

Estados de conocimiento en el desarrollo de la secuencia numérica

Catalina María Fernández Escalona

Fecha de recepción: 2016-04-22
Fecha de aceptación: 2017-03-24

<p>Resumen</p>	<p>Esta investigación trata de determinar los estados de conocimiento en el desarrollo de la secuencia numérica a través de las relaciones lógicas-ordinales que se da entre los términos numéricos. Partiendo de las citadas relaciones se contempla una evolución desde estados con ausencias de las mismas, pasando por estados de descubrimiento de relaciones con instrumentos secuenciales sencillos, a un estado en el que la estructura operatoria de seriación se refleja en la secuencia numérica propiciando su sistematización y, consecuentemente, el éxito operatorio. Palabras clave: Secuencia numérica; relación lógica ordinal; acción de contar.</p>
<p>Abstract</p>	<p>This research tries to determine the states of knowledge in the development of the numerical sequence through the logical-ordinal relations that occurs between the numerical terms. Likewise, one can also observe a developmental process in terms of logical-ordinal relationships, starting with states characterized by a lack thereof, then moving through states characterized by the discovery of relationships through simple sequential instruments, until a state is achieved in which the operational structure for seriation is reflected in the number sequence itself, leading to its systemization and consequently, operational success. Keywords: Number sequence; ordinal-logical relationships; the act of counting.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Esta investigação trata de determinar os estados de conhecimento no desenvolvimento da sequência numérica por meio das relações lógico-ordinais que se dá entre os termos numéricos. Partindo das citadas relações se contempla uma evolução de estados com ausências das mesmas, passando por estados de descoberta de relações com instrumentos seqüenciais simples, a um estado no qual a estrutura operatória da seriação se reflete na seqüência numérica propiciando sua sistematização e, consecuentemente o êxito operatório. Palavras-chave: Sequência numérica; relação lógica ordinal; ação de contar.</p>

1. Introducción

1. Introducción

Se dirá que un escolar ha alcanzado el nivel máximo en el desarrollo de la secuencia numérica cuando sea capaz de tener un método sistemático en su reproducción. (Castro, Cañadas y Molina, 2010; Grize, 1979; Ortiz, 2009; Piaget, 1983).

Esto conlleva la aplicación de esquemas de seriación cíclica y doble subyacente a la secuencia numérica. Dicha aplicación pasa por el entendimiento de que el primer tramo de la secuencia (del 0 al 9) constituye un *ciclo* a partir del cual, y con una regla de combinación (seriación doble), se genera toda la serie de números naturales. Según la psicogénesis de la seriación (Piaget e Inhelder, 1976), si un escolar domina el ciclo, hasta alcanzar el éxito operatorio pasa por tres etapas: a) No consigue repetir la secuencia del uno al cien, pero sí es capaz de reproducir tramos de la misma, b) Es capaz de contar del uno al cien pero recibiendo ayuda en el cambio de decenas, y c) Conoce un método sistemático para repetir la serie numérica, sabe que cuando se "agotan" los números que empiezan por "1" el siguiente es empezar por "2" y unir éste a todos los del ciclo, y cuando esto se termina se debe continuar con el "3", y así sucesivamente. (Fernández, 2015).

La secuencia numérica es vista desde una perspectiva de la estructura lógica de seriación. En este sentido, para llevar a cabo una planificación adecuada de actividades numéricas en Educación Infantil, se debería tener en cuenta la génesis del conocimiento, (Vergnaud, 2013), y estudiar la evolución que presentan los escolares ante tareas de seriación. Según dicha génesis, se consigue dominar antes las series en las que el criterio es sencillo, como la alternancia, frente a las series que se construyen a partir de una relación de orden como es el caso de los números naturales puestos en sucesión mediante un criterio cardinal (Clements, 1984).

En definitiva, se trata de un estudio de la secuencia numérica desde una perspectiva de la estructura lógica de seriación, con lo cual para estudiar el desarrollo de la misma, se debería empezar por situaciones pre-numéricas que se rijan por los mismos principios que la acción de contar (principio de correspondencia uno a uno y de orden estable) pero sin el uso de términos numéricos, para que el desconocimiento de los mismos no enmascare el verdadero conocimiento lógico-matemático subyacente al conteo (Briand, 1999).

El estudio del número como una serie implica estudiar la relación lógica ordinal existente entre los términos de la secuencia numérica ya que una serie se construye a través del encadenamiento aditivo. Esta capacidad alude al proceso de construcción de una *sucesión de siguientes*: A un elemento le continúa otro elemento y a éste otro y así sucesivamente según una relación asimétrica y biunívoca que genera una progresión en el sentido de Bertrand Russell y por consiguiente la serie (Brannon, 2002; Clark, 1983, Fernández, 2015).

Este trabajo está centrado en las nociones básicas del número, en su aspecto ordinal, que revierte gran dificultad y que llega a ser de gran importancia para la construcción matemática y didáctica del número (Fernández, 2010; Frege, 1884; Gillies, 2011; Ortiz, 2009; Russell, 1982). Se trata de un estudio sobre la naturaleza del conocimiento de la secuencia numérica, que posibilita el descubrimiento de relaciones lógicas ordinales entre sus términos. La manera de abordar dicho estudio es analizando la evolución de la comprensión de las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica por parte del escolar mediante estados de conocimiento (Piaget y Apostel, 1986)

1.1. *Estados de conocimiento*

La opción que se ha elegido para la determinación de los estados es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores, resumido y estructurado por etapas o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un estado diferente, que viene especificado por su descripción y justificación, así como por las competencias teóricas que le corresponden desde un punto de vista de la progresión de las capacidades dadas en un sujeto ideal.

1.1.1. Estado I

En el inicio de las primeras nociones secuenciales, el escolar no está aún en disposición de interpretar una serie desde el punto de vista lógico-ordinal. Teniendo en cuenta el subsistema lingüístico relativo a la seriación (Sinclair de Zwart, 1978), hay que pasar por tres fases previas hasta alcanzar la “serie comparativa en un sentido” y culminar con la “serie comparativa en los dos sentidos”; dichas fases consisten en asignar un término a cada elemento de la serie para diferenciarlos pero no para compararlos.

Por consiguiente, se establece que la primera aproximación para alcanzar las relaciones lógicas ordinales en cualquier serie es la diferenciación de sus elementos, a cada elemento le corresponde un único señalamiento o ser etiquetado una sola vez. Los sujetos que hacen un gesto rasante para describir la serie estarán por debajo de este estado.

1.1.2. Estado II

Una vez diferenciados los términos de una serie mediante el etiquetaje se pasa a la interpretación espacial o temporal de la misma, manifestándose los primeros esquemas comparativos entre sus términos.

Según Piaget (1983), la construcción del espacio matemático comienza con la topología, con en el *orden de los puntos sobre una línea*, lo que posibilita la construcción de referencias ordinales. De este modo, al indicar que un elemento está al lado del otro se está indicando el “siguiente inmediato”, y la cuestión de cómo se comparan dos términos cualesquiera no consecutivos se resuelve con las

relaciones “hacia delante” ó “hacia atrás” tomando como referencia uno de los términos a comparar, que de esta forma se convierte en “primer y último elemento” al dividir la línea de puntos en dos clases: todos los que están delante y todos los que están detrás. (Dieudonné, 1989).

Análogamente, el orden temporal, como conocimiento igualmente infralógico constituye un soporte intuitivo importante de referencias ordinales.

1.1.3. Estado III

En el estado anterior la secuencia que se usaba como instrumento de etiquetación y comparación era la línea topológica en la que no es necesaria la verbalización. En este estado es necesario que el individuo aplique esquemas secuenciales mediante series sencillas como la alternancia, se empieza a caracterizar cada elemento de la serie como único al compararlo con el anterior y siguiente inmediato. Las relaciones ordinales entre elementos consecutivos se manifiestan mediante una dicotomía, y esto, evolutivamente hablando, son conceptos primarios (Piaget & Inhelder, 1976; Sinclair De Zwart, 1978; Stegmüller, 1970)

Usando la alternancia como instrumento secuencial, se puede llegar a lo más alto teniendo en cuenta las ideas evolutivas de los autores citados anteriormente: a) *Etiquetación*; b) *Serie comparativa en un sentido*: Determinar una posición ordinal empezando por el primer elemento; c) *Serie comparativa en los dos sentidos*: se alcanza cuando se llega a determinar una posición ordinal a partir de otra dada como dato. Los esquemas lógicos matemáticos que se manifiestan son: esquemas de primero y último; *cada elemento ocupa un lugar determinado*, y, *comparativa en dos sentidos* ya que un término cualquiera de una clase es anterior a uno y posterior a otro de la clase complementaria.

1.1.4. Estado IV

Se utiliza la acción de contar para la comparación lógica-ordinal entre los elementos de la serie. En el estado anterior la secuencia que se usaba como instrumento de etiquetación y comparación era la alternancia, mientras que en este estado es necesario que el sujeto disponga de una secuencia estable y convencional y del principio de correspondencia uno a uno de la acción de contar (Sarnecka & Gelman, 2004).

Además de aplicar los mismos esquemas secuenciales que en el estado anterior, será necesario aplicar esquemas secuenciales y relaciones lógicas ordinales propias del conteo como es la relación anti-simétrica y que todo elemento es tratado simultáneamente como primero y último (Muldoon, Lewis & Towse, 2005). Se manifiestan esquemas lógico-matemáticos como:

- *La sucesión de siguientes es una característica que se mantiene ante cualquier división realizada en la secuencia numérica*: el que un término sea el siguiente de otro es independiente del término elegido para el inicio.

- *Esquemas acumulativos del conteo*: Un término al ser enumerado, pasa de ser siguiente de uno dado a ser el primero de una nueva división de la secuencia a partir del cual se puede empezar a contar.

1.1.5. Estado V

Se relacionan dos términos cualquiera de la secuencia numérica a la que se ha sometido, previamente, a una correspondencia serial con la alternancia.

En los estados anteriores se comparaban dos elementos de una serie lineal discreta mediante la alternancia (Estado III) o el conteo (Estado IV). Pues bien, en este estado se sustituye la serie lineal por la secuencia numérica, se trata de comparar sus términos mediante la alternancia.

Se aplican esquemas secuenciales tales como: “*anterior*” y “*posterior*” mediante un método sistemático de construir la secuencia numérica vía la correspondencia serial ó contar de dos en dos empezando por uno.

El dominio de este instrumento secuencial supone el logro en la *etiquetación, serie comparativa en un sentido y serie comparativa en los dos sentidos*.

1.1.6. Estado VI.

Se relacionan ordinalmente dos términos cualquiera de la secuencia numérica, en ella cada término puede ser considerado en sí mismo en cuanto a sus relaciones lógicas-ordinales con todos los demás.

En este estado los sujetos alcanzan la *sistematización de la secuencia numérica* según la estructura lógica de seriación, y actúan sobre ella con estrategias ligadas a la estructura serial; todo ello hace que los escolares sean capaces de razonar ordinalmente sobre la secuencia numérica, tienen un dominio de la misma, lo que permite: contar de n en n , solucionar $a+b$ y $a-b$ con el llamado *recuento progresivo*, *interpretar las tablas de multiplicar* y afrontar toda la aritmética a partir del dominio ordinal de la secuencia numérica. (Geary, 2006)

En lo que sigue se tratará la validación empírica de los estados de conocimiento.

2. Método

2.1. Participantes

Se toma una muestra representativa, según el medio sociocultural, urbano o rural, y según el tipo de enseñanza, pública o privada, de la población de escolares correspondientes al segundo ciclo de Educación Infantil de Málaga capital y provincia. Se pretende realizar un estudio transversal.

Se eligen cinco centros escolares con las siguientes características:

- a. Dos centros de la capital, uno público y otro privado, denominados B y C respectivamente.
- b. Tres centros de la provincia:
 - b1. Dos urbanos, uno público y otro privado (M y R)
 - b2. Uno público rural (H)

El criterio para la elección de la muestra viene dado por una distribución por edades dentro de cada curso. Los escolares que participan son elegidos entre aquellos que se ofrecen voluntarios para realizar la entrevista. El sistema de elección es el siguiente: se elige el quinto de la lista, si ese no está en las condiciones anteriormente señaladas, entonces se elige el siguiente y así sucesivamente.

	3 AÑOS	4 AÑOS	5AÑOS	NIÑOS/ NIÑAS
CAPITAL- PÚBLICO-B	3	3	3	4/5
CAPITAL- PRIVADO-R	3	3	3	4/5
PROVINCIA- PÚBLICO-M	3	3	4	5/5
PROVINCIA- CONCERTADO-R	3	4	3	6/4
RURAL- PÚBLICO-H	3	3	3	3/6

Tabla 1. Composición de la muestra

En total la muestra está compuesta por 47 escolares del segundo ciclo de Educación Infantil, 22 niños y 25 niñas, inicialmente se pretendía que el número de niñas y niños coincidieran, pero no fue así por las peculiaridades del colegio rural H.

2.2. Instrumento

Se usa las entrevistas clínicas sobre la base de un material concreto como instrumento para llevar a cabo el estudio empírico cualitativo.

El material empleado en esta prueba es el que aparece en las fotos de la figura 1.

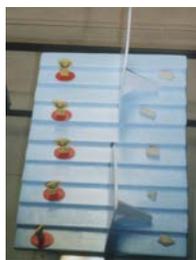


Figura 1. Material usado en el estudio empírico cualitativo

2.3. Procedimiento

Cada uno de los seis Estados de Conocimiento lleva asociado una tarea, así el Estado K (K varía de I a VI) lleva asociada la tarea K, entonces el procedimiento es el siguiente:

Para cada uno de los estados su tarea asociada conlleva, a su vez tres situaciones. Para la situación K1 (primera de la tarea K) se ha realizado una clasificación de respuestas atendiendo a que el niño realizara o no la actividad. Si la realiza correctamente se analiza el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces pasa a realizar la situación K2 (segunda de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasa a realizar la situación K3 (tercera de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasa a realizar nuevamente la situación K1 (primera de la tarea K). Si la realiza correctamente se analiza el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces se da por finalizada la tarea.

A continuación, las figuras 2, 3, 4, 5, 6, y 7 presentan, de manera esquemática, el procedimiento seguido en el desarrollo de las entrevistas para cada una de las tareas asociadas a los estados correspondientes.

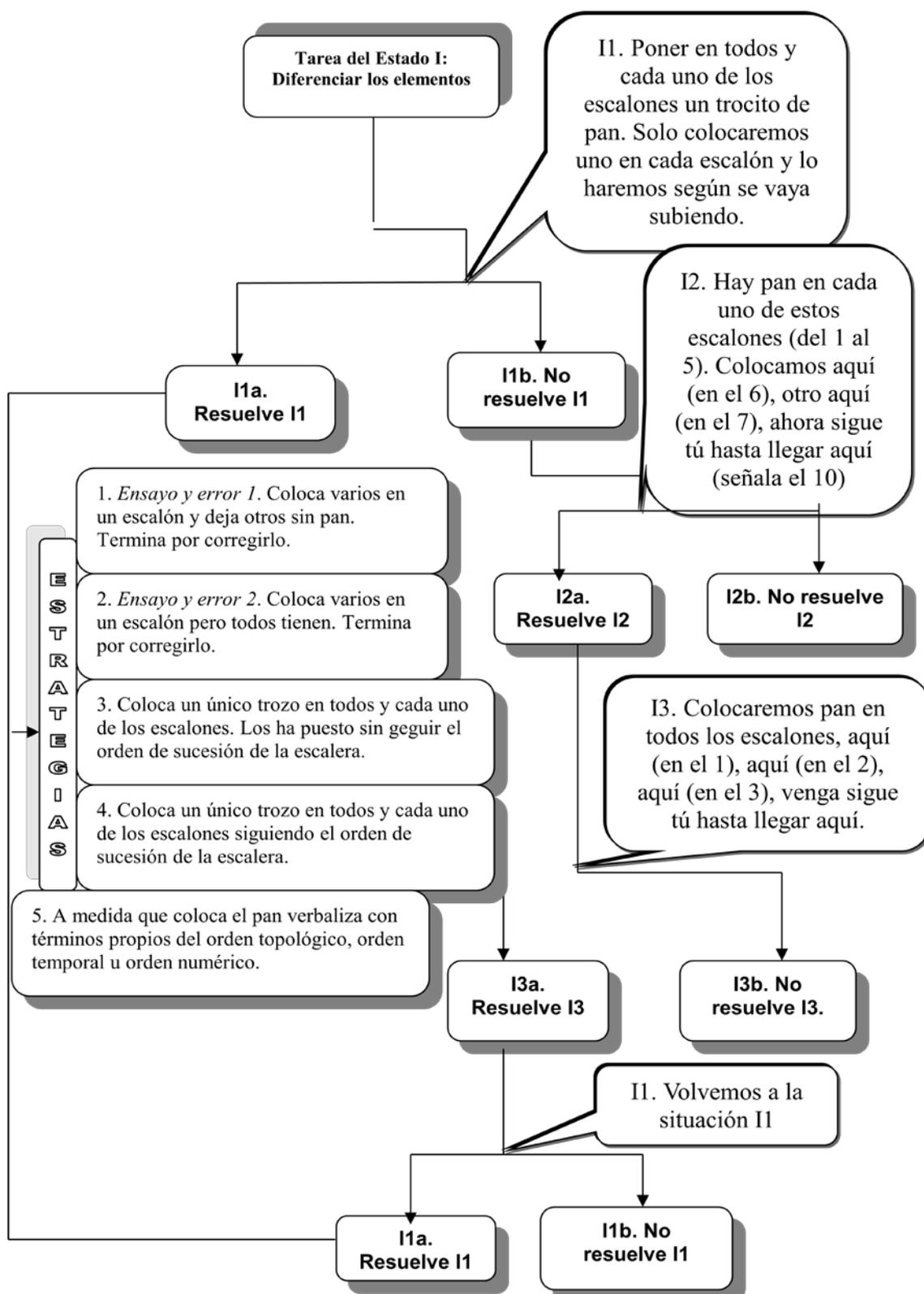


Figura 2. Procedimiento de la Tarea 1 asociada al Estado I

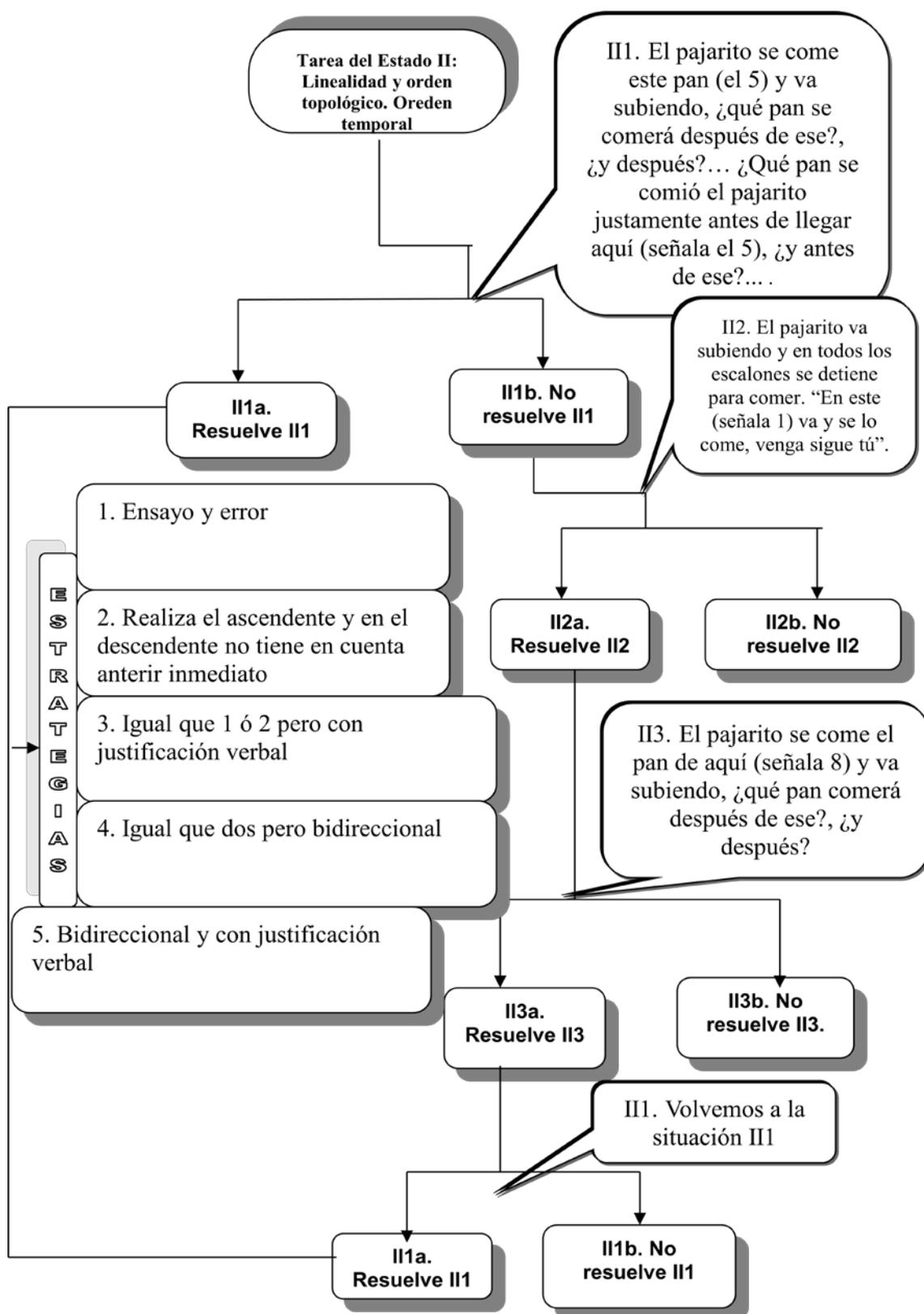


Figura 3. Procedimiento de la Tarea 2 asociada al Estado II

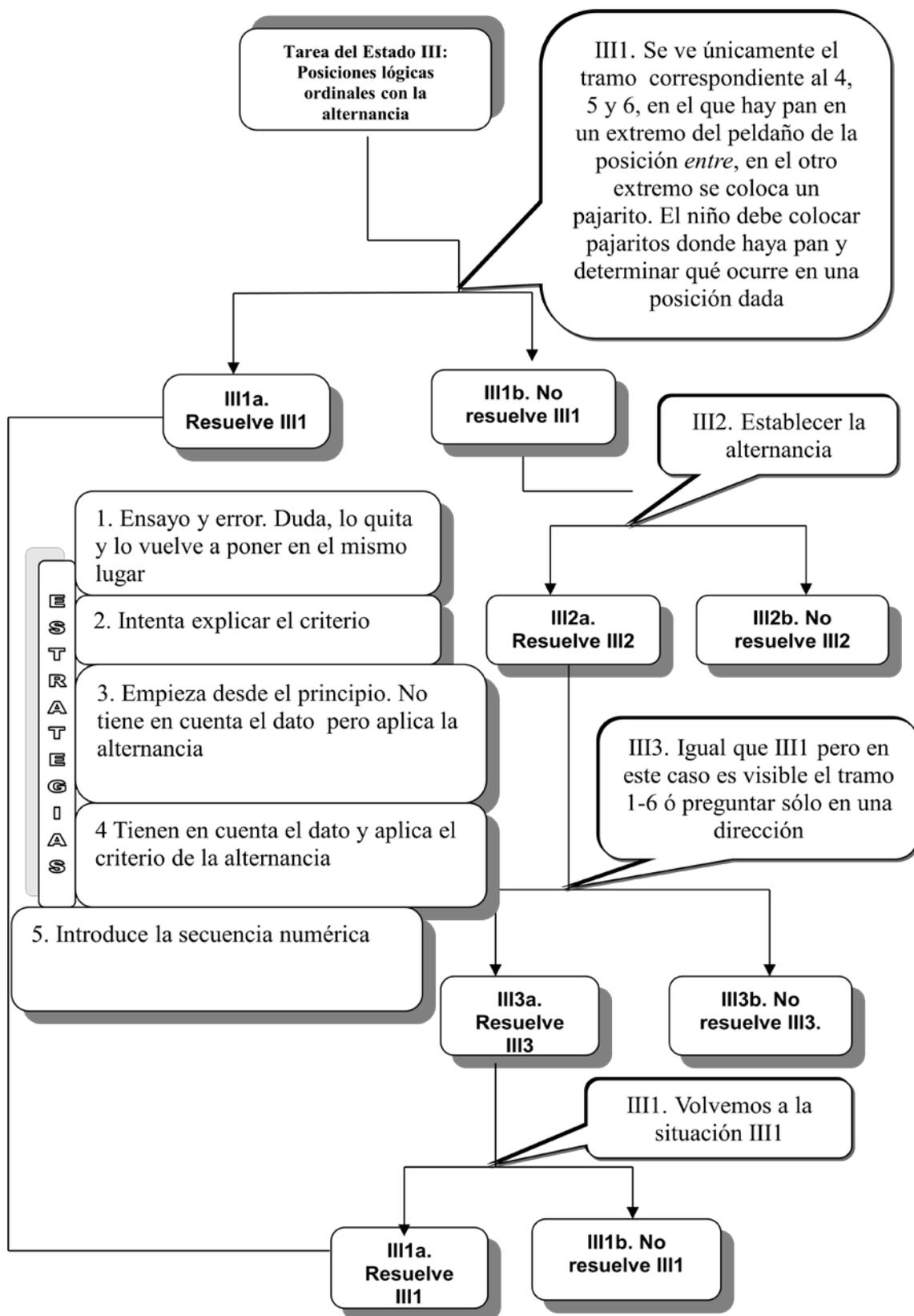


Figura 4. Procedimiento de la Tarea 3 asociada al Estado III

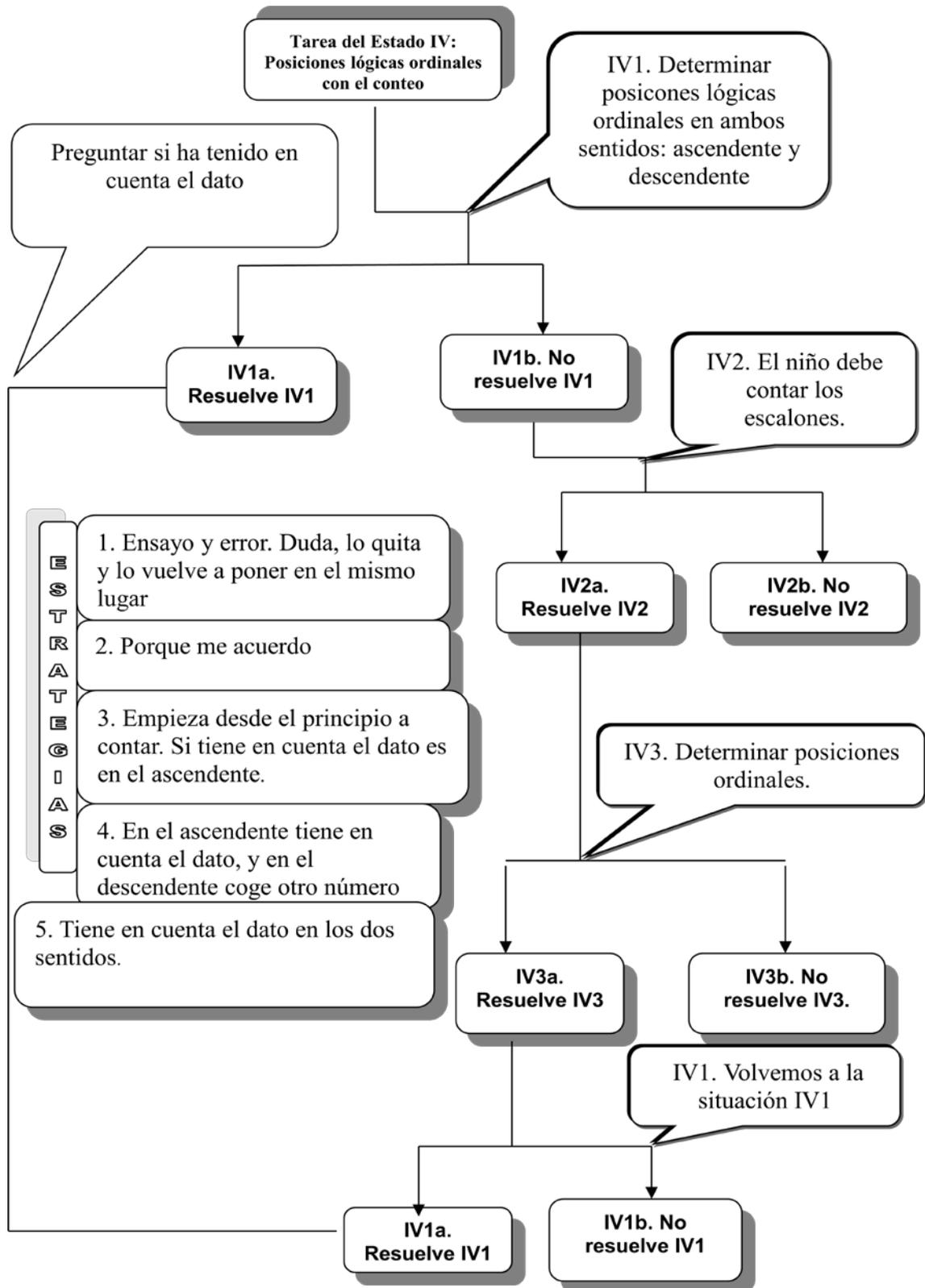


Figura 5. Procedimiento de la Tarea 4 asociada al Estado IV

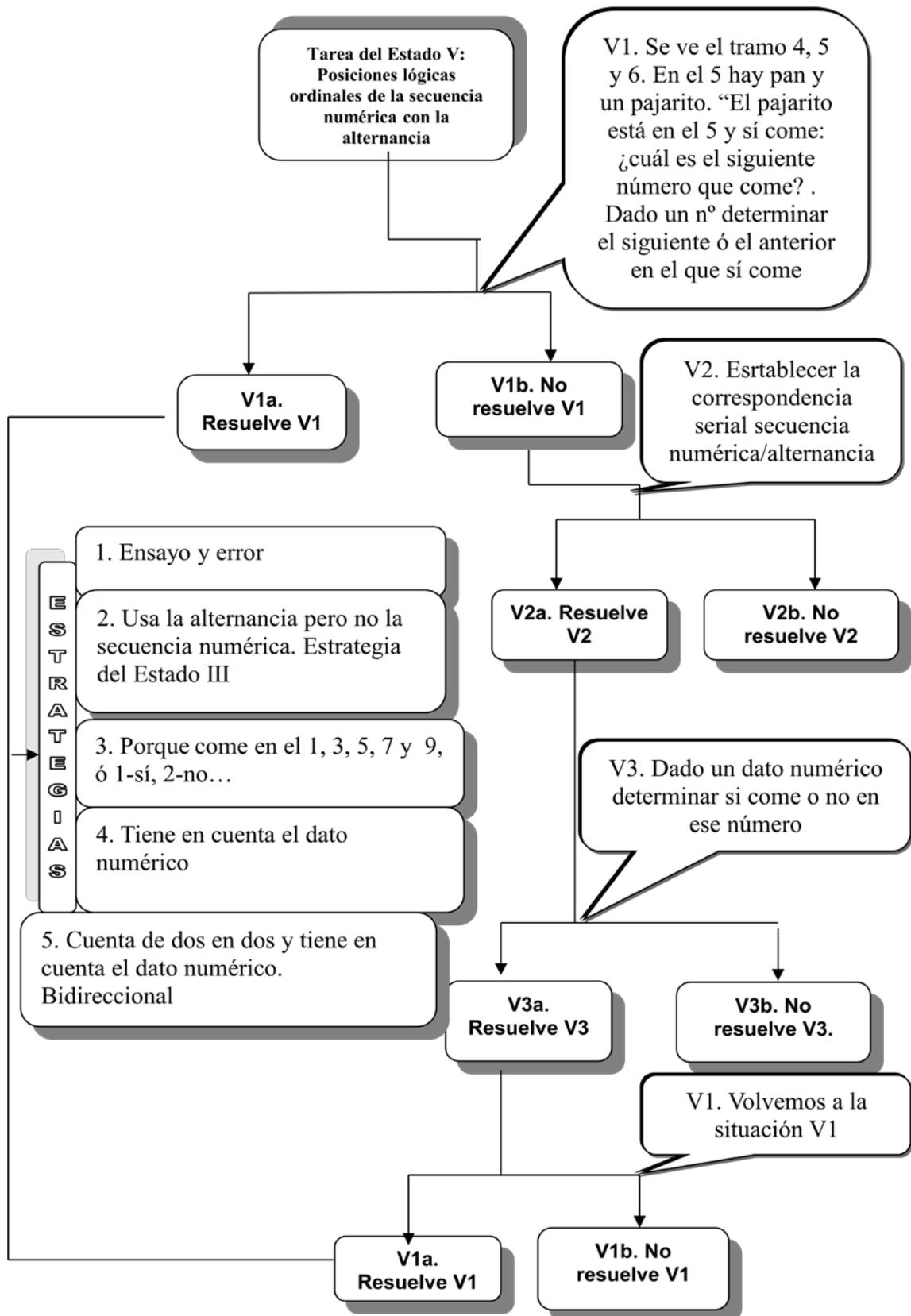


Figura 6. Procedimiento de la Tarea 5 asociada al Estado V

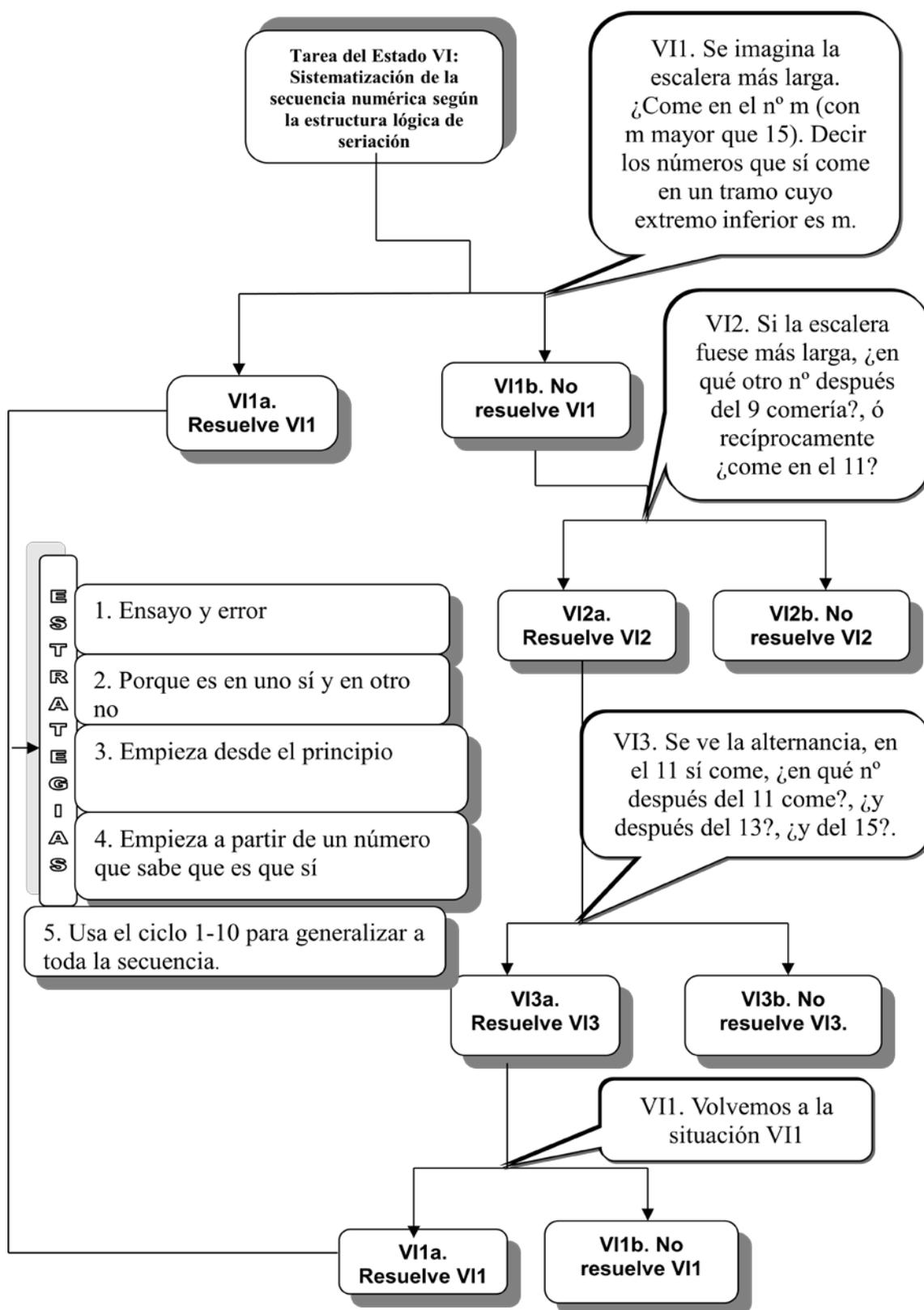


Figura 7. Procedimiento de la Tarea 6 asociada al Estado VI

2.4. Análisis de resultados

Un escolar supera con éxito la tarea del Estado K si realiza correctamente la situación K1 en cualquiera de sus dos presentaciones, es decir, si están en la categoría K1a. En el caso que un sujeto se encuentre en esta situación se observará la estrategia seguida y se codificará con un número del 1 al 5, según la tabla 2, pasando al análisis de respuestas según las coordenadas que presenta cada individuo en la realización de dicha tarea.

ESTADOS	ESTRATEGIAS
I.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ensayo y error 1 2. Ensayo y error 2 3. Coloca un único trozo en todos y cada uno de los escalones. Los ha puesto sin seguir el orden de sucesión de la escalera 4. Coloca un único trozo en todos y cada uno de los escalones siguiendo el orden de sucesión de la escalera 5. A medida que etiqueta verbaliza con términos propios del orden topológico, temporal o numérico.
II.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ensayo y error. 2. En el descendente no tiene en cuenta el anterior inmediato sino cualquier anterior 3. Igual que el 1 ó 2 pero con justificación verbal 4. Lo hace correctamente en los dos sentidos 5. Igual que 4 pero con justificación verbal
III.	<ol style="list-style-type: none"> 1. "Porque me acuerdo". 2. Intenta explicar el criterio 3. Empieza desde el principio, no tiene en cuenta el dato, pero aplica el criterio de la alternancia. 4. Tiene en cuenta el dato y aplica el criterio de la alternancia. 5. Introduce la secuencia numérica ó alude a la alternancia como instrumento para contar
IV.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ensayo y error 2. "Porque sí". 3. Empieza desde el principio a contar. Tiene en cuenta el dato si es ascendente, cuando es descendente empieza desde uno. 4. Tiene en cuenta el dato si es ascendente y en ocasiones cuando es descendente. En algunos casos y si es descendente, coge otro número para razonar sobre él. 5. Cuenta desde 5 e introduce términos ordinales, cuenta de dos en dos, etc. Bidireccional.
V.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Porque sí. 2. Usa la alternancia, pero no la secuencia numérica. 3. Empieza desde el principio 4. Tiene en cuenta el dato 5. Tiene en cuenta el dato y cuenta de dos en dos. Bidireccional

-
- | | | |
|----|----|---|
| | 1. | Porque sí. |
| | 2. | Porque es en uno sí y en otro no |
| VI | 3. | Porque come en el 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15... |
| | 4. | Porque van de dos en dos y tiene en cuenta un número distinto de uno. |
| | 5. | Usa el ciclo 1-10 para generalizar a toda la secuencia |
-

Tabla 2. Codificación de estrategias

2.4.1. Realizar con éxito la tarea asociada al Estado VI: (VI1a) ó (VI1b,VI2a, VI3a, VI1a)

Si el escolar ha superado la tarea asociada al Estado VI con la estrategia más evolucionada (5), quiere decir que es capaz de aplicar esquemas lógicos de seriación cíclica a la secuencia numérica, trasladando las relaciones lógicas ordinales entre los términos presentes en el tramo 1-10 a toda la secuencia. En esta situación se encuentran a RE.m. (5,4) y a MMA. (5,8), CEd. (4,11).

MMA (5,8). I – ... ¿Y en el 45 hay pan?. N – *Dice que sí con la cabeza.* I – ¿Por qué?. N – Porque es igual que el 5 y el 35. I – Ah, ¿y en el 47?. N – *Dice que sí con la cabeza.* I – ¿También? ¿Por qué?. N – Porque es igual que el 7. I – ¿Y en el 36?. N – *Dice que no con la cabeza.* I – ¿Por qué?. N – Porque el 6 (*señala el 6*) está sin pan.

RE.m. (5,4). I – Pero, ¿por qué sabes tú que en el 49 sí come?. N – Porque...Porque ha cogido dos escalones del 17 al 19. I –. ¿En el 66, come?. N – No. I – ¿Por qué?. N – Porque en el 65 come y en el 66 no, en el 67 sí. I – Pero, ¿tú por qué sabes que en el 65 es que sí?. N – En el ...sí, sí. I – Ah, en el 65 es que sí, ¿por qué los sabes?. N – Porque del 3 al , digo del 63 al 65 come. I – Y..¿Tú sabes si come en el 92?. N – No.. I – ¿No come en el 92? ¿Por qué?. N – Porque ha cogido uno, ...¿en el 42 has dicho?. I – En el 92. N – Porque tenía que comer en el 93. I –¿Por qué sabes tú que en el 93 sí? N – Porque del 91 al 93 se come. I Venga, dime en todos los que come. En el 83 sí, ¿después? N – En el 85 sí, en el 87 también, en el 89 también, en el 91 también, en el 93 también, en el 95 también, en el noventa y ..., a ver, en el 97 también, en el 99 también, en el noventa y....noventa y.. también come.

CEd. (4,11). N – En el 21 sí comía, en el 22 no, no en el 23 sí, 24 no, en el 25 sí y en el 26 no, y en el 27 sí y en el 28 no y en el 29 sí. I – Yo te he dicho en el 32. N – En el 31 sí y en el 32 no. I –. Y si yo te digo en el 48. N – *Piensa en silencio.* I – Pero, ¿cómo lo estás pensando? Dilo en voz alta. N – 26, 27, 28, 29, ,30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41 sí, en el 42 no, en el 43 sí, en el 44 no, en el 45 sí, en el 46 no. 47 sí, en el 48 no y en el 49 sí. I – Pero yo te he dicho 48. N – En el 48 no come I – Y si yo ahora te digo en el ..., 57. N – *Piensa callada.* I – ¿En el 57 qué? Dilo en voz alta lo que estás pensando. N – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, ...40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59.

En el 1 sí, en el 2 no, en el 3 sí, en el 5 sí, en el 8 ..., en el 7 sí, en el 9 sí. **I** – Entonces, ¿qué pasa en el 57?. **N** – En el 57 sí, cuenta.

Si usa estrategias menos evolucionadas que la **5**, significará que no ha llegado a extrapolar el tramo 1-10 al resto de la secuencia (en el sentido de seriación cíclica), pero conoce la relación lógica ordinal entre los términos numéricos, con números mayores que 10, versus alternancia como instrumento comparativo, por tanto, aplica esquemas lógicos-matemáticos propios del estado V a un tramo de cuyo extremo inferior es mayor que 10.

Por consiguiente, se obtiene el resultado número 1.

2.4.2. Realizar con éxito la tarea asociada al Estado V: (V1a) ó (V1b,V2a, V3a, V1a)

El 23.4% de la muestra presenta las coordenadas V1a. Estos escolares, siempre y cuando la estrategia seguida sea **3** o mayor que **3** (la **2** es una estrategia propia de estados inferiores) estarán usando relaciones lógicas ordinales entre los términos numéricos en el tramo 1-10, son capaces de establecer el instrumento secuencial, determinar posiciones ordinales y lógicas ordinales con ese instrumento y usarlo mentalmente prevaleciendo el criterio numérico.

Las coordenadas (V1b, V2a, V3a, V1a) las presentan RJu (3,11) CEd. (4,11), BJu. (5,4). No es significativo que se haya superado la tarea en la segunda ocasión de la situación V1, ya que CEd (4,11) es uno de los tres escolares que después realizarán con éxito la tarea del estado siguiente, pero hay que tener en cuenta que esta niña ha superado la situación con una estrategia del tipo 4, es decir tiene en cuenta el dato y actúa mentalmente de forma sintética ante la correspondencia serial secuencia numérica/alternancia.

CEd. (4,11). **I** – ...Entonces come en el 5, ¿qué número viene después en el que también come? **N** – El 6. **I** – No, tiene que ser en el que sí come. Bueno, el Piolín en el 5 come, ¿de acuerdo? Ese es el 5 y come. Pues si come en el 5, ¿come en el 8?. **N** – No. **I** – ¿Por qué?. **N** – Porque no está. **I** – Éste es el 5, Mira a ver si ese es el 8. **N** – ¿Quito esto (*el muro*)? **I** – No, no, ahí no se ve si ese es el 8.**I** – Pero, ¿por qué no está? Tienes que saber que en el 5, éste (5) es el 5, que en el 5 sí come.**N** – Es no porque en el 7 comía y en el 8 no. **I** – Muy bien, en el 9, ¿come?.....**N** – Porque en el 8 no comía y en el 9 sí. **I** – Entonces, después del 7, ¿en qué número come?. **N** – En el 8. **I** – El 8 es el que viene después del 7 pero ¿es en el que sí come?. **N** – En el 8 no comía y en el 9 sí.

2.4.3. Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Estados V y VI

En el Estado V se da la construcción del instrumento serial en el tramo 1-10, hay por tanto un soporte concreto material, mientras que en las tareas del Estado VI

se da la aplicación de ese soporte a otros tramos de la secuencia numérica distinto del 1-10.

1. Hay escolares que no alcanzan a resolver la tarea asociada al Estado VI pero han llegado a superar las situaciones VI2 y VI3 además de la tarea asociada al Estado V. Presentan una de estas dos opciones:

✓ No determinan el *primer elemento* del tramo al que aplicar el instrumento secuencial “a-sí, a⁺-no....” del que disponen y conocen (pues son escolares que han superado la tarea del Estado V) como es el caso de RJa (4,11), RAI (5,8) ó MNu. (6,2).

RAI (5,8) I.Cuando lleguemos al 20, en el 20 ¿habrá pan o no?. **N** – No. **I** – ¿Por qué? **N** – Sí, sí, sí. **I** – ¿Por qué?. **N** – Por ... porque en el 20 hay pan ...hasta el 22... Entonces en el 20 y el 22...

✓ Tienen un método sistemático para averiguarlo: “empezar desde 1 con el instrumento secuencial “a-sí, a⁺-no....”, pero ese método se dificulta cuando se trata de un número grande (resuelven el problema del *primer elemento*) y no llegan a dar la solución. En esta situación están CNa. (5,7) ó REI. (6,2).

REI. (6,2) I –Entonces, ahora, Elena, dime desde el 45,... ¿en el 45 come?.**N** – (Se queda un rato en silencio pensando.) **I** – ¿Cómo lo estás pensando? ¿Contando desde el 19? **N** – Es que(se pone la mano en la cabeza pensativa). **I** – ¿Qué has empezado desde el 1? **N** – Porque es que como...**I** – ¿Qué has empezado desde el 1 a contar? En el 1, en el 3,... ¿todo eso?. **N** – Y si no, ¿cómo?

Con ello se concluyen los resultados 2 y 3.

2. En este punto están los escolares que no llegan a resolver la tarea asociada al estado V pero han realizado la segunda y tercera situación, es decir están en V2a y V3a, y que con respecto a la tarea del estado VI no han superado la segunda.

No saben determinar el siguiente número en el que sí come en el tramo 1-10, por eso no superan con éxito la tarea asociada al Estado V, pero al realizar correctamente las situaciones V2 y V3 muestran competencias en la construcción del instrumento secuencial (situación V2) y en la determinación de una posición lógica ordinal en el tramo 1-10 (situación V3). Y con respecto al Estado VI no construyen la secuencia precisamente porque no saben decir el siguiente número en el que sí come y por tanto a partir de 9 no saben continuar, por lo que no superan la situación VI2, es decir son sujetos que aunque, les resuelva el problema del primer elemento, no saben continuar en tramos cuyo extremo inferior es superior a 10.

En esta situación se encuentran: RAn. (4,2), CSu. (4,10), BIn. (6,2), CPa (5,9).

RAn. (4,2), **I** – Y así van todos, vale. Entonces, ¿en el 12 hay pan?.**N** – No. **I** – ¿Por qué?. **N** – Porque yo cuento en el 1 y en el 2 y en el 3 y en el 4 y en el 5 y en

el 6 en el 7 y en el 8 y en el 9 y en el 10 y en el 7 y en el 8 y en el 9 y en el 10 y en el 12 y en el 13, y en el 14 y en el 12 no hay pan¹. ...I – Muy bien, Antonio, entonces después del 13 ¿en qué número come?. **N** – Voy a contar. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... 9, 10, el 11, el 12, el 13, el ... , después del 13, el ...14. **I** –Es el número que le sigue a 13 que sí come. **N** –¿Qué?... **I** – ¿Y en el 22 hay pan?. **N** – No. **I** – ¿Por qué?. **N** – Sí, sí, sí. **N** – Porque... es que, es que, es que... el primero que sí². **I** – Después del 22 ¿qué números vienen en los que sí come?. **N** –¿Qué?...

Con todo ello se obtiene el resultado número 4.

3. Con respecto a la tarea V se dan las coordenadas (V1b, V2a,V3b), y para el estado VI se dan: (VI1b, VI2b, VI3b).

En esta situación se encuentran RJa (4,6), y la cuestión central está en que este niño no sabe determinar el siguiente número a uno dado en el que sí come, tanto en el tramo 1-10, como en otros tramos de la secuencia numérica. La construcción del instrumento secuencial no es sintética, dividiéndolo en dos: por una parte está al alternancia y por otra la secuencia numérica.

4. Este punto es igual que el anterior pero con respecto a la tarea del estado VI los escolares no han superado la situación VI2, presentan las coordenadas, con respecto a la tarea del estado V: (V1b, V2a,V3b), y para el estado VI: (VI1b, VI2b).

Están en esta situación: RMa (4,11), ROI. (5,3), construyen el instrumento secuencial en el tramo 1-10, pero no lo usan para determinar posiciones ordinales, ni lógicas ordinales, ni son capaces de extender la secuencia construida a otros tramos distintos del señalado.

RMa. (4,11) **I** –¿En qué número, después del 5,... el Piolín come? **N** – ¿Qué número? **I** – Después del 5 come. -**N** – *Pone un Piolín en el escalón 7.* **I** – Pero, ¿qué número es ese? **N** – Ese, el 7³. ... **I** – La escalera es más larga, ¿eh? Está el 11, el 12, el 13, ... ¿ En qué número después del 9 come, cariño?. **N** – En el 3. **I** – ¿En el 3 come después del 9? ¿Por qué?. **N** – Porque... porque está mirando a los otros y por eso... quiere comer, pero ya no quiere comer.

Luego tenemos el resultado número 5.

5. Respuestas de la tarea asociada al estado V con las coordenadas: (V1b, V2b), y con respecto al estado VI: (VI1b, VI2b).

¹ Aplica sí-no a la secuencia, pero no sabe determinar el siguiente en la secuencia que es sí por eso es V1b

² La determinación del primer elemento es capital

³ Se mueve mentalmente con la alternancia y con los números por separado.

En esta situación se encuentran: MMa (5,5), MPa. (5,8), CFe. (3,11), BMa (4,4), BLi. (4,4), BRu (4,10), BLo (5,7). Estos niños y niñas no han sido capaces de establecer el instrumento secuencial en el tramo 1-10, ni en ninguno otro.

MMa (5,5). I – Mira los piolines están colocados en uno sí y en otro no, y este (1) es el 1, dime los números en los que están colocados estos piolines (señala los de los escalones 3, 5, 7 y 9. **N** – (*Empieza hablando muy bajito*) ...el 8 y el ... el 9. (*señala el Píolín del escalón 9.* I – Dime los números sólo de los escalones que tiene pajaritos.. **N** – El 1 y el ... el 2 (3).... el 3, el 4(5), el 5(7), el 6 (9).

2.4.4. Realizar con éxito la tarea asociada al Estado IV: (IV1a) ó (IV1b,IV2a, IV3a, IV1a)

Se empieza el análisis con los escolares que de primera instancia han resuelto la situación IV1 de la tarea asociada al estado IV; son los que desde el principio tienen en cuenta el dato numérico y usan la acción de contar.

Los que superan la situación con estrategia 5 llegarán a lo más alto en la prueba, como es el caso de REm (5,4), RAI (5,8), MMa (5,8), MNu (6,3), CEd (4,11). Que realicen con éxito la tarea de este estado con la estrategia señalada, significa que tienen en cuenta el dato de manera bidireccional, cuentan de dos en dos, introducen términos ordinales y son capaces de establecer relaciones lógicas ordinales con la acción de contar. Esto lo podemos observar en el siguiente ejemplo:

MMa, (5,8). I – ... Éste (5) es el 5, ¿por qué sabes que éste (7) es el 7?. **N** – Porque me paso el 6. I – Ahora sólo dejamos este que está en el 7. Quiero que sabiendo que ese es el 7 pongas uno en el 3. **N** – Coloca uno en el 3. I – ¿Por qué sabes que éste (3) es el 3?. **N** – Porque he contado para abajo. I – ¿Cómo?. **N** – Porque me paso al 6, al 5, al 4 y al 3

Los que pasan la tarea con la estrategia 4 significa que tienen en cuenta el dato de manera unidireccional, pero en sentido descendente cogen otro dato y a partir de él razonan como es el caso de CLu. (5,4).

CLu. (5,4). I – Claro, pero si uno está aquí, ese es el número 5, ¿qué has hecho para adivinar que éste (9) es el número 9. **N** – Pues he hecho 5, 6, 7, 8 y 9 (*va señalando con el dedo los escalones*). I Ahora (*quita el Píolín 9*) éste (5) es el número 5, yo quiero que sabiendo que es el número 5 coloques uno en el número 3. **N** – Yo lo he puesto porque yo sé cual es el número 3. (*Coloca uno en el escalón 3*). I – Ahora ponemos uno en el número 9 (*lo pone*) como tú habías dicho antes. Quiero que pongas uno en el número 7, ¿de acuerdo? Pero sabiendo que éste (9) es el número 9 **N** – Está chupao, porque el 6 es ahí (*pone un Píolín en el escalón 6*). I – ¿Y por qué sabes que es ahí?. **N** – Porque, mira, aquí éste el 6 (6). y este (7) es el 7.

Resuelven la tarea con la estrategia 3 los siguientes escolares: REI (6,2), RJu (3,11), RAn (4,2), RJa (4,6), REI (6,2), MJu 4,2, MPa (5,8), CSu (4,10), HCi (5,8). Se caracterizan porque en sentido ascendente tienen en cuenta el dato para localizar

una posición ordinal a partir de otra mediante el conteo, pero en sentido descendente empiezan desde uno, siendo una estrategia menos evolucionada que la anterior, pero se siguen manteniendo los mismos logros.

Los que resuelven la tarea con estrategias inferiores a 3 son los que lo hacen por ensayo y error. Han tenido dificultad a la hora de considerar dos números simultáneamente, al tener que localizar una posición ordinal a partir de otra, pero resuelven fácilmente el problema de localizar una posición ordinal a través del conteo.

2.4.5. Realizar con éxito la tarea asociada al Estado III: (III1a) ó (III1b, III2a, III3a, III1a)

El 40,4% de la muestra presenta la coordenada (III1a). Cuando la estrategia seguida sea 2, significa que conoce el criterio de la alternancia y actúan con ese razonamiento (“porque en uno hay y en otro no”, “porque da un salto”, etc.) pero no tienen en cuenta el dato, ni empiezan desde uno (les faltaría un método sistemático), por tanto actúan por ensayo y error hasta encontrar la solución, aunque cuentan con un instrumento secuencial, conocen el criterio pero les falta el *primer elemento* que genera la sucesión.

Es significativo la frase de RAI (5,8) cuando se refiere a la alternancia como instrumento secuencial para contar: “Porque...porque **he contado** y habías dicho uno sí, otro no, otro sí. *(Coloca los dedos en los escalones 1, 2, 3 y 4)*”

Seis escolares presentan las coordenadas (III1b, III2a, III3a, III1a), cuatro de ellos la realizan con estrategia menor ó igual a 2, y uno con la estrategia 3, ninguno logrará realizar la tarea del estado V.

2.4.6. Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Estados III, IV y V

En estos tres estados se da la construcción de un instrumento secuencial, se trata de analizar y estudiar cuando los escolares usan el instrumento secuencial propio del estado V en función de los instrumentos construidos en los dos estados previos.

2.4.6.1. Realizan correctamente cada una de las tareas asociadas a los estados.

Se presentan estas ternas de estrategias: (2, 3, 2) (4,5,4), (5, 5, 5), (5, 5, 4), (3,3,3), (3, 3, 2) (3,4,2) (4,4,2), (2,4,2) (4, 3, 2) (1,2,1). La estrategia del estado V nunca mejora la del estado III, en todo caso la iguala. Las actuaciones del tipo (x, y, 2) muestran que los escolares prefieren usar, los instrumentos secuenciales propios de los estados III y IV, por separado para resolver problemas propios del estado V. Pero ninguno de ellos alcanza el estado VI.

Los que actúan de la forma (4, 4, 2), que a pesar de conseguir buenos rendimientos en las tareas asociadas a los estados III y IV, no consiguen razonar con los esquemas lógicos matemáticos propios del Estado V.

Las ternas del tipo (x, y, 3) únicamente aparecen cuando x e y toman también el valor 3, ello significa que para el uso de los instrumentos secuenciales de cualquier estado se debe disponer de un método sistemático.

Cuando aparece (x, y, 4) ó (x, y, 5), se da que x e y toman valores mayores ó iguales a 4, y ello significa que los escolares utilizan la alternancia y el conteo para determinar posiciones lógicas ordinales pues tienen en cuenta el dato, y es cuando usan la correspondencia serial como instrumento secuencial para determinar posiciones lógicas ordinales. Entre ellos están los que presentan la posibilidad de alcanzar el Estado VI.

2.4.6.2. Resuelven las tareas asociadas a los estados III y IV pero no resuelven la del estado V.

Cuando no se supera la situación V3, es decir cuando con respecto al estado V se tienen las coordenadas (V1b, V2a, V3b), y se han superado las tareas correspondientes a los estados III y IV, se considera que, aunque se logre establecer el instrumento secuencial, éste no le sirve para resolver problemas de ordinación, a pesar de que con los instrumentos secuenciales propios de los estados III y IV sí han resuelto tareas de esos estados. En esta situación se encuentran: RJa (4,6), RMa (4,11), ROI (5,3). Las estrategias que presentan estos escolares en los estados III y IV no pasan de 2 para el III y de 3 para el IV.

Considerando, ahora el caso en el que no se llega a resolver la tarea del Estado V dándose las coordenadas (V1b, V2b), pero habiéndose realizado con éxito las tareas asociadas a los estados III y IV, tenemos que para estos casos los sujetos han sido capaces de establecer, por separado, la alternancia y conteo como instrumentos secuenciales llegando a determinar posiciones lógicas ordinales pero son incapaces de establecer un nuevo instrumento que sintetice los dos anteriores mediante una correspondencia serial. En este caso nos encontramos a MMA (5,5), MPa (5,8), CFe (3,11).

2.4.6.3. Resuelven las tareas asociadas al estado III pero no resuelven las de los estados IV y V.

En esta situación hay un caso: HLo (4,7). Esta niña tiene muy claro el criterio de la alternancia y no se equivoca nunca con el razonamiento “porque en uno hay y en otro no”, sin embargo, con respecto al conteo, se equivoca a la hora de localizar posiciones ordinales (IV3b) y lógicas ordinales (IV1b). Y en cuanto a la secuencia del Estado V, no llega ni siquiera a construir la correspondencia serial.

Con ello se obtiene resultado número 6.

2.4.6.4. Resuelven la tarea asociadas al estado IV pero no resuelven las de los estados III y V.

No se ha encontrado casos en esta situación, todos los escolares entrevistados que han resuelto la tarea de conteo, habían resuelto previamente la tarea de la alternancia.

2.4.6.5. Resuelven la tarea asociadas al estado V pero no resuelven las de los estados III y IV.

No se da esta situación entre los escolares de la muestra.

2.4.6.6. No resuelven ninguna de las tareas asociadas los estados III, IV y V.

Hay quién construye los instrumentos secuenciales con la alternancia y el conteo pero no resuelve los problemas de ordinación planteados en las tareas III y IV; corresponden a las coordenadas (III2a, IV2a). En esta situación se encuentran: MRa (4,4), MAI (5,1), CAd (4,8), BIn (6,2), HDa (4,4).

Se dan casos en los que el Estado IV presenta las coordenadas (IV1b, IV2a, IV3b) y no se resuelven las tareas asociadas a los Estados III y V, lo que conduce al resultado número 7.

2.4.7. Realizar con éxito la tarea asociada a los Estado I y II: ((I1a) ó (I1b, I2a, I3a, I1a)) y ((II1a) ó (II1b, II2a, II3a, II1a))

El 88,9% ha superado con éxito las tareas asociadas a los estados I y II, con coordenadas (I1a) y (II1a) con estrategias mayores ó iguales que 3 con respecto a la segunda tarea y con estrategias mayores o iguales que 4 respecto a la primera.

Por tanto, los escolares son capaces de diferenciar los elementos de una serie al tener que etiquetarlos, también pueden comparar dos elementos consecutivos mediante la relación infra-lógica “estar al lado de” del orden topológico.

2.4.8. Comparación de respuestas de las tareas asociadas a los Estados I y II con respecto a los demás estados.

El aspecto a destacar se da cuando se presentan las coordenadas (II1b, II2a, II3a, II1a) con respecto a la segunda tarea. Ello significa que los escolares identifican a nivel verbal *antes* y *después*, ó frases como “justamente antes” y “antes de”, dado un término de una serie sólo ven un sentido, por eso en un principio es II1b, pero después de plantear las situaciones II2 y II3, toma en consideración los dos sentidos.

Los escolares que están en la situación son: MAI (3,4), MMar (3,11), MPa (5,8), CRo (3,6), BJo (3,10). No llegan a realizar las tareas del estado siguiente salvo el caso de MPa (5,8) que realiza correctamente hasta la tarea del estado IV, pero este niño procede con la estrategia 4 en el estado II.

3. Resultados

1. Para establecer relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en cualquier tramo de ella, es necesario que se apliquen esquemas lógicos-matemáticos de seriación cíclica generados por el tramo 1-10.

2. Los escolares que únicamente usan el instrumento secuencial, sin llegar a aplicar esquemas lógicos matemáticos de *primer elemento* para la determinación de posiciones ordinales en un tramo cuyo extremo inferior es superior a 10, no alcanzan el Estado VI de relaciones lógicas-ordinales de la secuencia numérica.

3. No basta con tener un método en la determinación de posiciones ordinales, para conseguir, con ello, establecer relaciones lógicas ordinales en cualquier tramo de la secuencia.

4. El que un escolar tenga construido el instrumento secuencial en el tramo 1-10 secuencia numérica /alternancia y localice posiciones ordinales con ese instrumento en ese tramo, no es condición suficiente para: Determinar posiciones lógicas ordinales en el tramo 1-10 versus alternancia como instrumento comparativo, y extender el instrumento secuencial a tramos cuyos extremos inferiores sean mayores que 10.

5. El establecimiento por parte del escolar, del instrumento secuencial para manifestar relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica, en el tramo 1-10, no es condición suficiente para extender la secuencia construida a otros tramos distintos del señalado.

6. Los escolares resuelven mejor tareas de ordinación con instrumentos secuenciales sencillos como la alternancia que las mismas tareas con el conteo.

7. El que un individuo cuente correctamente del 1 al 10, no garantiza el éxito en la resolución de problemas ordinales en ese tramo.

4. Discusión

Con una didáctica del número natural teniendo en cuenta los estados de conocimiento, se alcanzaría la sistematización de la secuencia mediante la estructura de seriación cíclica subyacente, lo que permitiría: contar de n en n , recuento progresivo para solucionar problemas de suma y resta, tablas de multiplicar y cálculo mental.

Se debe tener en cuenta la génesis del conocimiento serial aplicado a la secuencia numérica tal y como se ha hecho en el establecimiento de los estados, explícitamente tener en cuenta dicha génesis significa que aunque el dominio del 1 al 10 se realice de una manera memorística, hay que conseguir que se establezcan relaciones de secuenciación propias del conteo trabajando actividades con esquemas lógicos matemáticos como estos:

- En el tramo 1-10 cada término es primero y último: primero de los que le suceden y último de los que le anteceden.
- La relación de siguiente es antisimétrica: cada elemento ocupa un lugar determinado y no puede cambiarse por otro.
- Conseguir todos los siguientes a partir del siguiente inmediato de cada uno de los términos trabajando la sucesión de siguiente

Una vez que se domina el tramo 1-10, trabajar el esquema de seriación cíclica subyacente a la secuencia numérica: si el siguiente de 5 es 6, entonces el siguiente de 15 es 16, de 25 es 26, de 35 es 36, etc. Trabajando la decena ordinal y con ello los inicios del cálculo mental: si 5 y 2 son 7 entonces 15 y 2 son 17, 25 y 2 son 27, 35 y 2 son 37, etc., todo lo que ocurre en el ciclo se da en cualquier decena y eso es lo que se debería trabajar explícitamente con los niños y niñas según los estados de conocimiento presentados en este trabajo.

Referencias

- Brannon, E. M. (2002). *The development of ordinal numerical knowledge in infancy*. *Cognition*, 83, 223-240.
- Briand, J. (1999). *Contribution à la Réorganisation des savoirs prè-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prènumérique. Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (1), 41-75.
- Castro, E.; Cañadas, M.C. & Molina, M. (2010). *El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático*. *UNO*, 54, 55-67.
- Clark, J. (1983). *Development of Seriation and Its Relation to the Achievement of Inferential Transitivity*. *Journal of Research in Science Teaching*, 20 (8), 781-94.
- Clements, D.H. (1984). *Training effects on the development and generalization of Piagetian logical operations and knowledge of number*. *Journal of Educational Psychology*, 76, 766-776.
- Dieudonné J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Alianza Universal. Madrid.
- Fernández, C. (2015). *Análisis cognitivo de la secuencia numérica: procesamiento de la información y epistemología genética*. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana, PEL*, 52(2), 172-188.
- Fernández, C (2010). *Análisis epistemológico de la secuencia numérica*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 13, 59-88.
- Frege, G. (1884) *Die Grundlagen der Arithmetik*. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. [Trd. cast. de U. Moulines, *Fundamentos de la Arimética*. Barcelona: Laia, 1972].
- Geary, D.C. (2006). Development of Mathematical Understanding. En W. DAMON & R. LERNER (Eds.), *Handbook of child psychology. Vol. 2: Cognition, perception and language* (pp. 777- 810). Wiley. New York.
- Gillies, D. (2011). *Frege, Dedekind, and Peano on the foundations of arithmetic*. Routledge. London.
- Grize, J.B (1979). Observaciones sobre la epistemología matemática de los números naturales. En J. PIAGET (Ed.). *Tratado de lógica y conocimiento científico. Vol. II: Epistemología de la lógica* (pp. 109-120). Piados. Buenos Aires.

- Muldoon, K., Lewis, C. & Towse, J. (2005): *Because it's there! why some children count, rather than infer numerical relationships*. *Cognitive Development*, 20 (3), 472-496.
- Ortiz, A. (2009). *Lógica y pensamiento aritmético*. PNA, 3 (2), 51-72.
- Piaget, J. (1983). *Introducción a la Epistemología Genética. Tomo 1. El Pensamiento Matemático*. Paidós. Buenos Aires.
- Piaget, J. & Apostel, L. (Eds) (1986). *Construcción y validación de las teorías científicas. Contribución de la epistemología genética*. Paidós Studio. Barcelona.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales: clasificaciones y seriaciones*. Guadalupe. Buenos Aires.
- Russell, B. (1982). *Los Principios de la Matemática*. Espasa Calpe. Madrid. (Versión original 1903).
- Sarnecka, B. W. & Gelman, S.A. (2004). *Six does not just mean a lot: Preschoolers see number words as specific*. *Cognition*, 92, 329-352.
- Sinclair De Zwart, H. (1978). *Adquisición del lenguaje y desarrollo de la mente*. Oikos-Tau, S. A. Barcelona.
- Stegmüller, W. (1970). *Teoría y Experiencia*. Ariel. Barcelona.
- Vergnaud, G. (2013). *Pourquoi la théorie des champs conceptuels?*. *Infancia y Aprendizaje*, 36 (2), 131-161.

Catalina María Fernández Escalona

Profesora titular de Universidad de Málaga

Un sexenio de investigación

Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales

cfernandez@uma.es