5.1. Primera parte del pre-test: La variable como incógnita

En la primera actividad (preguntas de la 1 a la 3) se les pidió a los alumnos que escribieran el valor que podría tomar la letra para que la expresión que se les mostrara fuera correcta. En esta actividad tres alumnos respondieron la actividad de una forma poco convencional, ya que todos interpretaron a la primera variable como un signo de

multiplicar. En la Figura 1 se muestra, a manera de ejemplo, las respuestas de un estudiante.

$$1. \quad 8 + x = 14 \quad \text{Multiplicar}$$

$$2. \quad 16 - y = 7 \quad \text{Restar}$$

$$3. \quad 98 + c = 200 \quad \text{Sumar}$$

Figura 1. Ejemplo de respuestas para los ítems 1-3.

En el caso de las demás preguntas, decidieron ignorar a la variable. Recordando la clasificación propuesta por Küchemann (1980), los situaría en la categoría de letra no utilizada.

El segundo apartado constó de tres problemas de razonamiento. En esta parte se logró apreciar que la comprensión de los problemas verbales les resultó difícil, además el dominio del algoritmo de la resta aún no estaba consolidado en todos los estudiantes. Algunos de los alumnos emplearon el cálculo mental o el azar para determinar sus respuestas ya que no escribieron ningún procedimiento.

5.2. Segunda parte del pre-test: La variable como número general

La primera actividad consistió en completar una tabla según el número de puntos de las figuras previamente dadas. Solo cinco alumnos lograron encontrar el patrón y así pudieron completar correctamente la actividad.

Al momento de contestar las preguntas 12 y 13 cuyo grado de dificultad es mayor, ningún estudiante pudo realizar las generalizaciones necesarias. Por una parte, algunos alumnos contestaron con números, probablemente con el afán de cumplir con la tarea, mostrando con ello una mayor adhesión al contrato didáctico como lo menciona Brousseau (1997).

Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? 2

13. ¿Cómo representarías el número de puntos de esa figura? 3

Figura 2. Ejemplo de respuestas para los ítems 12-13.

Otros alumnos probablemente no comprendieron las indicaciones y la actividad en general, al parecer porque asumieron que al hablarles de representaciones se les pedía que eligieran una figura para hacerlo, como en la actividad previa de la tabla en la cual se empleaban puntos. Algunos estudiantes, siendo fieles al ejemplo, propusieron una cantidad cualquiera de puntos mediante los mismos, como se puede apreciar en la Figura 3.

Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? con puntos

Figura 3. Ejemplo de respuestas para el ítem 12.

En otros casos algunos alumnos propusieron utilizar figuras geométricas como cuadrados o triángulos, como se puede apreciar en la Figura 4.

Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? Δ 1035

Figura 4. Ejemplo de respuestas para el ítem 12.

5.3. Tercera parte del pre-test: La variable en relación funcional

En este último apartado se había considerado que era más probable que los estudiantes no tuvieran tantas dificultades como en los dos usos anteriores por que las preguntas 14 a la 18 son actividades bastante similares a las que se trabajan en la escuela primaria. De hecho, no se esperaba que identificaran la relación entre las variables dependiente e independiente, y se contempló el hecho de que era bastante probable que trataran de resolver la actividad a través del uso de la regla de tres. Pero nos percatamos de que muchos alumnos dejaron sin resolver estas actividades y que para otros tantos resultara imposible contestarla exitosamente.

A partir de los datos analizados se logró determinar que el pensamiento algebraico no se encuentra desarrollado en el grupo, y que no se encuentran familiarizados con el uso de variables. Además, aun presentan algunas dificultades aritméticas como el uso satisfactorio de los algoritmos de la resta, suma y multiplicación.

Este pre-test permitió realizar un diagnóstico del grupo y tomarlo como base para diseñar una secuencia fundada en las habilidades que los alumnos poseen en relación con las variables y posteriormente realizar una comparación de los resultados en contraste con el post-test. Una discusión más detallada de los resultados del diagnóstico se encuentra en (Rodríguez y Juárez, 2020).

Al finalizar las seis semanas de sesiones, en donde se trabajó con los alumnos los tres usos de la variable a través del modelo 3UV, se les aplicó el post-test. El test aplicado fue el mismo instrumento empleado como pre-test, o bien como diagnóstico. A continuación, se describen los resultados encontrados tras su análisis.

5.4. Primera parte del pos-test: La variable como incógnita

En la aplicación del pos-test fue posible observar que los alumnos identificaron las incógnitas, encontrando su valor. Como se puede apreciar en la Figura 5, además de que no se presentaron los mismos errores del pre-test.

1. $8 + x = 14$ $x = 6$

2. $16 - y = 7$ $y = 9$

3. $98 + c = 200$ $c = 102$

Figura 5. Valores asignados por un estudiante para cada una de las incógnitas

Algunos de ellos incorporaron las variables como incógnita al plantear sus respuestas como se muestra en la siguiente figura.

5. Julio tiene coleccionadas algunas estampas. En su álbum caben 250, si le faltan 75 para llenarlo, ¿Cuántas estampas tiene? $R=175$

$75 + n = 250$

$$\begin{array}{r} - 250 \\ 75 \\ \hline 175 \end{array}$$

Figura 6. Ecuación propuesta por un estudiante para determinar el valor de la incógnita.

5.5. Segunda parte del pos-test: La variable como número general

La variable como número general representó un reto aun mayor que la variable como incógnita, ya que la mayoría de los estudiantes que contestaron el pre-test no lograron encontrar un patrón para seguir dibujando las figuras, y menos aún llegar a generalizar una regla que les permitiera encontrar el número de puntos.

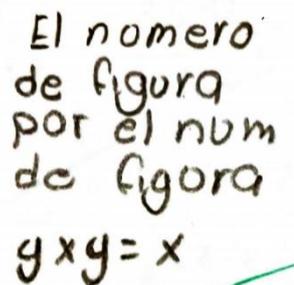
En este test se verificó que gran parte de los alumnos pudo determinar una regla y aplicarla para encontrar el número de puntos de cada figura como se puede observar a continuación.

		Número de puntos
Figura número 1	•	1
Figura número 2	•• ••	4
Figura número 3	••• ••• •••	9
Figura número 4	•••• •••• •••• ••••	16

$1 \times 1 = 1$
 $2 \times 2 = 4$
 $3 \times 3 = 9$
 $4 \times 4 = 16$

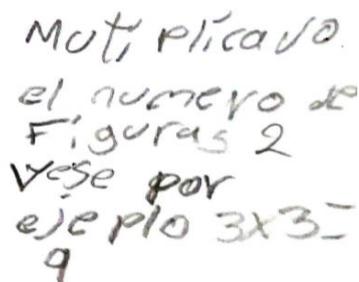
Figura 7. Ejemplo de resolución de la primera actividad de la variable como número general.

Algunos de ellos escribieron su regla, explicando con detalle lo que habían realizado para determinar el número de puntos como se aprecia en la Figura 9. Aunque una gran parte de los sujetos determinó su regla y la llevó a cabo, solo uno de los estudiantes la escribió como aparece en la Figura 8, donde, al parecer, y representa el número de figura y x el total de puntos de la figura.



El numero
de figura
por el num
de figura
 $y \times y = x$

Figura 8. Ejemplo de regla para determinar el número de puntos.



Multiplicado
el numero de
Figuras 2
Vese por
ejemplo 3x3=
9

Figura 9. Ejemplo de regla para determinar el número de puntos.

Con ayuda de la regla que encontraron, lograron determinar la cantidad de puntos que tendría la figura número 20, tarea que había significado un reto bastante difícil para la mayoría de los estudiantes en el pre-test. Aunque la regla para esta tarea era n^2 , el hecho de multiplicar por sí mismo el número de figura nos habla de que sí existe comprensión de esa regla, aunque no se exprese de la misma manera.

5.6. Tercera parte del pos-test: La variable en relación funcional

Como se pudo analizar anteriormente y durante las sesiones, esta variable representó un reto bastante complejo, al incorporar vocabulario que podría haber confundido a los alumnos. Aunque la mayoría de los estudiantes no representó la relación entre las variables del problema a través de una ecuación, si explicaron que con cada kilogramo de peso que se colocara en la balanza, ésta se desplazaría, o bien, que entre más peso fuera colocado más se desplazaría la charola.

6. Análisis cuantitativo de los datos

En la siguiente gráfica se pueden apreciar los porcentajes obtenidos por el grupo de 6° grado en cada una de las secciones en las que se dividió el test.

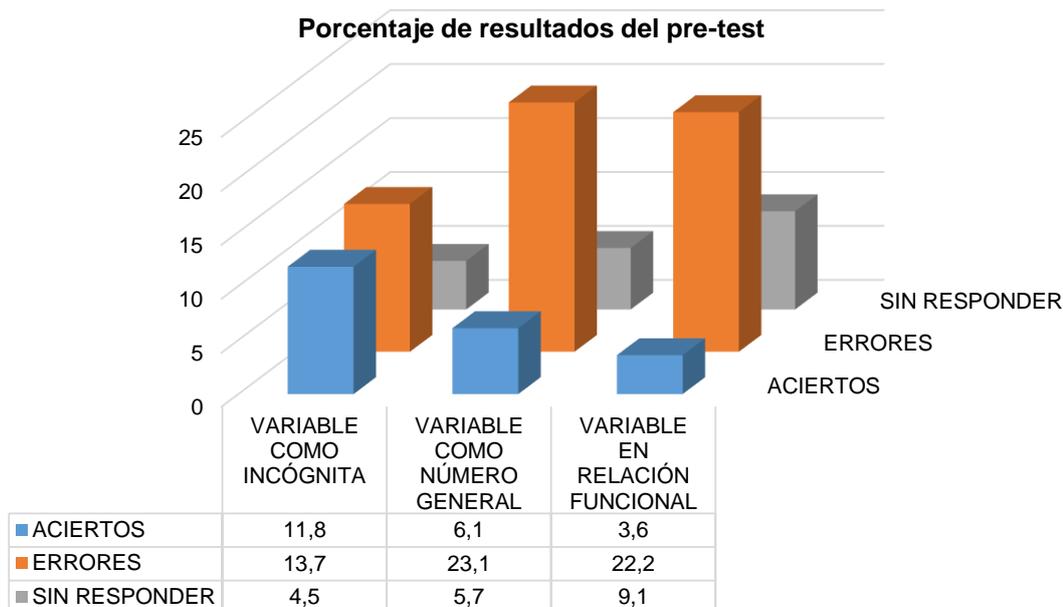


Figura 11. Resultados del pre-test.

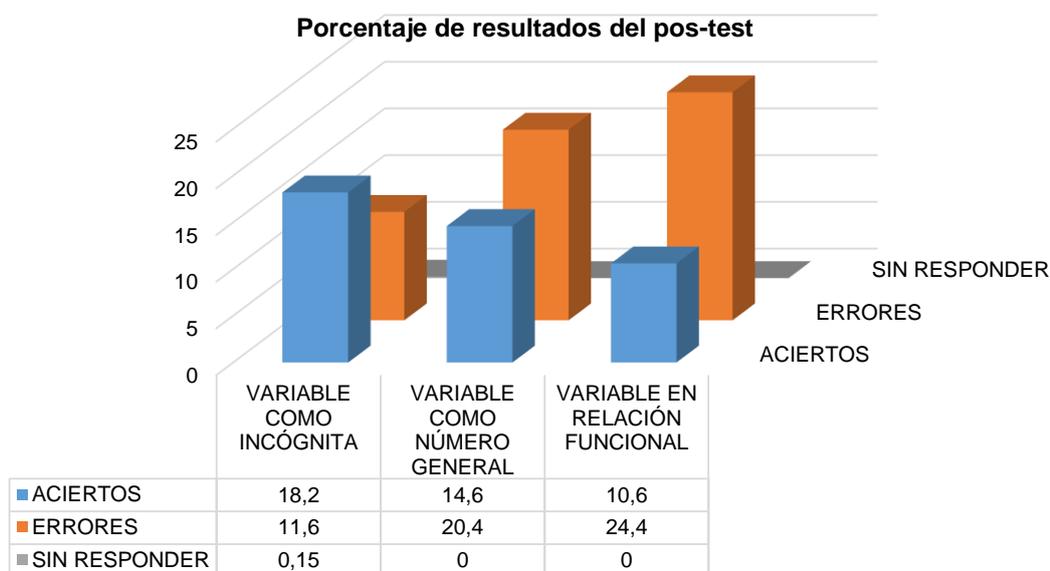


Figura 10. Resultados del pos-test.

El porcentaje de preguntas sin responder disminuyó a cero en casi todos los usos de las variables, y si se compara en el pre-test, como se puede apreciar en la Figura 11, este aspecto avanzó considerablemente.

En cada una de las variables el porcentaje de aciertos aumentó. Para el caso de la variable como incógnita fue de un 25%, en la variable como número general fue de un 27.3 % y en el caso de la variable en relación funcional 21.4%.

El porcentaje de errores disminuyó en el caso de la variable como incógnita con un 9.8%, en la variable como número general fue de un 9.2%. En el caso de la variable en relación funcional hubo un aumento de errores de un 7.5% en comparación con los resultados del pre-test. Para esta última hay que tomar en cuenta el hecho de que registró un mayor porcentaje de preguntas sin responder durante el pre-test, además, es importante hacer hincapié del incremento en el porcentaje de aciertos en relación con el porcentaje de aumento en los errores registrados.

Es posible observar un aumento en la cantidad de aciertos que los alumnos obtuvieron en la segunda prueba en contraste con la primera, por lo cual se sospechó que podría haber un cambio significativo, así que fue necesario ahondar más para verificar ese avance. Para ello se consideró realizar una prueba de hipótesis comparando las medias muestrales entre el pre-test y post-test.

El análisis anterior no bastó para asegurar un avance entre ambas pruebas, así que se optó por llevar a cabo un análisis estadístico de dos muestras relacionadas, en este caso la cantidad de aciertos obtenidos por alumnos en el pre y post-test. Con la finalidad de decidir qué prueba resultaría ser la más efectiva, que de hecho se tenía pensado ver si era posible utilizar el estadístico paramétrico t Student, fue necesario constatar si las muestras eran normales, por lo cual, se llevaron a cabo algunas pruebas de normalidad. La primera que se realizó fue la kurtosis, con la finalidad de determinar el grado de concentración que presentaban los valores en la región central de distribución. Se logró identificar que existió poca concentración de los datos en la media con $k=2.337611$ para los aciertos del pre-test y $k=2.374359$ para los aciertos del pos-test.

Los datos se sometieron a la prueba de normalidad Shapiro Wilk, que es una prueba para muestras de tamaño $n \leq 50$. Esta prueba plantea las siguientes hipótesis:

Ho: Los datos siguen una distribución normal

Ha: Los datos no siguen una distribución normal

El criterio de decisión para rechazar o no rechazar la hipótesis nula se realizó por el método del valor p, que consiste en rechazar la hipótesis nula en favor de la alternativa si $p < 0.05$, donde 0.05 es el nivel de significancia. En caso contrario, si $p \geq 0.05$ no se rechaza la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa. Los resultados de la prueba se muestran a continuación.

Shapiro-Wilk	
W	p
Pre-test	
0.9440	0.0814
Post-test	
0.9715	0.5058

Tabla 2. Pruebas de normalidad de los datos. Fuente: elaboración propia.

Con los resultados de la tabla anterior se evidenció que los datos son normales. Además, las muestras son dependientes ya que están relacionados los datos de los aciertos de ambos tests. De esta manera, fue posible aplicar la prueba t de Student para muestras relacionadas. Para poder realizar dicha prueba fueron necesarias las calificaciones obtenidas por los estudiantes en ambos tests únicamente enfocándose en los aciertos.

Para la prueba aplicada se designaron las siguientes hipótesis: $H_0: \mu_{pre} - \mu_{pos} = 0$ y $H_1: \mu_{pre} - \mu_{pos} \neq 0$, con un nivel de significancia del 5%, lo que quiere decir que si

el p-valor < 0.05 se rechaza H_0 y se acepta H_1 . A continuación, se muestran los resultados de la prueba.

t	gl	p	95 % IC
-5.8663	33	.00000143	[-2.19, -2.15]

Tabla 3. Prueba t-Student. Fuente: elaboración propia.

El resultado muestra que el p-valor fue de .00000143. Este valor permite aceptar la H_1 , con lo que se puede afirmar que existió una diferencia significativa entre las medias de los aciertos obtenidos entre el pre y el pos-test. La diferencia entre las medias del pre y pos-test fue de -2.17 que se encuentra dentro del intervalo de confianza. A través de los resultados obtenidos se puede afirmar que existió un avance significativo entre ambas pruebas después de aplicada la intervención.

Hay una diferencia significativa en las medias de los aciertos de los alumnos antes y después de trabajar con ellos. Por lo cual se concluye que la intervención sí tuvo efectos positivos sobre el pensamiento pre-algebraico de los alumnos.

7. Conclusiones

Una vez terminada la intervención que tuvo una duración de seis semanas de trabajo con los estudiantes al incorporar el modelo 3UV en las sesiones, se notó que los alumnos pudieron percibir a las variables, en lugar de ignorarlas como algunos de ellos lo manifestaron en un inicio. Por otra parte, les asignaron un valor cuando así lo requería al tratarse de la variable como incógnita, se permitieron incluir el uso de las variables al momento de plantear ecuaciones para resolver problemas verbales. Además, comprendieron que las variables no necesariamente están relacionadas con algún objeto o nombre, o sea que se puede hacer uso de cualquier variable para representar una incógnita específica.

La variable en relación funcional resultó ser un poco más confusa debido al vocabulario que implica trabajar con este uso. Al tratar de introducir los términos variable dependiente e independiente, se logró notar incertidumbre en el grupo, más que en las sesiones aplicadas con las demás variables. Aunque la actividad propuesta para ese día fue realizada correctamente y pese al poco entendimiento de las nuevas palabras, los alumnos lograron comprender e identificar que existían dos variables implicadas en el problema y que una dependía de la otra. Debido a la experiencia de ese día se decidió proseguir con las sesiones, pero sin el empleo de los términos variable dependiente e independiente.

Otra cuestión interesante y que en definitiva causó revuelo en los estudiantes, fue el empleo de la palabra relación y cómo poder expresarla, para ellos no significaba nada en el campo de las matemáticas. Durante el pos-test, muy pocos estudiantes lograron establecer la relación en la balanza entre el peso de compra y el desplazamiento. En la mayoría de los errores registrados, contestaron que la relación entre el peso y desplazamiento era que iban de 4 en 4. Otros anotaron que a mayor cantidad de kilogramos la charola se desplazaría más, lo cual es un análisis correcto, pero no era lo que se les pedía que realizaran. Debido a lo anterior, se consideró necesario haber incluido actividades preliminares que permitieran a los alumnos expresar una relación matemática.

Lo encontrado en esta investigación corrobora lo reportado por Durán (1999) ya que en esta investigación los alumnos también fueron capaces de reconocer patrones en las secuencias que se les mostraron, ya fueran numéricas o de figuras. Asimismo en su investigación, hace mención de algo que también fue bastante recurrente durante el pre-test y las primeras sesiones de la secuencia didáctica, y es que, tanto en sus observaciones como en las realizadas en esta investigación, los alumnos de sexto grado consideraron a las variables de una expresión simbólica como etiquetas o como la abreviatura de una palabra, aunque como ya se mencionó anteriormente, esta idea fue cambiando conforme avanzaron las sesiones, además, este mismo progreso logró verificarse en las respuestas que dieron los alumnos en el pos-test.

Al igual que la población con la que el autor previamente citado trabajó, los alumnos lograron describir la regla que usaban para calcular términos de una secuencia, aunque fueran términos grandes. Por otra parte, también fueron capaces de simbolizar la regla mediante variables.

Pudo detectarse un avance significativo entre los resultados del pre-test y pos-test al trabajar actividades relacionadas con la variable como incógnita, como número general y relación funcional. La implementación del modelo 3UV resultó ser bastante útil, ya que a través de él los alumnos lograron acercarse a trabajar con las variables, esta afirmación coincide con lo mencionado por las autoras quienes afirmaron que el modelo 3UV resultó ser una herramienta muy útil en el desarrollo del pensamiento algebraico, permitiendo a los alumnos trabajar contenidos algebraicos de manera exitosa.

Los resultados de esta investigación coinciden con lo mencionado por Carraher y Schliemann (2007) ya que introducir contenidos de carácter algebraico en edades tempranas no resultó desfavorable, convino a los alumnos al momento de permitirles aproximarse a las variables a través de un desarrollo paulatino mediante el cual pudieron asimilar la utilidad que tienen al resolver problemas matemáticos.

En el caso de la variable en relación funcional, es notorio apreciar que el desempeño de los estudiantes no fue óptimo, sobre todo si se compara con los resultados obtenidos en las otras dos variables, lo cual recuerda lo encontrado por Juárez (2011), quien hace notar que la variable en relación funcional presentó el porcentaje promedio más bajo de aciertos. Es cierto que su investigación fue realizada con profesores que enseñan matemáticas a nivel secundaria, pero es una coincidencia que valdría la pena investigar.

A través del desarrollo de las unidades y de los resultados del pos-test es posible afirmar que la variable en relación funcional representó un gran reto para los estudiantes, desde comprender los conceptos de variable dependiente e independiente, hasta poder representar las relaciones entre las mismas variables a través de letras. Lo cual permite recordar lo mencionado por Willoughby (1999) quien comenta que, si bien es cierto que los alumnos pueden comprender conceptos abstractos, como es el caso de la función y por consiguiente lo relacionado con ella, es necesario que se les introduzca a través de actividades concretas que le permitan, a través de un tiempo prolongado, asimilar esos conceptos.

Los resultados de esta investigación demuestran que es posible acercar a los alumnos a los tres usos de la variable, aunque para el caso de la variable en relación funcional es cierto que no fue tan sencillo y que para ella se considera pertinente profundizar más.

Para finalizar, hay que recordar que los resultados mostrados en este documento hacen ver un avance significativo entre los aciertos del pre-test y pos-test, pero no por ello deben generalizarse. Lo que si se espera es que los diseños de las unidades didácticas puedan resultar útiles para que los profesores, principalmente que laboran en nivel primaria y que se encuentren interesados en desarrollar este tipo de actividades, puedan usarlas como una base de apoyo para su práctica docente y como una guía en la incorporación de los tres principales usos de la variable desde la perspectiva del modelo 3UV.

8. Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Press.
- Cai, J., Ng, S. y Moyer, J. (2011). Developing students. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 25-40). Springer.
- Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-706). NCTM.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García y L. Ordóñez (Eds.). *Investigación en Educación Matemática*, vol. 16, *Seminario II: Fines de la investigación en pensamiento algebraico* (pp. 75 – 94). Baeza.
- Castro, W., Godino, J. y Rivas, M. (2011). *Razonamiento algebraico en educación primaria: Un desafío para la formación de maestros*. En G. García (Ed.). *Memorias del 12° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 92-99). Armenia: Gaia.
- Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla.
- Durán, R. (1999). *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por los alumnos de sexto grado de primaria* [Tesis de maestría]. México, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN.
- Gobierno de México-Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Educación primaria 6°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. SEP.
- Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 76(1),83-103.
- Kilpatrick, J. (2011). Commentary part 1. En J. Cai y E. Knuth (Eds.). *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. (pp. 125-129). Springer.
- Küchemann, D. (1980). *The Understanding of Generalized Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children*. [Tesis de Doctorado]. Reino Unido.
- Lluvia, D. y López, A. (2011). Empleo del modelo 3UV en álgebra temprana, ponencia presentada en la “XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática”, Recife, 26-30 de junio de 2011, en: <https://ciaem->

redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1216/368

(consulta: 10 de diciembre de 2019).

- Radford, L. (2011). Grade 2 Students Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.). *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 303-322). Springer.
- Rodríguez, T., y Juárez, J. (2020). Resultados de un diagnóstico sobre el pensamiento pre-algebraico con estudiantes de 6o grado de primaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33 (1), 421-429.
- Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Paidós.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77(2), 5-34.
- Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en álgebra. *Enseñanza de las Ciencias*, 14(3), 351-363.
- Ursini, S. (2011). Il Modello 3UV: uno strumento teorico a disposizione degli insegnanti di matematica. *QuaderniCIRD*, 2(10), 59-70.
- Ursini, S., Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra, En M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of PME 25*. (327–334).
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. Trillas.
- Watanabe, T. (2011). Shiki: A Critical Foundation for School Algebra in Japanese Elementary School Mathematics. En J. Cai y E. Knuth (Eds.). *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 109-124). Springer.
- Willoughby, S. (1999). Functions from Kindergarten through Sixth Grade. En B. Moses (Ed.). *Algebraic thinking, grades K–12: reading from NCTM’s school-based journals and other publications*. (pp. 197-201). NCTM.

Tzindejeh Rodríguez Quintero. Maestra en Educación Matemática por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Colaboradora en proyectos de aprendizaje y enseñanza del álgebra en primaria. tzindejeh.quintero@gmail.com
0000-0002-0776-8106

José Antonio Juárez López. Doctor en Ciencias, especialidad en Matemática Educativa, trabaja en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Realiza investigación y docencia en Educación Matemática. Sus proyectos actuales se relacionan con el diseño de tareas matemáticas auténticas y la comprensión textual de problemas matemáticos. jajul@fcfm.buap.mx
0000-0003-2501-943X

Estela de Lourdes Juárez Ruiz. Doctora en Matemáticas, trabaja en la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Se dedica a realizar investigación en Educación Matemática. Sus proyectos actuales son sobre creatividad, habilidades espaciales, representaciones y resolución de problemas. estela.juarez@correo.buap.mx
0000-0002-2857-0772