UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 49. Abril 2017
Página 41-60

Problemas de optimización vía álgebra

Gustavo de J. Castañeda R., José Albeiro Sánchez Cano

Fecha de recepción: 2016-02-09
Fecha de aceptación: 2017-02-26

Resumen	Se presenta un método algebraico para la solución de problemas de optimización de funciones reales de una y dos variables reales con una condición o restricción, sin usar para ello la primera y segunda derivada. Dicho método proporcionará una forma sencilla de resolución, el cual podrá ser enseñado en cursos de educación secundaria. **Palabras clave**: Funciones algebraicas, máximos, mínimos. Enseñanza y aprendizaje, Universidad.
Abstract	An algebraic method for solving optimization problems of real functions of one and two real variables with a condition or restriction is presented, without using the first and second derivatives. This method provides a simple way of resolution, which be taught in high school courses. **Keywords**: Algebraic functions, maximum, minimum. Education and learning, University
Resumo	Um método algébrico para resolver problemas de otimização de funções reais de uma e duas variáveis reais com uma condição ou restrição é apresentada, sem usar as primeira e segunda derivadas. Este método fornece uma maneira simples de resolução, que será ministrado em cursos do ensino secundário **Palavras-chave:** funções algébricas ,máximo, mínimo. Ensino e Aprendizagem da Universidade.

1. Introducción

Una de las aplicaciones inmediatas del cálculo es la determinación de los valores extremos de una función. El método que se expondrá a continuación, para resolver problemas de máximos y mínimos no utiliza para nada el cálculo diferencial, solo se requiere un poco de conocimientos en álgebra elemental, en lo que concierne al planteamiento correcto de las ecuaciones así como en la resolución de ecuaciones. El método en sí es muy elemental y por tanto puede ser enseñado en cursos de álgebra impartidos en secundaria, de tal manera que nuestros jóvenes estudiantes resuelvan problemas que se presentan en muchas áreas de la vida diaria a través del álgebra**.**

Este método recoge la idea básica de los multiplicadores de Lagrange. Resolveremos problemas tales como maximizar volúmenes, ganancias y minimizar distancias, tiempos y costos.

Este método funciona en problemas de optimización cuando la función objetivo a maximizar o minimizar y la condición de restricción o ligadura son funciones algebraicas, más queda limitado cuando esas ecuaciones contienen: exponenciales, logarítmicas, trigonométricas o trigonométricas inversas. Pero ocasionalmente trabajaremos algunas de ellas, pues el método lo que hace, es volverla precisamente algebraicas.

En el primer curso de cálculo, se les enseña al estudiante a encontrar la gráfica de una función algebraica mediante el cálculo diferencial, esto es, mediante el criterio de la primera derivada se encuentra los extremos (máximo o mínimo), y con el uso de la segunda derivada, se encuentra los puntos de inflexión, esto es, donde cambia las concavidades. El método MAE, hace lo siguiente: convierte la función algebraica dada en una función polinómica, este método se basa en el siguiente hecho: después de volverla polinómica le exige que esta nueva función tenga dos raíces reales e iguales para así garantizar la existencia de extremo (en el caso de que exista dicho extremo).

Este método se construyó inicialmente para funciones polinómicas, todo este desarrollo se encuentra en (José Albeiro Sánchez C (2012)). Pero se observó que puede ser generalizado a funciones algebraicas (José Albeiro Sánchez C (2013)), incluso para algunas funciones trascendentes que puedan, en algunos casos, ser llevadas a polinómicas.

Los ejemplos siguientes son adecuadamente elaborados, esto es, ejemplos y ejercicios que se presentan en cualquier texto de cálculo diferencial, de forma tal que los sistemas de ecuaciones para la obtención de los extremos resulten relativamente fáciles de resolver, esto es para los polinomios de grado mayor que tres. En general, tales sistemas de ecuaciones resultan imposibles de resolver en forma exacta. Y en tales casos se utiliza un método numérico.

El teorema siguiente será crucial para el desarrollo de toda la obra. Dicho teorema fue construido precisamente para dar soporte al método expuesto (Método Algebraico Elemental (MAE)), está demostrado en (José Albeiro Sánchez C (2012)).

En la sección 3 se darán varios ejemplos tanto en ingeniería como en administración y economía, los cuales aparecen en cualquier texto de cálculo, usando dicho método. El cálculo diferencial es una herramienta valiosa para desarrollar estas ideas, pero el método algebraico elemental propuesto, llega a la misma solución, pero sin utilizar la primera y segunda derivada. El método algebraico resulta ser muy eficiente y fácil de utilizar, de modo que este método pueda ser enseñado en cursos inclusive a nivel de colegio.

En la literatura existen métodos para calcular máximos y mínimos de funciones de una variable real, los cuales se basan en consideraciones geométricas.

Recordemos primero el siguiente teorema que será de gran utilidad (Sánchez C. (2012)).

Teorema. Dada la función polinómica de grado n,

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

si la ecuación polinómica $f(x)-k=0$ tiene una raíz real de multiplicidad algebraica dos en $x=\alpha$, entonces f tiene un extremo relativo en el punto (α,k), esto es, $f(x)-k=0$ puede escribirse en la forma

$$f(x)-k=(x-\alpha)^2 P_{n-2}(x), \qquad P_{n-2}(\alpha)\neq 0 \tag{2}$$

donde $P_{n-2}(x)$ es un polinomio de grado $n-2$ en la variable x .

Demostración.

Supongamos inicialmente que $f(x)-k$, con f dada por (1), tiene una raíz de multiplicidad algebraica dos en $x=\alpha$, esto es

$$f(x)-k=(x-\alpha)^2 P_{n-2}(x), \quad p_{n-2}(\alpha)\neq 0, \quad n>2,$$

Luego derivando a ambos lados de la igualdad, se tiene

$$f'(x)=2(x-\alpha)P_{n-2}(x)+(x-\alpha)^2 P'_{n-2}(x),$$

que al evaluar en $x=\alpha$, obtenemos $f'(\alpha)=0$. Veamos que efectivamente $x=\alpha$ es un extremo.

En efecto, derivando nuevamente, obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2P_{n-2}(x)+2(x-\alpha)P'_{n-2}(x)+2(x-\alpha)P'_{n-2}(x)+(x-\alpha)^2 P''_{n-2}(x)\\ &=(x-\alpha)^2 P''_{n-2}(x)+4(x-\alpha)P'_{n-2}(x)+2P_{n-2}(x)\end{aligned}$$

Al evaluar en $x=\alpha,$, se obtiene

$$f''(\alpha)=2P_{n-2}(\alpha)\neq 0$$

La última condición indica que f efectivamente tiene un extremo en $x=\alpha$.

Observar que si $P_{n-2}(\alpha)>0$, entonces $x=\alpha$ es de mínima, el valor mínimo por tanto, $f(\alpha)=k$ si $P_{n-2}(\alpha)<0$, entonces $x=\alpha$ es de máxima.

Nota 1: Si $P_{n-2}(\alpha)=0$ entonces el punto $(\alpha, f(\alpha))$ es un punto de inflexión.

Nota 2: El método consiste entonces en igualar la función $f(x)$ a un parámetro k, k a encontrar, el cual resultará ser el valor extremo (si existe). A la nueva función polinómica $g(x)=f(x)-k$, se le exige que satisfaga el teorema anterior.

2. Método

Supongamos que queremos maximizar (o minimizar) una función $f(x,y)$ en las variables x e y, sujeto a la condición (o ligadura) $g(x,y)=0$. Si nos acordamos de la interpretación geométrica de los multiplicadores de Lagrange: graficamos en el mismo sistema cartesiano las curvas de nivel de f, esto es, hacemos $f(x,y)=k$, k contante a encontrar, con la ecuación $g(x,y)=0$, luego nos hacemos la pregunta: ¿Para qué valores de k, la curva $f(x,y)=k$ es tangente a la curva $g(x,y)=0$?.(Ver figura 1)

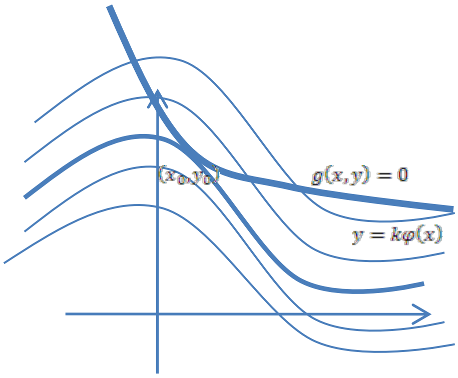


Figura 1

Procedemos como sigue:

La función objetivo (a maximizar o minimizar) $f(x,y)$ es igualada a una constante k, esto es $f(x,y)=k$, despejamos de esta (si se puede), por ejemplo, la variable y, de la cual resulta una función $\varphi(x)$, como sigue:

$$y = k\varphi(x) \tag{3}$$

Ahora, (3) es reemplazada en la condición de restricción (o ligadura) $g(x,y)=0$, esto es

$$g(x, k\varphi(x)) = 0 \tag{4}$$

luego encontramos los ceros de la ecuación (4), imponiendo a k valores para los cuales la ecuación (4), que a la postre se ha convertido ya en una polinómica, tenga raíces reales e iguales, ese valor "forzado" de k, es exactamente el valor máximo o mínimo y ocurre precisamente cuando la curva $y=k\phi(x)$ es tangente a la curva con ecuación $g(x,y)=0$ en el punto de tangencia (x_0, y_0). Es aquí, donde aplicamos el método algebraico elemental expuesto en (Sánchez, 2012_a) y (Sánchez, 2013_b), el cual, usando la notación del teorema:

$$g(x,k\varphi(x)) = P(x,k) = (x-\alpha)^2 P_{n-2}(x;k), \quad P_{n-2}(\alpha;k) \neq 0$$

Donde $P_{n-2}(x;k)$ es un polinomio de grado $n-2$.

En el caso de que $P(x;k)$ sea un polinomio de grado dos, se exige que el discriminante de la ecuación cuadrática resultante sea cero. En general, en el discriminante aparecerá una ecuación en la variable k. Como en principio el discriminante deberá ser mayor o igual a cero, de aquí se desprende el tipo de extremo, esto es, si $k \geq a$ entonces $k = a$ será el valor mínimo y si $k \leq b$ entonces $k = b$ será el valor máximo. Desigualdad estricta no produce valor extremo.

Para los otros casos, esto es, si $P(x;k)$ es un polinomio de grado mayor que dos, se tiene que el valor más grande de k que asuma dentro de un conjunto de valores será el valor máximo y el valor más pequeño de k será el valor mínimo.

Si la función f dada es polinómica, entonces se cumple la nota 1, esto es, (α,k) será un punto de inflexión cuando $P_{n-2}(\alpha;k) = 0$. Pero cuando la función es no polinómica, ya este criterio puede fallar.

3. Aplicación del método

3.1.1. Ejemplo 1

Encuentre los puntos de la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ que estén más cercanos al punto $(2,0)$.

Solución:

Sea (x,y) el punto de la hipérbola donde se tiene la distancia mínima con el punto $(2,0)$. (ver figura 2). Según el problema

$$\begin{cases} \min & d(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ s.a & (x,y) \in H: \quad y^2 - x^2 = 4 \end{cases}$$

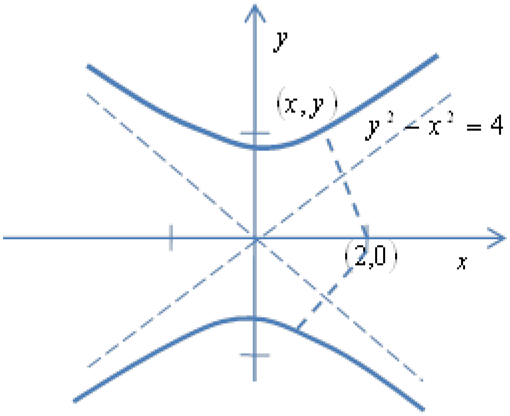


Figura 2

Según el método, hacemos $d(x,y)=k$, esto es, $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=k, k\geq 0.$ Lo cual es equivalente a tener: $(x-2)^2+y^2=k^2$.

Gráficamente lo que queremos es encontrar una circunferencia centrada en $(2,0)$ y radio k (la distancia mínima) que sea tangente en (x,y) a la hipérbola $y^2-x^2=4$. (ver figura 3).

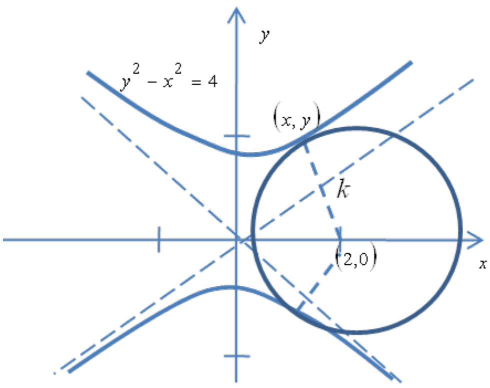


Figura 3

Se tiene el siguiente sistema a resolver:

$$\begin{cases} k^2 = (x-2)^2 + y^2 & (5) \\ y^2 = 4 + x^2 & (6) \end{cases}$$

Reemplazando la ecuación (6) en la (5) se obtiene: $(x-2)^2+4+x^2=k^2$ o bien, resolviendo la cuadrática en la variable x, se tiene, $2x^2-4x+(8-k^2)=0$ cuya solución viene dada por $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8(8-k^2)}}{4}$, ahora como requerimos que las soluciones sean reales e iguales, obligamos entonces a que k cumpla lo siguiente:

$$16-8(8-k^2)\geq 0 \Leftrightarrow k\leq -\sqrt{6} \quad \vee \quad k\geq\sqrt{6}$$

así que la distancia mínima es $k=\sqrt{6}$ (observar el sentido de la desigualdad), y esto ocurre en el punto de abscisa $x=1$ y por (6), la ordenada será entonces $y=\pm\sqrt{5}$, por lo tanto los puntos de la hipérbola $y^2-x^2=4$ más cercanos al punto $(2,0)$ son: $(1,\sqrt{5})$ y $(1,-\sqrt{5})$.

3.1.2. Ejemplo 2

Se va a fabricar una lata para almacenar 1 litro de aceite. Encontrar las dimensiones que minimizarán el costo del material requerido para hacer el envase.

Solución:

Sean x radio de la base y y la altura del cilindro respectivamente. Según el problema:

$$\begin{cases} \min \quad S(x,y)=2\pi x^2+2\pi xy \\ s.a \quad V(x,y)=\pi x^2 y=1000 \ \text{cm}^3 \end{cases}$$

Donde $S(x,y)$ y $V(x,y)$ representan el área superficial y el volumen del cilindro respectivamente.

pongamos $S(x,y)=k$, esto es : $2\pi x^2+2\pi xy=k$, despejando la variable y, tenemos:

$$y=\frac{k-2\pi x^2}{2\pi x}, \qquad x>0$$

ahora nos preguntamos ¿para qué valores de k la gráfica cuya ecuación $y=\dfrac{k-2\pi x^2}{2\pi x}$,

es tangente a la curva $y=\dfrac{1000}{\pi x^2}$? . Nuestra k deberá ser positivo ya que x y y lo son. Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{k-2\pi x^2}{2\pi x} & (7) \\ y=\dfrac{1000}{\pi x^2} & (8) \end{cases}$$

igualando las ecuaciones (7) y (8), obtenemos:

$$\frac{k-2\pi x^2}{2\pi x}=\frac{1000}{\pi x^2} \quad\Leftrightarrow\quad x^3-\frac{k}{2\pi}x+\frac{1000}{\pi}=0$$

Como exigimos que las raíces sean reales e iguales, al menos dos de ellas, podemos escribir

$$x^3-\frac{k}{2\pi}x+\frac{1000}{\pi}=(x-\alpha)^2(x-\beta)=x^3-(\beta+2\alpha)x^2+(2\alpha\beta+\alpha^2)x-\alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema.

$$\beta+2\alpha=0 \tag{9}$$

$$2\alpha\beta+\alpha^2=-\frac{k}{2\pi} \tag{10}$$

$$-\alpha^2\beta=\frac{1000}{\pi} \tag{11}$$

de (9) se tiene

$$\beta=-2\alpha \tag{12}$$

Reemplazando (12) en la ecuación (11) se tiene:

$$\alpha=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \tag{13}$$

Luego por (12) se tiene que

$$\beta=-2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \tag{14}$$

Remplazando las ecuaciones (13) y (14) en la ecuación (10):

$$-4\sqrt[3]{\frac{500^2}{\pi^2}}+\sqrt[3]{\frac{500^2}{\pi^2}}=-\frac{k}{2\pi}$$

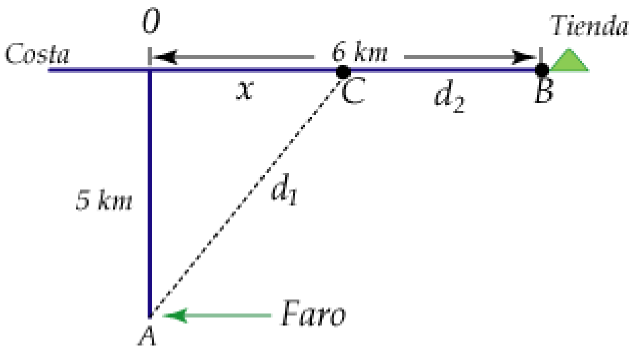
De donde se tiene que el área superficial mínima es $k=300\sqrt[3]{2\pi}\ \text{cm}^2$. Las dimensiones requeridas son: radio del cilindro $x=5\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ y altura del cilindro $y=10\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$.

3.1.3. Ejemplo 3

Un faro se encuentra ubicado en un punto A, situado a 5 Km. del punto más cercano O de una costa recta. En un punto B, también en la costa y a 6 Km. de O, hay una tienda. Si el guarda faros puede remar a $2\ km/h$, y puede caminar a $4\ km/h$, ¿dónde debe desembarcar en la costa, para ir del faro a la tienda en el menor tiempo posible?

Solución:

Se debe minimizar el tiempo de recorrido. Gráficamente la situación es la siguiente:



Sea *C* el punto de la playa en el que desemboca el guarda faros, designemos con x la distancia OC.

d_1 es la distancia en que debe remar desde *A* hasta *C*

d_2 es la distancia en que debe caminar desde *C* hasta *B*

Note, de la gráfica que $d_1 = \sqrt{25 + x^2}$ y $d_2 = 6 - x$.

Además se tiene que la distancia *S* recorrida en un tiempo t es igual a la velocidad por el tiempo: o sea; $s = vt$ de donde $t = \frac{s}{v}$.

La distancia d_1 es recorrida con una velocidad de $2\ km/h$, y la distancia d_2 con una velocidad de $4\ km/h$, por lo que el tiempo total de recorrido será:

$$t = t(x) = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{2} + \frac{6 - x}{4} \tag{15}$$

siendo esta última la función a minimizar.

Luego según el método hacemos $t(x) = k$, esto es: $\frac{\sqrt{25 + x^2}}{2} + \frac{6 - x}{4} = k$. Luego después de algunas simplificaciones, se llega a la ecuación cuadrática

$3x^2 - 4x(2k-3) + \left(100 - 4x(2k-3)^2\right) = 0$, como exigimos que las raíces sean reales e iguales, luego se tiene la solución

$$x = \frac{2}{3}(2k-3) \tag{16}$$

donde k verifica la siguiente ecuación:

$$16(2k-3)^2 - 12\left(100 - 4(2k-3)^2\right) \geq 0 \tag{17}$$

Pero esto último dice que $k \geq \frac{3}{2} + \frac{5}{4}\sqrt{3} \quad \vee \; k \leq \frac{3}{2} - \frac{5}{4}\sqrt{3}$. Esto es, el valor mínimo es $k = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}\sqrt{3}$. Luego el punto donde ocurre el valor mínimo es, reemplazando el valor de k hallado en (16)

$$x = \frac{2}{3}(2k-3) \Rightarrow x = \frac{2}{3}\left(2\left(\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{4}\right) - 3\right) \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Luego por (15) se sigue que el tiempo mínimo será entonces

$$t = t\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{25 + \frac{25}{3}}}{2} + \frac{6 - \frac{5\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}+6}{4} \approx 3.66\, h.$$

Luego, el guarda faros debe desembarcar en un punto C que está a $d_1 = \sqrt{25 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{km.}$ del punto C, para llegar a la tienda en el menor tiempo posible.

3.1.4. Ejemplo 4

La temperatura en un punto (x, y) en una placa de metal está dada por $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Una hormiga, camina sobre la placa, moviéndose sobre un círculo de radio 6 con centro en el origen. ¿Cuáles son la temperatura más alta y la más baja soportada por la hormiga en su recorrido?

Solución.

Se tiene el programa no lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \max/\min & T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 \\ s.a & x^2 + y^2 = 36 \end{array}$$

Hacemos $T(x,y) = k$ y obtenemos:

$$(2x-y)^2 = k \quad \Rightarrow \quad y = 2x \pm \sqrt{k}, \quad k \geq 0 \tag{18}$$

Reemplazando (18) en la condición, tenemos: $x^2 + \left(2x \pm \sqrt{k}\right)^2 = 36$, al simplificar tenemos la ecuación cuadrática: $5x^2 \pm 4\sqrt{k}x + (k-36) = 0$.

Usando la formula cuadrática tenemos:

$$x = \frac{\mp 4\sqrt{k} \pm \sqrt{16k - 20(k-36)}}{10}$$

Por un lado se tiene el x óptimo:

$$x_{OPT} = \mp \frac{2\sqrt{k}}{5} \tag{19}$$

En donde el valor óptimo, $k = 180$ el cual se obtiene haciendo el discriminante igual a cero.

Observar que $k = 180$ es la temperatura máxima ya que

$$16k - 20(k-36) \geq 0; \quad \mathrm{k} \leq 180.$$

Reemplazando en (19) se tiene:

$$x_{OPT} = \mp \frac{2\sqrt{180}}{5} = \mp \frac{12}{\sqrt{5}}$$

Y para obtener el y óptimo, se reemplaza en (18), esto es,

$$y = 2\left(\mp \frac{12}{\sqrt{5}}\right) \pm 6\sqrt{5} \Rightarrow \quad y = \pm \frac{6}{\sqrt{5}}$$

En resumen:

Los puntos donde la temperatura es máxima: T= 180 ocurre en $\left(\mp \frac{12}{\sqrt{5}}, \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$. Esto significa que la máxima temperatura ocurre en la frontera del círculo $x^2 + y^2 = 36$.

Observar que la temperatura mínima $k=0$ se da cuando $y=2x$, esto es, cuando $x^2+(2x)^2=36 \Rightarrow x=\pm\frac{6}{\sqrt{5}}$. Por lo tanto: Los puntos donde la temperatura es mínima: T=0 ocurre en $\left(\pm\frac{6}{\sqrt{5}},\pm\frac{12}{\sqrt{5}}\right)$.

3.2. Ejemplos en Administración y Economía

En los ejemplos siguientes encontraremos que las funciones que aparecen, no necesariamente son algebraicas, pero que pueden ser llevadas a algebraicas mediante el método. También, el método puede aplicarse a problemas de optimización con desigualdades de restricción.

3.1.1. Ejemplo 1

Una empresa produce un artículo cuya función de costo es $C(q)=280q++600$ y la función de demanda es $p=1000-40q$, en donde p es el precio en dólares por unidad cuando se tiene una demanda de q unidades.
Calcular el nivel de producción que maximiza la ganancia del fabricante y determinar la ganancia máxima.

Solución. La ganancia está dada por la diferencia entre el ingreso y el costo, ahora el ingreso es la cantidad por el precio unitario, es decir, $R(q)=p.q=q(1000-40q)$ así, la ganancia es $G(q)=R(q)-C(q)$.

$$G(q)=q(1000-40q)-(280q+600)=700q-40q^2-600$$

Haciendo $G(q)=k$, llegamos a la ecuación cuadrática $40q^2-720q+600+k=0$ cuyas soluciones son: $q=\frac{720\pm\sqrt{720^2-160(600+k)}}{80}$, de donde se sigue que la solución óptima es $q={}^{720}\!/_{80}=9$. Para hallar la ganancia optima, hacemos $720^2-160(600+k)\geq 0$ equivalentemente $k\leq 2640$, esto es k=2640 dólares y se obtiene para un nivel de producción de 9 unidades.

3.1.2. Ejemplo 2

Una compañía planea gastar 10000 dólares en publicidad. Cuesta 3000 dólares un minuto de publicidad en la televisión y 1000 un minuto de publicidad en la radio. Si la empresa compra x minutos de comerciales en la televisión e, y minutos de comerciales en la radio, su ingreso, en miles de dólares, está dado por $f(x,y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$.

¿Cuánto se debe invertir en publicidad en la televisión, cuanto en publicidad en radio con el fin de obtener el máximo ingreso?

Solución.

Se trata de resolver el modelo no lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x,y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y \\ s.a & 3x + y = 10 \end{array}$$

Hacemos $f(x,y) = k$ y obtenemos:

$$-2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y = k \qquad (20)$$

despejamos en la condición o restricción la variable y para obtener:

$$y = 10 - 3x \qquad (21)$$

Reemplazamos (21) en (20) para obtener $14x^2 - 69x + 70 + k = 0$

Usando la formula cuadrática encontramos que $x_{OPT} = {}^{69}\!/_{28} \approx 2.4243$

En (21) se obtiene el y óptimo: $y_{OPT} = {}^{73}\!/_{28} \approx 2.6071$

El valor óptimo (veremos que es un máximo) se obtiene haciendo el discriminante igual a cero.

$$4761 - 3920 - 56k = 0; \quad k = {}^{841}\!/_{56}$$

Ahora k es el valor máximo, ya que el discriminante es mayor o igual a cero si $k \leq \frac{841}{56} \approx 15.0178$ dólares. De esta manera, La empresa deberá comprar $k = \frac{69}{28} \approx 2.4643$ minutos en televisión, y $\frac{73}{28} \approx 2.6071$minutos en la radio con el fin de obtener un ingreso máximo de $k = \frac{841}{56} \approx 15.0178$ miles de dólares.

3.1.3. Ejemplo 3

En un modelo de producción de dos productos, la función de utilidad está dada por $U(x_1, x_2) = \ln\sqrt{x_1.x_2}$ en la producción de estos dos productos se dispone de una cantidad $R \succ 0$ para invertir, dando origen a la siguiente restricción $p_1x_1 + p_2x_2 \leq R$, siendo p_1, p_2 y R constantes positivas. Determinar los niveles de producción para obtener utilidad máxima.

Solución.

La solución al problema consiste en resolver el siguiente modelo matemático,

$$\left.\begin{array}{rl} \max & U(x_1,x_2)=\ln\sqrt{(x_1\cdot x_2)} \\ \text{sujeto a .a} & p_1x_1+p_2x_2\leq R \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

Hacemos $U(x_1,x_2)=k$, donde k es el valor óptimo a determinar.

$$U(x_1,x_2)=\ln\left(\sqrt{x_1\cdot x_2}\right)=k \quad \Rightarrow \left(\sqrt{x_1.x_2}\right)=e^k,$$

De donde obtenemos:

$$x_1x_2=\left(e^k\right)^2=e^{2k} \tag{22}$$

De la condición de restricción despejamos x_1 para tener:

$$x_1=\frac{R-p_2x_2}{p_1} \tag{23}$$

Reemplazando (23) en (22) se tiene

$$\left(\frac{R-p_2x_2}{p_1}\right)x_2=e^{2k}$$

o bien

$$p_2x_2^{\,2}-Rx_2+p_1e^{2k}=0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para x_2:

$$x_2=\frac{R\pm\sqrt{R^2-4p_1p_2e^{2k}}}{2p_2}$$

Se tiene que el valor de x_2 donde se obtiene el valor óptimo es: $x_2=\dfrac{R}{2p_2}$

Y el valor óptimo se encuentra haciendo el discriminante igual a cero (condición para la existencia de óptimo)

$$R^2 - 4p_1p_2e^{2k} = 0$$

$$e^{2k} = \tfrac{R^2}{4p_1p_2}$$

$$2k = \ln(\tfrac{R^2}{4p_1p_2})$$

$$k = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{R^2}{4p_1p_2}).$$

Ahora,

$$x_1 = \frac{R - p_2x_2}{p_1} = \frac{R - p_2\,\tfrac{R}{2p_2}}{p_1} = \tfrac{R}{2P_1}$$

En resumen:

Los nivel de producción son $x_1 = \dfrac{R}{2p_1}$, $x_2 = \tfrac{R}{2P_2}$ y la máxima utilidad es

$k = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{R^2}{4p_1p_2}).$

3.1.4. Ejemplo 4

Calcular la función de demanda de un consumidor cuya riqueza es $R \geq 0$, para el caso en que sus preferencias sean representables mediante la siguiente función de utilidad $U(x_1, x_2) = \sqrt{\ln(x_1) + \ln(x_2)}$.

Solución.

Aplicando propiedades de los logaritmos, luego el problema al que se enfrenta el consumidor es:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & U(x_1, x_2) = \sqrt{\ln(x_1)(x_2)} \\ \text{s.a} & p_1x_1 + p_2x_2 = R \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

Hacemos $U(x_1, x_2) = k$, donde k es tomado como el valor óptimo, obteniendo

$$x_1x_2 = e^{k^2} \qquad (24)$$

De la condición de restricción despejamos x_1 para tener:

$$x_1 = \frac{R - p_2x_2}{p_1} \qquad (25)$$

Reemplazando (25) en (24) se tiene:

$$\left(\frac{R - p_2 x_2}{p_1}\right) x_2 = e^{k^2} \quad \Leftrightarrow \quad p_2 x_2{}^2 - R x_2 + p_1 e^{k^2} = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para x_2:

$$x_2 = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4 p_1 p_2 e^{k^2}}}{2 p_2}$$

Se tiene que el valor de x_2 donde se obtiene el valor óptimo es: $x_2 = \dfrac{R}{2 p_2}$

Y el valor óptimo se encuentra haciendo el discriminante igual a cero (condición para la existencia de óptimo)

$$R^2 - 4 p_1 p_2 e^{k^2} = 0$$

O bien, despejando k:

$$k = \sqrt{\ln\left(\frac{R^2}{4 p_1 p_2}\right)}$$

Multiplicidad algebraica dos) luego el valor de $x_1 = \dfrac{R - p_2 x_2}{p_1}$, esto es,

$$x_1 = \frac{R - p_2\left(\dfrac{R}{2 p_2}\right)}{p_1} = \frac{R}{2 p_1}$$

En resumen:

El punto donde se obtiene el óptimo es. $\left(\dfrac{R}{2 p_1}, \dfrac{R}{2 p_2}\right)$ y el valor óptimo es

$$k = \frac{2R}{3\sqrt[3]{2 p_2{}^2 p_1}}$$

Exactamente el mismo resultado.

3.1.5. Ejemplo 5

Suponga que un consumidor desea maximizar la utilidad $U(x, y) = \sqrt{x} + y$ sujeto a la condición presupuestal $px + y \leq M$ y $x \geq 0,\ y \geq 0.$ Es dado que $p > 0,\ M > 0.$

Solución.

Según el método, hacemos $U(x, y) = k$, esto es, $\sqrt{x} + y = k$, o bien, $y = M - px$, el cual resulta de despejar y de la condición.

Así que la ecuación a resolver es: $\sqrt{x} + M - px = k \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = (k - M) + px$

Elevando al cuadrado a ambos miembros de la última ecuación

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = [(k - M) + px]^2 \Leftrightarrow x = (k - M)^2 + 2px(k - M) + p^2x^2$$

Reescribiendo la última ecuación:

$$p^2x^2 + [2p(k - M) - 1]x + (k - M)^2 = 0$$

Resolviendo para x,

$$x = \frac{1 - 2p(k - M) \pm \sqrt{[2p(k - M) - 1]^2 - 4p^2(k - M)^2}}{2p^2}$$

Haciendo el discriminante igual a cero, se tiene

$$\begin{aligned}
&[2p(k - M) - 1]^2 - 4p^2(k - M)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4p^2(k - M)^2 - 4p(k - M) + 1 - 4p^2(k - M)^2 = 0 \\
&\Rightarrow k = M + \frac{1}{4p}
\end{aligned}$$

El cual se logra en

$$x = \frac{1 - 2p(k - M)}{2p^2} = \frac{1 - 2p\left(M + \frac{1}{4p} - M\right)}{2p^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2p^2} = \frac{1}{4p^2}\,.$$

Luego el valor de la variable y es

$$y = M - px = M - p\left(\frac{1}{4p^2}\right) = M - \frac{1}{4p}\,.$$

Observar que $k \leq M + \frac{1}{4p}$, de aquí que el valor de k es precisamente un valor máximo.

3.1.6. Ejemplo 6

Calcular la función de demanda de un consumidor cuya riqueza es $R \geq 0$, para el caso en que sus preferencias sean representables mediante la siguiente función de utilidad $U(x_1, x_2) = (x_1)^{1/3}(x_2)^{2/3}$.

Solución.

El problema al que se enfrenta el consumidor es:

$$\left.\begin{array}{rl} \max & U(x_1,x_2)=(x_1)^{1/3}(x_2)^{2/3} \\ \text{s.a} & p_1x_1+p_2x_2\le R \\ & x_1\ge 0 \\ & x_2\ge 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

Hacemos $U(x_1,x_2)=k$, donde k es tomado como el valor óptimo. Tenemos

$$x_1x_2^{\ 2}=k^3 \tag{26}$$

De la condición de restricción despejamos x_1 para tener:

$$x_1=\frac{R-p_2x_2}{p_1} \tag{27}$$

Reemplazando (27) en (26) en la condición de restricción, se tiene:

$$\left(\frac{R-p_2x_2}{p_1}\right)x_2^{\ 2}=k^3$$

o bien

$$x_2^{\ 3}-\frac{R}{p_2}x_2^{\ 2}+\frac{p_1}{p_2}k^3=0$$

Como exigimos que las raíces sean reales e iguales, al menos dos de ellas, podemos escribir

$$x_2^{\ 3}-\frac{R}{p_2}x_2^{\ 2}+\frac{p_1}{p_2}k^3=x^3-(\beta+2\alpha)x^2+(2\alpha\beta+\alpha^2)x-\alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema.

$$\beta+2\alpha=\frac{R}{p_2} \tag{28}$$

$$2\alpha\beta+\alpha^2=0 \tag{29}$$

$$-\alpha^2\beta=\frac{p_1}{p_2}k^3 \tag{30}$$

de (29) se tiene dos posibilidades:

$$\alpha=0,\quad ó \quad \alpha=-2\beta$$

Caso $\alpha=0$:

En (28) se obtiene $\beta=\dfrac{R}{p_2}$, y en (30) da el valor óptimo $k=0$ .esto indica que el extremo es el punto en el cual $x_2=\alpha=0$ y por tanto $\left(\dfrac{R}{p_1},0\right)$.

Caso $\alpha=-2\beta$:

En (28) se obtiene $\beta=-\dfrac{R}{3p_2}$, este valor en (30) produce

$$-\alpha^2\beta = \frac{p_1}{p_2}k^3 \quad \Rightarrow \quad -(-2\beta)^2\beta = \frac{p_1}{p_2}k^3 \quad \Rightarrow \quad k = -\sqrt[3]{\frac{4\beta^3 p_2}{p_1}}$$

Remplazando $\beta = -\frac{R}{3p_2}$ en la última ecuación obtenemos el valor óptimo:

$$k = -\sqrt[3]{\frac{4\beta^3 p_2}{p_1}} = -\sqrt[3]{\frac{4\left(-\frac{R}{3p_2}\right)^3 p_2}{p_1}} = \frac{2R}{3\sqrt[3]{2p_2{}^2 p_1}}$$

el cual ocurre en $x_2 = \alpha = -2\beta = \frac{2R}{3p_2}$, (ésta es la raíz escogida pues es de multiplicidad algebraica dos) luego el valor de $x_1 = \frac{R - p_2 x_2}{p_1}$, esto es,

$$x_1 = \frac{R - p_2\left(\frac{2R}{3p_2}\right)}{p_1} = \frac{R}{3p_1}$$

En resumen:

El punto donde se obtiene el óptimo es. $\left(\frac{R}{3p_1}, \frac{2R}{3p_2}\right)$ y el valor óptimo es

$$k = \frac{2R}{3\sqrt[3]{2p_2{}^2 p_1}}$$

Exactamente el mismo resultado que en cálculo.

Conclusiones

Se ha presentado un método novedoso para resolver problemas de optimización, los cuales aparecen en Ingeniería y Economía, sin el uso del cálculo diferencial, esto es, no es necesario usar la derivada para encontrar los puntos críticos. El método se puede aplicar a cualquier problema de optimización que usualmente aparecen en los textos de cálculo diferencial en una variable real.

El método puede ser enseñado tanto a nivel de colegio como primer semestre de universidad, dicho método requiere solo el conocimiento de álgebra elemental.

Bibliografía

Larson, Hostetler, Edwards (2008). Cálculo I. Octava edición. Mc Graw Hill.

Leithold, L. (1987). El Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Harla. 5 Ed.

Sánchez-Cano, José A. (2012). Método alterno para la gráfica de funciones algebraicas. Revista UNION, 30, 41-59.
Sánchez-Cano, José A. (2013). Método alternativo para la gráfica de funciones algebraicas. Revista SUMA, 73,25-38.

Gustavo de J. Castañeda R.: **Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Politécnica de Valencia (España), Profesor del Departamento de Ciencias Matemáticas de la Universidad EAFIT, en Medellín (Colombia). e-mail: gcasta@eafit.edu.co.**

Sánchez Cano, José Albeiro**: Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Politécnica de Valencia (España), Profesor Investigador del Departamento de Ciencias Matemáticas de la Universidad EAFIT, en Medellín (Colombia). e-mail: josanche@eafit.edu.co**