UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 84-96

Aplicación de la función exponencial sobre el cambio aritmético en la variable independiente

Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano, Rodolfo E. D`Andrea

Fecha de recepción: 2016-02-20
Fecha de aceptación: 2017-03-01

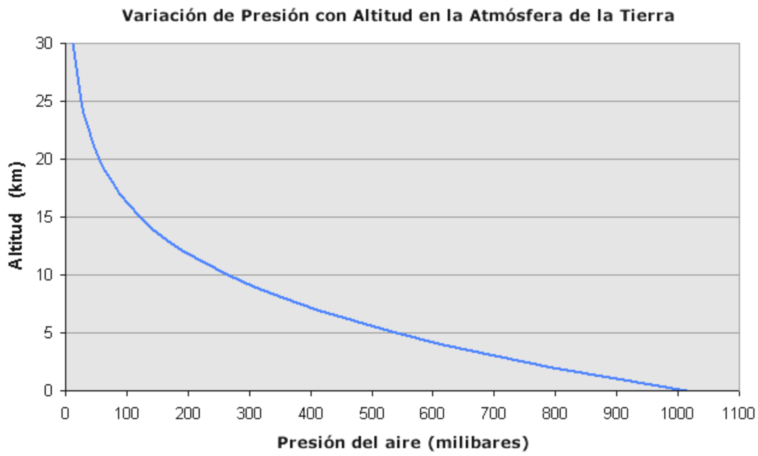
Resumen	En este trabajo se presentan en forma general las propiedades más comunes de la función exponencial. Se presta mayor atención a una propiedad de esta función que en general no es introducida en los cursos elementales de matemática: "*Cambios aritméticos iguales en la variable x conducen a cambios proporcionales iguales en la variable y. Si llamamos c al cambio aritmético en x, entonces*(b^c*-1) es el cambio proporcional en y".* Además, se dan algunos conceptos elementales del estudio de series de tiempo, y finalmente se presenta una aplicación. **Palabras clave:** Función exponencial, proporcionalidad, serie temporal
Abstract	In this work are presented in general form properties more common of the exponential function. Greater attention to a property of this function that is not generally introduced in elementary mathematics courses: "arithmetic equal changes in the variable x lead to equal proportional changes in the variable and." "If we call the arithmetic shift in x c, then (bc-1) is the proportional change in and" also realize some basic concepts in the study of time series, and finally presents an application. **Keywords:** Exponential function, proportion, temporal series
Resumo	Neste trabalho são apresentadas de um modo geral as propriedades mais comuns da função exponencial. Uma atenção maior é dada a uma propriedade dessa função, que em geral não é introduzida nos cursos elementares de matemática: "Mudanças aritméticas iguais na variável x conduzem a mudanças proporcionais iguais na variável y. Se chamarmos c a mudança aritmética em x, então (bc-1) é a mudança proporcional em y" Além disso são dados alguns conceitos elementares do estudo de séries de tempo, e finalmente se apresenta uma aplicação. **Palavras chaves**: Função exponencial, proporcionalidade, série temporal

1. Introducción

En muchas ocasiones los montañistas presentan algunos síntomas como cefalea, malestares gastrointestinales, debilidad o fatiga, inestabilidad o vértigos, trastornos del sueño. Estos síntomas son señales de los efectos de la altura sobre el organismo humano, la cual está en íntima relación con la presión atmosférica.

La presión atmosférica es causada por el peso del aire sobre un cierto punto de la superficie terrestre. Por lo tanto, es natural presumir que cuanto más alto esté un lugar, tanto menor será la presión, pues es menor la cantidad de aire que hay por arriba del lugar. Así, en una montaña la cantidad de aire que hay en la parte más alta es menor que la que hay sobre una playa, debido a la diferencia de alturas. Es decir, cuanto mayor es la altura de la superficie terrestre respecto al nivel del mar, menor es la presión del aire. Dicho de otro modo: la presión atmosférica disminuye con la altura.

Sin embargo, la disminución que sufre la presión atmosférica con la altura no es directamente proporcional a la altura, ya que el aire puede comprimirse mucho. Las masas de aire más próximas al suelo están comprimidas por el propio peso del aire de las capas superiores y son, por tanto, más densas. Así, cerca del nivel del mar un pequeño ascenso en altura supone una gran disminución de la presión, mientras que a gran altura hay que ascender mucho más para que la presión disminuya en la misma medida. La presión atmosférica es de alrededor 1014 milibares al nivel del mar. A una elevación de 10 kilómetros aproximadamente la altura del Monte Everest, la presión es de 265 milibares. En el siguiente se representa la variación de la presión atmosférica respecto de la altitud en la Tierra.



Extraído de Ventanas al Universo por Randy Russell.
http://www.windows2universe.org/earth/Atmosphere/pressure_vs_altitude.html&lang=sp

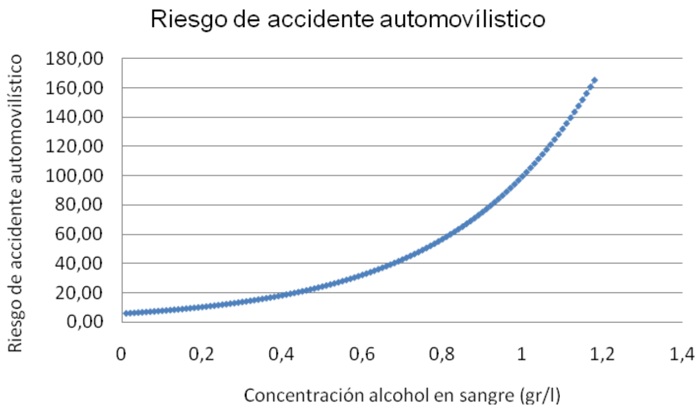
La ingesta del alcohol afecta a las capacidades físicas de las personas. Provoca una importante disminución de los reflejos, se altera el campo visual, perturba los oídos, disminuye la resistencia física y aumenta la fatiga y el sueño. El alcohol es uno de los factores de riesgo implicados en los accidentes de tráfico. Conducir bajo los efectos del alcohol es peligroso. Los conductores deberían ser conscientes sobre el riesgo al cual se exponen cuando conducen de este modo.

La alcoholemia representa el volumen de alcohol que hay en la sangre y se mide en gramos de alcohol por cada litro de sangre (g/l) o su equivalente en aire espirado.

En general las legislaciones vigentes establecen que las tasas de alcoholemia permitidas para los conductores son de 0,5 gr/l. Sin embrago la tendencia a nivel internacional es ir rebajando las tasas máximas permitidas, con la finalidad de alcanzar al menos el límite de 0,1-0,2 g/l para conductores en general y a 0,0 g/l para los profesionales. Un modelo matemático que predice la probabilidad de tener un accidente automovilístico al conducir bajo los efectos del alcohol, es:

$$R(x) = 6 \bullet e^{2,81\,x}$$

Donde, x: es la concentración de alcohol en la sangre, k: es una constante, R: es la probabilidad de tener un accidente (expresada en porcentaje); e: corresponde a 2,71.



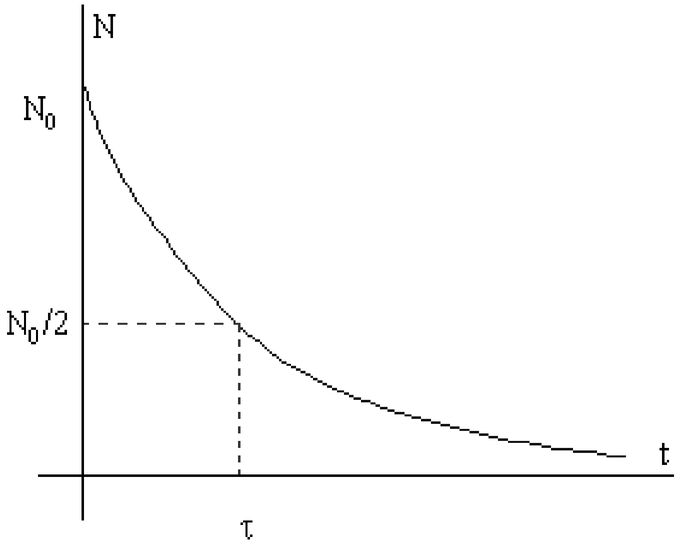
A partir de una alcoholemia de 0,5 g/l los efectos del alcohol son evidentes para la gran mayoría de las personas, pero aún por debajo de ese nivel de alcohol en sangre puede haber ya un mayor riesgo de accidente. Además, por debajo de la tasa legal el conductor no suele ser consciente del riesgo al que se expone y no toma las precauciones adecuadas, por lo que puede aumentar su nivel de tolerancia al riesgo. Así, la probabilidad de tener un accidente teniendo una concentración de 1 gr. de alcohol en la sangre es 1, es decir, que el riesgo es del 100 %.

Los núcleos de la materia están compuestos por protones y neutrones, que permanecen unidos por la llamada fuerza fuerte. Algunos núcleos tienen una combinación de protones y neutrones con una configuración no estable. Estos núcleos son inestables o radiactivos. Las sustancias radiactivas se desintegran emitiendo radiaciones y transformándose en otras sustancias. Este proceso se realiza con el paso del tiempo y a un ritmo que varía según el tipo de sustancia.

Se ha observado que todos los procesos radiactivos simples siguen una ley exponencial decreciente. Si N_0 es el número de núcleos radiactivos en el instante inicial, después de un cierto tiempo *t*, el número de núcleos radiactivos presentes *N* se ha reducido a

$$N = N_0 e^{-\beta t}$$

Donde β es una característica de la sustancia radiactiva denominada constante de desintegración.



Los fenómenos descriptos antes pueden modelarse utilizando la función exponencial, la cual es útil para describir numerosos fenómenos naturales. Así presentan comportamiento exponencial: la reproducción de una colonia de bacterias, la desintegración de una sustancia radiactiva, algunos crecimientos demográficos, la inflación, la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, etc. Se define la función exponencial del siguiente modo:

$$y = ab^x \qquad \text{con } a \neq 0 \quad \text{y} \quad b > 1$$

2. Propiedades generales de la función exponencial

Algunas de las propiedades que generalmente se explicitan cuando se introduce al estudio de la función exponencial son las siguientes:

1) La función existe para cualquier valor real, es decir el dominio de la función es el conjunto R.
2) En todos los casos la función pasa por un punto fijo: el (0,1), o sea que siempre: corta al eje de ordenadas en el punto (0,1).
3) Los valores de y son siempre positivos, por tanto: la función siempre toma valores positivos para cualquier valor de x, es decir el condominio es el conjunto de los reales positivos.
4) Siempre creciente o siempre decreciente (para cualquier valor real), dependiendo de los valores de la base "a".
5) Se acerca al eje X tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia la derecha en el caso en que a<1 y hacia la izquierda en caso de a>1. Se dice por ello que el eje X es una asíntota horizontal (hacía la izquierda si a>1 y hacía la derecha si a<1)

3. Cambio Aritmético en la Variable Independiente

En la función exponencial existe una propiedad muy útil que relaciona los cambios que producen en la variable *x* respecto a la variable *y*, la cual en general no se enuncia:

1) Cambios aritméticos iguales en la variable x conducen a cambios proporcionales iguales en la variable y.
2) Si llamamos c al cambio aritmético en x, entonces $(b^c\text{-}1)$ es el cambio proporcional en y.

Se probará esta propiedad y luego se verá una aplicación práctica de la misma. Sean x_1, x_2, x_3 y $x_4 \in Df(x) = ab^x$ tales que $x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = c$, entonces se quiere probar que: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)} = \dfrac{f(x_4) - f(x_3)}{f(x_3)}$

Que es lo mismo que: $\dfrac{y_2 - y_1}{y_1} = \dfrac{y_4 - y_3}{y_3}$ (1)

Para ello, teniendo en cuenta que $y = ab^x$ con $a \neq 0$ y $b > 1$, y que $x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = c$, se calculan los valores de función que corresponde a los x_1, x_2, x_3 y $x_4 \in Df(x)$, luego se los reemplaza en ambas miembros de la expresión (1), con lo cual se obtiene:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{ab^{x_2} - ab^{x_1}}{ab^{x_1}} = \frac{b^{x_2}}{b^{x_1}} - 1 = b^{(x_2 - x_1)} - 1 = b^c - 1 \quad (2)$$

$$\frac{y_4 - y_3}{y_3} = \frac{ab^{x_4} - ab^{x_3}}{ab^{x_3}} = \frac{b^{x_4}}{b^{x_3}} - 1 = b^{(x_4 - x_3)} - 1 = b^c - 1 \quad (3)$$

De las expresiones (2) y (3) surge que efectivamente la expresión (1) es verdadera, con lo cual queda probada la propiedad.

Si la función exponencial se define en una forma más general como: $y = ab^{px}$ con $a \neq 0$ y $b > 1$, entonces la propiedad anterior se transforma en: $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{y_i} = b^{pc} - 1$.

3.1. Aplicación sobre cambio aritmético en la variable independiente

Al momento de planificar actividades futuras surgirán, entre otras, algunas de estas preguntas: ¿Han aumentado las ventas, (o las producciones)?; ¿Cuál ha sido el cambio proporcional mensual en las ventas?; ¿Existe un superávit de la cantidad de agua caída en la zona en los últimos días?; ¿ Cuál ha sido el cambio proporcional en las lluvias anuales?; Es decir, en muchas situaciones, tomando como base lo ocurrido en el pasado se requiere conocer el comportamiento futuro de ciertos fenómenos con el fin de planificar, prever o prevenir. Una técnica muy importante para hacer inferencias sobre el futuro, con base en lo ocurrido en el pasado, es el análisis de series de tiempo.

Arellano, (2001), define *Serie de Tiempo* a un conjunto de mediciones de cierto fenómeno o experimento registradas secuencialmente en el tiempo. Estas observaciones serán denotadas por $\{x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n)\} = \{x(t) : t \in T \subseteq R\}$ con $x(t_i)$ el valor de la variable x en el instante t_i. Si T = Z se dice que la serie de tiempo es discreta, y si T = R se dice que la serie de tiempo es continua. Cuando $t_{i+1} - t_i = k$ para todo $i = 1,...,n-1$, se dice que la serie es equiespaciada, en caso contrario será no equiespaciada. Un modelo clásico para una serie de tiempo, supone que una serie *x(1), ..., x(n)* puede ser expresada como suma o producto de tres componentes:

1) *Tendencia:* representa el comportamiento predominante de la serie, puede interpretarse vagamente como el cambio de la media a lo largo de un periodo
2) *Estacionalidad*: representa un movimiento periódico de la serie de tiempo, siendo la duración de la unidad del periodo generalmente menor que un año
3) *Error aleatorio*: representa movimientos irregulares (al azar) y todos los tipos de movimientos de una serie de tiempo que no sea tendencia, variaciones estacionales y fluctuaciones cíclicas.

Esta autora establece tres modelos de series de tiempos, que generalmente se aceptan como buenas aproximaciones a las verdaderas relaciones, entre los componentes de los datos observados. Estos son:

1) Aditivo: $x(t) = T(t) + E(t) + A(t)$

2) Multiplicativo: $x(t) = T(t) \cdot E(t) \cdot A(t)$

3) Mixto: $x(t) = T(t) \cdot E(t) + A(t)$

Donde: *x(t)* serie observada en instante *t; T(t)* componente de tendencia; *E(t)* componente estacional y *A(t)* componente aleatoria (accidental).

Un modelo aditivo (1), es adecuado, por ejemplo, cuando *E(t)* no depende de otras componentes, como *T(t),* sí por el contrario la estacionalidad varía con la tendencia, el modelo más adecuado es un modelo multiplicativo (2). Es claro que el modelo (2) puede ser transformado en aditivo, tomando logaritmos. El problema que se presenta, es modelar adecuadamente las componentes de la serie. Si la componente estacional *E(t)* no está presente, y el modelo aditivo es adecuado, esto es:

$$X(t) = T(t) + A(t)$$

Un método para estimar la tendencia *T(t)*, consiste en ajustar una función del tiempo, como un polinomio, una exponencial u otra función suave de *t*. Entre las funciones adecuadas para esta tarea se encuentran las presentadas en la Tabla 1:

Tabla 1: Funciones útiles para estimar la tendencia en el modelo *X(t) = T(t) + A(t)*

Lineal	$T(t) = n + m\,t$
Exponencial	$T(t) = n\,e^{mt}$
Exponencial modificada	$T(t) = n + m\,e^{pt}$
Polinomial	$T(t) = a_0 + a_{1t} ,\ldots,+ a_{mt}^{m}$
Gompertz 0 < r < 1	$T(t) = e^{(n + m(rt))}$
Logística	$T(t) = \dfrac{1}{n + m\left(r^2\right)},\ 0 < r < 1$

Debe tenerse en cuenta que la curva de tendencia tiene que cubrir un periodo relativamente largo para ser una buena representación de la tendencia a largo plazo. Sin embargo, la tendencia rectilínea y exponencial son aplicables a corto plazo, puesto que una curva con forma de *S* a largo plazo, puede parecer una recta en un período restringido de tiempo.

Al analizar una serie de tiempo, lo primero que debe hacerse es graficar la serie. Esto permite detectar las componentes esenciales de la serie. El gráfico de la serie permitirá ver: tendencias, variación estacional y variaciones irregulares (o componente aleatoria). Para obtener un modelo, es necesario estimar la tendencia y la estacionalidad. Para estimar la tendencia, se supone que la componente estacional no está presente. La estimación se logra al ajustar una función de tiempo a un polinomio o creando una función que intente capturar patrones importantes en los datos, dejando fuera el ruido, lo cual se conoce como suavizar o alisar o atenuar al conjunto de datos. Para estimar la estacionalidad se requiere haber decidido el modelo a utilizar (mixto o aditivo). Una vez estimada la tendencia y la estacionalidad se está en condiciones de predecir.

Ejercicio: Para el modelo matemático que predice la probabilidad de tener un accidente automovilístico al conducir bajo los efectos del alcohol: $R(x) = 6 \bullet e^{2{,}81\,x}$, confeccionar una tabla donde se ponga en evidencia la validez de la propiedad anterior : $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{y_i} = b^{pc} - 1$. Teniendo en cuenta que para este modelo son: *a=6; b=e*; *p= 2,81* y c =0,1, entonces es: $b^{pc} - 1 = e^{2{,}81*0{,}1} - 1 = 1{,}32 - 1 = 0{,}32$

X(gr/l)	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
R(x) %	18,46	24,45	32,39	42,9	56,81	75,25	99,66	131,99	174,82	231,54
y2-y1	5,99	7,93	10,51	13,92	18,43	24,41	32,33	42,83	56,72	
(y2-y1)/y1	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	

3.2. Ejemplo

En la Tabla 2 se muestran los datos correspondientes a las exportaciones de una empresa, expresadas en millones de dólares. Se solicita:

1) Elaborar los gráficos para los datos y las tendencias.
2) Interpretar los datos para los casos en que se ajusten modelos: lineal y exponencial
3) Pronosticar la tendencia de exportación para el tercer trimestre del año 2016 aplicando ambos modelos.

Tabla 3: Exportaciones en millones de dólares de la Empresa R& P

	Trimestre			
Año	I	II	III	IV
2008			412	366
2009	297	468	406	359
2010	288	406	304	224
2011	232	396	396	354
2012	312	466	437	386
2013	350	482	401	323
2014	278	413	422	410
2015	403	618	593	527
2016	524	675		

Sea *t* cada uno de los 32 trimestres que van de 2008 a 2016, o sea que *t* = 1 para el tercer trimestre de 2007, *t* = 2 para el cuarto trimestre, y así sucesivamente. Así que el dominio de definición de *t* es el conjunto de los enteros de 1 a 32 inclusive, y sea *T(t)* las exportaciones trimestrales en millones de dólares. Con estos datos se desea estimar la tendencia. Suponiendo que la componente estacional *E(t)* no está presente y que el modelo aditivo es adecuado. Entonces el modelo es: $x(t) = T(t) + A(t)$

En este caso podemos estimar la tendencia *T(t*), lo cual significa ajustar una función del tiempo, utilizando alguna de las funciones presentadas en la Tabla 2. En este ejemplo se hace uso de los modelos: 1) lineal y 2) exponencial.

Modelo lineal: $\boldsymbol{T(t) = n + m\,t}$

En este modelo, que en términos de los ejes cartesianos pueden escribirse como: $y(x) = n + m\,x$, se tienen 2 parámetros *n* y *m*, los cuales pueden estimarse utilizando el método de mínimos cuadrados, tarea que es posible ejecutar sin dificultades mediante una simple planilla de cálculo. Así se obtiene:

$$T(t) = n + m\,t \qquad\qquad T(t) = 299{,}3 + 6{,}34\,t$$

ó lo que es igual: $\mathrm{y} = 299{,}30 + 6{,}34\,\mathrm{x}$

El valor de la pendiente *m*= $6{,}34$ al ser positivo indica que existe una tendencia ascendente de las exportaciones aumentando a un cambio o razón promedio de 6,34 millones de dólares por cada trimestre. El valor de *m* $= 299{,}30$, ordenada al origen, indica el punto en donde la recta corta al eje Y, o sea cuando se anula X o (x=0 ó *t* = 0), es decir indica que las exportaciones estimadas para el inicio del análisis, para este ejemplo el tercer trimestre del año 2007, son 299,30 millones de dólares. Para pronosticar la tendencia de exportación para el tercer trimestre del año 2016 se reemplaza *t* = 33 en la recta de tendencia, obteniendo el siguiente resultado:

$$T(t) = 299{,}30 + 6{,}34\ t$$

$$T(33) = 299{,}30 + 6{,}34 \cdot 33 = 508{,}52$$

Es decir, aplicando el modelo lineal se estima que las exportaciones para el tercer trimestre del año 2016 serian de 508,52 millones de dólares.

Modelo exponencial: $\boldsymbol{T(t) = n\, e^{m\,t}}$

En este caso, que en términos de los ejes cartesianos pueden escribirse como: $y = n\, e^{mt}$ también existen 2 parámetros para estimar, *n y m*, sin embargo el modelo no es lineal, con lo cual, para poder aplicar el método de mínimos cuadrados, es necesario primero realizar una transformación en los datos. Es posible obtener un modelo lineal, a partir del exponencial, simplemente aplicando logaritmos:

$$T(t) = n\, e^{m\,t}$$

$$Ln\, T = Ln\, n + m\,\mathrm{t} \qquad (4)$$

Reemplazando en la expresión (4), $T´(t) = Ln$ y $n´ = Ln\, n$**,** puede reescribirse el modelo exponencial de la siguiente forma:

$$T´(t) = n´ + m\, t \qquad (5)$$

La expresión (5) permite, mediante el ajuste por el método de mínimos cuadrados, estimar los parámetros del modelo exponencial. Así para el modelo $T´(t) = n´ + m\, t$ (5), se obtiene: $\boldsymbol{T´(t) = 5{,}711 + 0{,}016\, t}$

Sabiendo que *m* = 0,016 y teniendo en cuenta que dado que es: $n´ = Ln\, n$**,** entonces es: *n*= *e*$^{(5{,}711)}$ = 302,17309, con lo cual el modelo exponencial $T(t) = n\, e^{m\,t}$ quedaría escrito como :

$$T(t) = 302{,}173\ e^{0{,}016\,t}$$

Para pronosticar la tendencia de exportación para el tercer trimestre del año 2016 se reemplaza t = 33 en la ecuación de tendencia, obteniendo el siguiente resultado:

$$T(t) = 302{,}173\ e^{0{,}016*33} = 512{,}34$$

Es decir, aplicando el modelo exponencial se estima que las exportaciones para el tercer trimestre del año 2016 serian de 512,34 millones de dólares.

4. Resultados y Conclusiones

Obtenidos los modelos matemáticos que permitirán realizar estimaciones del monto en millones de dólares de las exportaciones trimestrales de una empresa, es necesario también realizar una interpretación de los parámetros. En el ejemplo presentado, para los modelos considerados, se obtuvieron las siguientes expresiones matemáticas:

$$T(t) = 299{,}3 + 6{,}34\ t \qquad \text{Modelo lineal}$$

$$T(t) = 302{,}173\ e^{0{,}016\ t} \qquad \text{Modelo exponencial}$$

En el modelo lineal, cuya representación gráfica es una recta, (ver Gráfico 1 al pie), el coeficiente de la variable independiente, el tiempo en trimestres, indica la relación entre la variación de la Tendencia *T(t)* con respecto a la variación temporal, entre dos trimestres, Dicho de otro modo, el coeficiente de la variable *tiempo*, *t,* (pendiente de la recta), es el aumento en la *Tendencia T(t)*, cuando el tiempo se aumenta en 1 trimestre.

Cuando se dice que un camino tiene la pendiente 5%, significa que por cada 100 unidades horizontales asciende 5 unidades, es decir, el cociente de las ordenadas por las abscisas correspondientes es 5/100. Nótese que el valor de la pendiente de una recta no depende de la elección particular de los puntos elegidos. En el modelo lineal del caso que se está estudiando, el coeficiente de la variable independiente es 6,34 por lo cual se puede afirmar:

Si se considera un modelo lineal, la tendencia del monto de las exportaciones trimestrales de la empresa aumenta uniformemente en 6,34 millones de dólares por trimestre.

Nótese que en el modelo lineal este aumento en la Tendencia no depende de los trimestres que se estudien. De la observación de la Tabla 4 surge claramente que la afirmación anterior no es verdadera cuando se considera el modelo exponencial. En este último caso las variaciones en la tendencia, en cada trimestre, dependen del punto considerado, y se pueden calcular encontrando las derivadas de la función en los puntos en cuestión. La pregunta que se formularía el docente, al plantear el estudio de la función exponencial en un curso introductorio de matemática en el cual aún no se ha introducido el concepto de derivada es: ¿Qué se podría decir de la variación de la tendencia en el caso exponencial?

La relación encontrada en (3): "*Si llamamos c al cambio aritmético en x, entonces (b^c-1) es el cambio proporcional en y*", permite calcular cual es la variación proporcional que sufren las exportaciones de la empresa al pasar de un determinado trimestre a otro. Se trata de poner en evidencia que el modelo exponencial es el apropiado para representar fenómenos donde cambios constantes en una variable independiente, ocasionan de manera porcentual estos mismos cambios en la variable dependiente. Es decir, cuando una cantidad crece o decrece proporcionalmente a los cambios en su valor, el modelo exponencial es el apropiado.

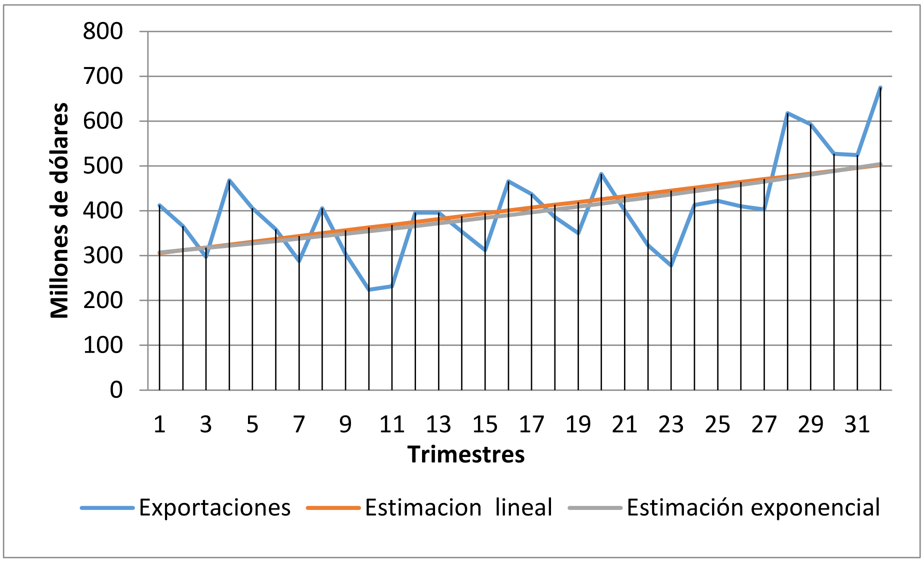
Al hablar de un crecimiento exponencial, también se está diciendo que la variación en una determinada cantidad, de manera porcentual y dentro del contexto, es proporcional a los cambios en los valores de esta misma cantidad. Para el ejemplo presentado, la función general $y = ab^x$ con $a \neq 0$ y $b > 1$ r, presentada al comienzo, se convierte en $y = ne^{mx}$, con lo cual, para este caso la base *b* es el número *e=2.71828*. Con lo cual: $\frac{y_4 - y_3}{y_3} = b^{mc} - 1 = e^{mc} - 1$

En el ejemplo, para el caso del modelo exponencial, donde se encontró: $T(t) = 302{,}173\, e^{0{,}016\, t}$, puede calcularse la variación proporcional en el monto de las exportaciones cuando se considera un trimestre. Ya que *b=e; c=1* y *m=0,016*, entonces:

$$b^{mc} - 1 = e^{m} - 1 = 2{,}718^{0{,}016} - 1 = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$$

Luego es posible afirmar que:

Si se considera un modelo exponencial, la tendencia del monto de las exportaciones de la empresa, expresadas en millones de dólares, aumenta uniformemente en una proporción de 0,02 en cada trimestre. O sea que al pasar de un trimestre a otro, el cambio proporcional en la tendencia es del 2 %.



La Tabla 4 puede ser útil para proponer al alumno la comprobación de las propiedades enunciadas, lo cual puede realizarse mediante cálculos sencillos

t	T	$T(t) = 299{,}3 + 6{,}34\,t$		$T(t) = 302{,}173\ e^{0{,}016\,t}$	D	$(y_{i+1}-y_i)/y_i$
1	412	305,64	6,34	307,04	4,95	0,0161
2	366	311,98	6,34	312	5,03	0,0161
3	297	318,32	6,34	317,03	5,11	0,0161
4	468	324,66	6,34	322,14	5,2	0,0161
5	406	331	6,34	327,34	5,28	0,0161
6	359	337,34	6,34	332,62	5,36	0,0161

Bibliografía

Arellano, M. (2001): "Introducción al Análisis Clásico de Series de Tiempo", Estadística http://www.5campus.com/leccion/seriest

Makridakis, S; Wheelright, S.C.; McGee, V.E. (1983). Forecasting: Methods and Applications. Wiley, New York.

Peña, Daniel. (1989). Estadística, Modelos y Métodos 2. Modelos Lineales y Series Temporales. Alianza Universidad, Madrid.

Russell, R. (2009) Ventanas al Universo. http://www.windows2universe.org/earth/Atmosphere/pressure_vs_altitude.html&lang=sp

Alejandra Cañibano. Agrimensora, por la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) y Magister en Investigación Biológica Aplicada por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Argentina). Docente del Área Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Comparte su trabajo con la enseñanza de la matemática en el nivel medio y adultos de escuelas estatales. Ha escrito diversos trabajos con la finalidad de mostrar las bondades de la matemática aplicada. mac@faa.unicen.edu.ar

Patricia Sastre Vázquez. Agrimensora, por la Universidad Nacional del Sur (Argentina) y Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Área de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Profesora Titular de Análisis II y Matemática, de la Facultad de Agronomía de la Universidad de Morón (Argentina). Es directora del Proyecto: “Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería”. Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA. Ha dictado cursos de posgrado en el país y en el extranjero. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía y la Modelización, en Revistas Nacionales e Internacionales. Es autora de libros y capítulos de libros tanto de investigación como de docencia. Ha integrado tribunales de Tesis Doctorales en España. Formó parte de numerosos comités científicos de Congresos Internacionales. psastre@faa.unicen.edu.ar; pasava2001@yahoo.com.

Rodolfo Eliseo D´Andrea, argentino. Magíster en Educación Matemática y Doctorando por la Universidad Nacional del Comahue. Profesor Adjunto en el Área de Matemática en Pontificia Universidad Católica Argentina (PUCA), Campus Rosario. Integrante de un Proyecto de Investigación sobre Lenguaje Matemático y Procesos de validación en estudiantes de Ingeniería (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Sede Azul). Ha participado, como ponente, en numerosos congresos sobre Educación Matemática.
Email: rodolfoedandrea@yahoo.com.ar