UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 68. AGOSTO 2023
Páginas 1-20

Representaciones socialmente construidas en la transición de la aritmética al álgebra usando una metodología activa y números poligonales

Representações socialmente construídas na transição da aritmética para a álgebra usando uma metodologia ativa e números poligonais

Ulises Said Landín Juárez, José Carlos Cortés Zavala

Fecha de recepción:23/02/2022
Fecha de aceptación: 07/06/2022

Resumen

En este documento nos interesa abordar la transición de la aritmética al álgebra desde la teoría de los Espacios de Trabajo Matemáticos, así como la evolución de las representaciones que surgen en ambientes de aprendizaje colaborativo. La investigación se desarrolla en el marco de un proyecto entre México y Quebec sobre el reconocimiento de patrones con números poligonales utilizando lápiz, papel y tecnología, en el que se propone la existencia de un pensamiento intermedio, denominado aritmético-algebraico. En este estudio, se presentan los resultados de una nueva experimentación realizada en México con estudiantes de telesecundaria (12-14 años), enfocada en el trabajo con números triangulares y pentagonales, a través de una metodología que activa los componentes de los Espacios de Trabajo Matemáticos.
Palabras clave: Representaciones socialmente construidas, Pensamiento aritmético-algebraico, Espacios de Trabajo Matemáticos.

Abstract

In this document we are interested in addressing the transition from arithmetic to algebra from the Mathematical Working Spaces theory, as well as the evolution of the representations that arise in collaborative learning environments. The research is carried out within the framework of a project between Mexico and Quebec on the recognition of patterns with polygonal numbers using pencil, paper and technology, in which it proposes the existence of an intermediate thought, called arithmetic-algebraic. In this study, the results of a new experimentation carried out in Mexico with telesecundaria students (12-14 years old) are presented, focused on working with triangular and pentagonal numbers, through a methodology that activates the components of the Mathematical Working Spaces.
Keywords: Socially constructed representations, arithmetic-algebraic thinking, mathematical working spaces.

Resumo

Neste documento estamos interessados em abordar a transição da aritmética para a álgebra a partir da teoria dos Espaços de Trabalho Matemáticos, bem como a evolução das representações que surgem em ambientes de aprendizagem colaborativa. A pesquisa é realizada no âmbito de um projeto entre México e Quebec sobre o reconhecimento de padrões com números poligonais usando lápis, papel e tecnologia, no

qual propõe a existência de um pensamento intermediário, chamado aritmético-algébrico. Neste estudo, são apresentados os resultados de uma nova experimentação realizada no México com alunos de telesecundária (12-14 anos), focada no trabalho com números triangulares e pentagonais, através de uma metodologia que ativa os componentes dos Espaços de Trabalho Matemáticos.
Palavras-chave: Representações socialmente construídas, pensamento aritmético-algébrico, espaços de trabalho matemáticos.

1. Introducción

En este documento se presentan los resultados de una investigación sobre la transición de la aritmética al álgebra, en la que se propone un tránsito natural entre estos dominios matemáticos por medio del uso de patrones, la visualización matemática (Zimmermann & Cunningham, 1991) y las estructuras de control (Hitt & Saboya, 2013). Además del trabajo con números triangulares (Cortés et al., 2016; Hitt et al., 2015), nos interesa la construcción de expresiones generales en la serie geométrica de números pentagonales, a través de una metodología activa basada en el aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión (ACODESA) (Hitt, 2013), integrando el uso de lápiz, papel y tecnología (Excel y applet Poly).

Se utiliza un marco teórico basado en los Espacios de Trabajo Matemáticos (ETM) propuesto por Kuzniak (2019), considerando la evolución de las representaciones funcionales espontáneas (RFE) y las representaciones socialmente construidas (RSC) propuestas por Hitt & Quiroz (2019), así como la existencia de una estructura cognitiva intermedia, denominada pensamiento aritmético-algebraico (Cortés et al., 2014). Posteriormente se integra en el apartado metodológico los ETM y las etapas de ACODESA. Finalmente se presentan los resultados de la investigación.

2. El pensamiento aritmético-algebraico

El álgebra es uno de los dominios matemáticos que presenta más dificultad en su aprendizaje, se ha convertido en un problema para la mayoría de estudiantes no solo a nivel básico sino en instancias superiores. La solución a la pregunta ¿qué es lo que impide el desarrollo de una estructura cognitiva algebraica? Podría estar ligada al nivel de abstracción necesario para comprender los contenidos a manera de obstáculo epistemológico (Brousseau, 2002), problemas didácticos, o a la introducción del simbolismo algebraico y todo el repertorio de reglas que parecen distanciarse de lo realizado en la aritmética.

Y es que el aprendizaje del álgebra implica trabajar con un nuevo registro semiótico en el sentido de Duval (1993), el lenguaje algebraico, que requiere una formación del registro (sus reglas y características), un dominio de tratamientos (transformaciones en el mismo registro) y conversiones (transformaciones a otro registro semiótico) del objeto matemático, lo que implica una actividad que no es natural para el ser humano. Además, si se consideran los diferentes acercamientos al álgebra que se presentan en el mundo: simbólico (Francia), reconocimiento de patrones en secuencias de números o figuras (países anglosajones), o el acercamiento por medio de modelación de situaciones extra-matemáticas (Artigue, 2012), resulta ser un problema complejo de solucionar.

Para comprender la transición de la aritmética al álgebra, primero se debe explicar qué entendemos por pensamiento aritmético y por pensamiento algebraico. El pensamiento aritmético es una estructura cognitiva ligada a los conceptos numéricos y su sentido, al significado de las operaciones y control de hechos básicos, así como el cálculo mental, la lectura y escritura (Verschaffel & De Corte, 1996). Por su parte, Kaput (2008) describe dos características principales para el pensamiento algebraico: realizar y expresar la generalización de los sistemas simbólicos de manera formal y convencional, así como razonar y manipular sintácticamente las formas simbólicas.

Para Kaput, la generalización y el trabajo simbólico, son el umbral del pensamiento algebraico. Kieran (2007) por su parte, caracteriza los elementos necesarios para desarrollar pensamiento algebraico en los estudiantes con su modelo GTG:

G) La actividad generacional (por ejemplo, los patrones);

T) La actividad de transformaciones (factorización, expansión, ecuaciones equivalentes, etc.);

Gm) La actividad global / meta (resolución de problemas, modelado, justificación, reconocimiento de patrones, etc.).

En función de las ideas de Kaput (2008), el modelo GTG de Kieran (2007), y las diferentes entradas que se tiene del álgebra en diferentes lugares del mundo, se plantea un acceso natural al pensamiento algebraico a través de la generalización, por medio del reconocimiento de patrones en series geométricas de números poligonales (Figura 1).

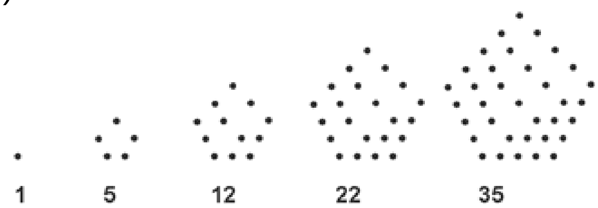


Figura 1. Serie geométrica de números pentagonales.

Se busca, a través de la generalización, la construcción de expresiones algebraicas para calcular cualquier número de la serie, a partir de procesos de visualización y la creación de representaciones funcionales, en donde exista un control de la actividad desde una perspectiva aritmética, que pueda favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico.

Nos interesa un proceso de visualización que tome en cuenta, tanto las representaciones mentales, como las representaciones semióticas que crea y a las que tiene acceso el estudiante, que ayude a resolver problemas a través de RFE que puedan generarse a través de la misma visualización. Por lo tanto, coincidimos con la definición que utiliza Zimmerman y Cunningham:

> Desde la perspectiva de la visualización matemática, la restricción de que las imágenes deben ser manipuladas mentalmente, sin la ayuda de un lápiz y papel, parece artificial. De hecho, en la visualización matemática lo que nos interesa es precisamente la capacidad del estudiante para dibujar un gráfico apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con un ordenador) para representar un concepto matemático o problema y utilizar el diagrama para lograr un entendimiento, y como una ayuda en la resolución de problemas. En

> matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para un fin, que es la comprensión. (Zimmerman & Cunniingahm,1991, p. 3)

Se ha observado que los alumnos desarrollan representaciones espontáneas que no son parecidas a las representaciones institucionales (RI) (aquellas que aparecen en los libros, internet, manuales, etc.) de las que hablaba Duval (1993), pero que aun así funcionan. Este tipo de representaciones son el resultado de una visualización matemática y una estructura de control (Hitt & Saboya, 2013) que, en nuestro caso, representa una base aritmética, a través de la cual, es posible acceder de manera natural al pensamiento algebraico.

Esta evolución de las representaciones cobra relevancia en esta investigación, porque el trabajo con números poligonales se considera desde un enfoque sociocultural, donde se reconoce la construcción del conocimiento en ambientes colaborativos, a partir de la interacción, la comunicación y procesos de validación compartidos por los estudiantes. En ese sentido, la metodología ACODESA (que será abordada posteriormente) aprovecha, por medio de sus etapas, tanto la puesta en acción del conocimiento en el trabajo individual, como la acción colaborativa y sus validaciones en la construcción de nuevos artefactos matemáticos (fórmulas, modelos etc.). A partir de trabajo a lápiz y papel y la tecnología, se generan RFE, que evolucionan a RSC, y culminan en RI. La noción de RSC es presentada por Hitt y Quiroz. Con esta nueva conceptualización se:

> Pretende centrar la atención a la evolución de una representación funcional espontánea cuando ésta se somete a un proceso de discusión, comunicación, argumentación, comparación y validación frente a una tarea que demanda un trabajo en equipo en el aula de matemáticas. (Hitt y Quiroz, 2019, p.16)

Las RFE y RSC, promueven la comprensión del acceso natural al álgebra vía el reconocimiento de patrones y la generalización. Al prestar atención a los procesos que realizan los sujetos, se observa que las RI, que aparecen comúnmente en los textos escolares, no son tan fácilmente deducidas por los estudiantes.

Por tal razón, en esta experimentación se pretende desarrollar en los alumnos un pensamiento aritmético-algebraico que se caracteriza por:

> a) Generalizar patrones (no necesariamente con representaciones institucionales, podrían ser representaciones producto de representaciones funcionales), procesos que descansarían en la visualización matemática y cálculo aritmético.
>
> b) Generar expresiones algebraicas (representaciones institucionales) cuya validación primera estaría ligada a la visualización y al cálculo aritmético.
>
> c) Formar una estructura cognitiva de control, que integre de manera coherente estos procesos de validación surgidos en las discusiones de grupo, contando con una estructura que permita percatarse de una contradicción en caso de encontrarse en una situación contradictoria.
>
> d) Integrar el conocimiento algebraico a un proceso reversible, de manera que se permitiera la posibilidad de realizar procesos metacognitivos de reconstrucción, promoviendo la articulación entre la aritmética y el álgebra. (Cortés et al., 2014, p. 223-224)

A través de este pensamiento, con ayuda de la metodología ACODESA y la tecnología, se pretende construir un espacio de trabajo matemático que favorezca la construcción conceptual de los estudiantes, en una reflexión individual y un ambiente colaborativo que propicien esa entrada natural al álgebra.

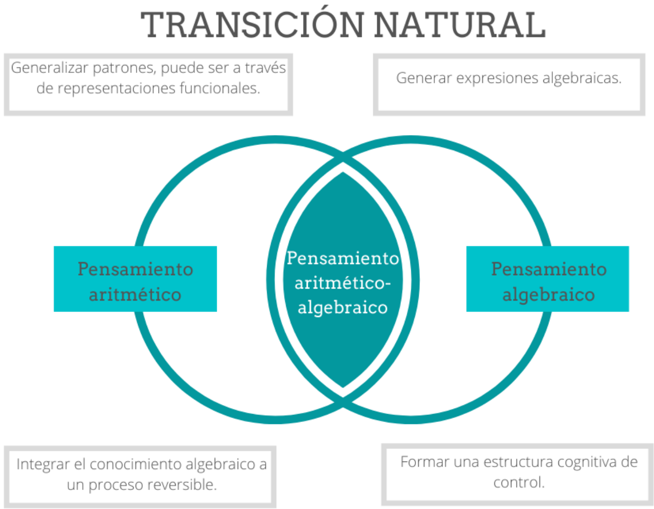


Figura 2. Pensamiento aritmético-algebraico.

3. El espacio de trabajo matemático aritmético-algebraico

Los primeros referentes de los ETM se remontan a estudios sobre el trabajo geométrico (Kuzniak & Richard, 2014). Desde entonces, la evolución de elementos y nociones de este modelo se ha extendido a diferentes dominios y subdominios, estableciendo las bases para la consolidación de una nueva teoría con enfoques locales y globales en la matemática educativa (Kuzniak, 2019).

La construcción de espacios de trabajo matemático radica en establecer una relación entre un plano epistemológico y un plano cognitivo que, de manera conjunta, propicien los elementos necesarios para facilitar el aprendizaje y la resolución de problemas de los estudiantes. El plano epistemológico se vincula al contenido matemático del dominio estudiado, mientras que el cognitivo se relaciona a los procesos y formas de hacer que utilizan los individuos para resolver tareas, especificando que éstas no forman parte de un ETM, más bien son el soporte de su activación (Kuzniak, 2019). A su vez, las génesis semiótica, instrumental y discursiva articulan los componentes de los planos horizontales (Figura 3) y configuran nuevos planos verticales (Figura 5): semiótico-instrumental (sem-ins), instrumental-discursivo (ins-dis) y semiótico-discursivo (sem-dis), que hacen visibles ciertos estados del trabajo matemático.

Las fibraciones son las que dan sentido a la construcción conceptual a través de articulaciones e interacciones intra y extra matemáticas. Las fibraciones internas se entienden como el cambio de activación de las génesis y los planos dentro del mismo ETM, y las fibraciones externas como la vinculación entre ETM de diferentes dominios y subdominios matemáticos, que surgen o son planteados dentro de la actividad (Tanguay et al., 2019).

Existen diferentes ETM, que van de lo general a lo particular. El ETM de referencia, es establecido por paradigmas que "se instituyen cuando una comunidad de individuos acuerda organizar problemas, organizar soluciones y el privilegiar ciertas herramientas y formas de pensamiento" (Kuzniak & Richard, 2014, p. 9). Los ETM idóneos, se encuentran dentro de la institución educativa, donde el profesor desempeña un papel de arquitecto, que diseña un espacio de trabajo para usuarios potenciales, que permita el establecimiento efectivo en clase. A partir de esto, cada uno de los estudiantes crearía su propio ETM personal para el trabajo matemático.

En este estudio, se reconoce la existencia de un $\mathrm{ETM}_{\text{aritmético}}$ y un $\mathrm{ETM}_{\text{algebraico}}$, que en el desarrollo de la tarea con números poligonales son articulados por medio de fibraciones, posibilitando la construcción de un espacio de trabajo intermedio, el $\mathrm{ETM}_{\text{aritmético-algebraico}}$ ($\mathrm{ETM}_{\text{A-A}}$). La representación del $\mathrm{ETM}_{\text{A-A}}$ (Figura 3), hace visible la articulación que puede encontrarse entre los espacios de trabajo matemático de distintos dominios, en este caso el álgebra y la aritmética. Esta estructuración es fundamental para comprender que la vinculación de distintos ETM podría formar una red bien elaborada desde donde se explique la actividad y el trabajo matemático como un todo en la construcción conceptual de la matemática.

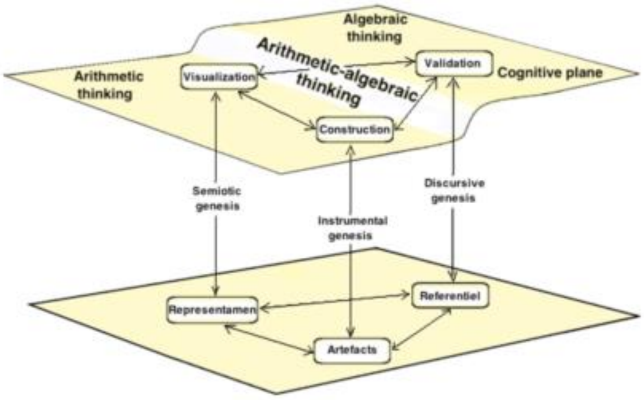


Figura 3. Modificación del espacio de trabajo de Kuzniak realizada por Hitt et al. (2015).

En la teoría de los ETM la acción es privilegiada, se entiende como una manifestación visible del trabajo del sujeto (Kuzniak, 2019), por lo tanto, esta perspectiva centra la atención sobre el individuo más que en el grupo. Leontiev (1978) en su teoría de la actividad, piensa en la acción como una relación dialéctica entre el sujeto y el objeto, considerando la intención y el proceso operacional. Desde un enfoque sociocultural, la interacción es mediada por la actividad práctica social (herramientas y signos), es decir, la práctica y la comunicación son inseparables, “la realidad del signo está enteramente determinada por la comunicación: después de todo, la existencia del signo no es nada sino la materialización de esta comunicación” (Voloshinov citado en Hitt y Quiroz, 2019, p. 15) sobre el grupo. Este distanciamiento de enfoques, da origen a una pregunta crucial: ¿cómo estudiar el trabajo colaborativo en el modelo ETM?, planteamiento que se intenta resolver en esta investigación.

4. Metodología

La metodología ACODESA es una propuesta de trabajo que incluye la reflexión individual y grupal, permitiendo contradicciones y validaciones en la construcción de expresiones generales para calcular los números triangulares y pentagonales.

Esta metodología consta de cinco pasos (Cortés et al., 2016; Hitt & Quiroz, 2019):

- Trabajo individual: en esta etapa el trabajo de cada uno de los alumnos demuestra de qué manera entiende el problema presentado. Aquí se producen representaciones funcionales y producciones semióticas asociadas para comprender la situación problema.
- Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación por parte de los estudiantes. Conjeturas individuales son

confrontadas en un ambiente colaborativo (refinamiento de las representaciones funcionales y producciones asociadas).

- Discusión en gran grupo (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación. Parte fundamental en donde, de manera grupal se confrontan ideas y se logra avanzar en la conceptualización de objetos matemáticos (refinamiento de representaciones funcionales y producción de representaciones socialmente construidas).
- Auto-reflexión. Regreso sobre la situación (trabajo individual de reconstrucción de lo realizado en clase).
- Institucionalización. Utilización de representaciones institucionales por parte del profesor dentro del proceso de institucionalización de saberes.

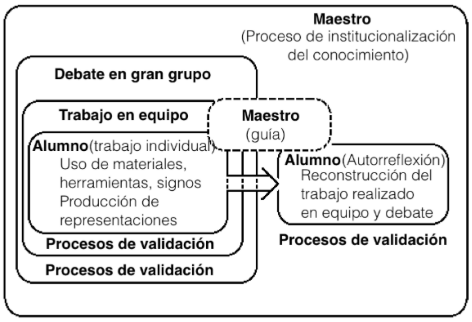


Figura 4. ACODESA Hitt & Quiroz (2019).

En el sexto simposio sobre el trabajo matemático, Kuzniak (2019) plantea la necesidad de una metodología para realizar estudios en el marco de los ETM. Proponemos ACODESA como medio para organizar los procesos y resultados del trabajo matemático en ambientes colaborativos, que haga evidentes las fibraciones internas dentro de ETM específicos y externas en su interacción con ETM de otros dominios.

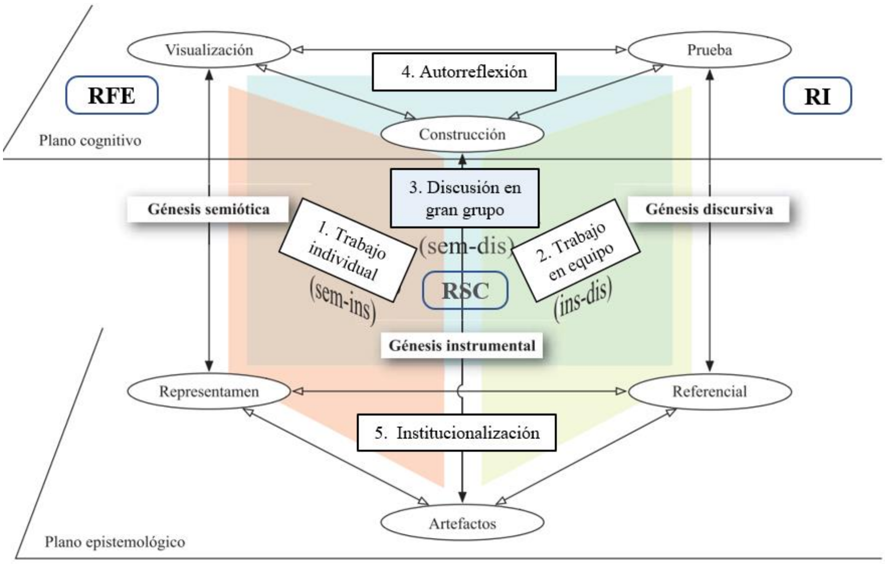


Figura 5. Integración ACODESA Hitt & Quiroz (2019) **y ETM Kuzniak** (2019).

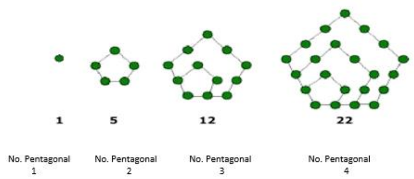
Las etapas de ACODESA se integran a los planos de los ETM. Las primeras fases se vincularon a los planos verticales: el trabajo individual → sem-ins, trabajo en equipo → ins-dis y la discusión en gran grupo → sem-dis. La organización de los momentos de ACODESA sigue la lógica de los ETM, primeramente, la visualización (representación metal y semiótica) permite la interacción del sujeto con la situación problema, construyendo así las primeras RFE, que varían de acuerdo al conocimiento del individuo sobre el dominio (o dominios) matemático, es una etapa basada en el descubrimiento. Posteriormente, en el trabajo en equipo se buscan procesos de razonamiento matemático, con ayuda de herramientas, que permitan la validación, refinamiento y evolución de las RFE en RSC dentro de un contexto colaborativo. La discusión en gran grupo, continúa con procesos de validación iniciados en la etapa anterior, promoviendo la comunicación del razonamiento matemático a través de los resultados a los que llegó cada equipo, articulando la génesis discursiva y semiótica, permitiendo la consolidación de RSC o incluso RI. Para finalizar, las etapas de autorreflexión e institucionalización se ubican en los planos cognitivo y epistemológico respectivamente, pensando en la primera como una actividad metacognitiva del sujeto y la segunda como el referencial semiótico, tecnológico y teórico que provee el maestro de matemáticas.

4.1. Muestra

La investigación se llevó a cabo en la Telesecundaria de Apúndaro, Municipio de Tancítaro, Michoacán, México, con 14 alumnos que cursan el primer año. Sus edades oscilan entre los 12 y 14 años. En la intervención solo estuvo presente un investigador. Se utilizaron dos cámaras, una móvil y una fija, también se utilizaron diferentes colores de tinta para reconocer en las hojas de trabajo cada una de las etapas: azul para el trabajo individual, rojo para el trabajo en equipo y verde para el debate en gran grupo.

4.2. Resumen de la actividad

La experimentación se realizó en dos momentos, el primero enfocado a los números triangulares y el segundo destinado a los números pentagonales. El resumen de la actividad se hizo de manera conjunta ya que los dos instrumentos varían poco, por lo cual utilizaremos la denominación de números poligonales para aludir a estas dos series geométricas.



1) Observa bien estos números, ¿cuál es el quinto número pentagonal? Represéntalo y explica ¿cómo le hiciste?

2) ¿En tú opinión, ¿cómo se construyen estos números pentagonales? ¿Qué observas?

3) ¿Cuál es el 10^{avo} número pentagonal? Explica ¿cómo le hiciste?

Figura 6. Primeras representaciones.

Primeramente, se explica qué son los números poligonales y se ubican en un contexto histórico. Posteriormente, se solicita calcular algunos números poligonales a lápiz y papel (primero de manera individual y posteriormente en equipo). Se busca encontrar representaciones funcionales y representaciones espontáneas de los alumnos que los ayuden a resolver la problemática planteada. Ya en el trabajo en equipo, las contradicciones encontradas por los estudiantes en los procedimientos de resolución, tendrán que ser validadas por los integrantes del equipo, promoviendo procesos de refinamiento, que conduzcan a la aparición de representaciones socialmente construidas.

En las primeras preguntas se pretende encontrar diferentes tipos de representaciones (icónicas, iterativas, etc.) para calcular los primeros números poligonales. Posteriormente, se solicita explicar el proceso de construcción de la serie geométrica, promoviendo en el alumno la conversión de sus estrategias a lenguaje natural, buscando una construcción conceptual más elaborada a través de la interacción de más representaciones. En la última interrogante se promueve la búsqueda de nuevas estrategias por la gran cantidad de puntos que se utilizarán para representar icónicamente el pentagonal 10. Se pretende que a través de la visualización matemática encuentren las reglas y relaciones que permitan descubrir el patrón de crecimiento.

El uso de la tecnología para procedimientos de comprobación y razonamiento es importante durante el trabajo en equipo. Por medio de dichas herramientas se prevé la promoción de conjeturas y pruebas en el sentido de Balacheff (1987). Con Excel se busca la construcción de algoritmos iterativos como los encontrados por Healy y Sutherland (1990). Con Poly creado por Cortés y Hitt (2012), se pretende, a través de la visualización matemática y la función de descomposición triangulares, se produzcan representaciones semióticas, RSC, producto de las RFE, que sean la base de una expresión general.

Es posible calcular:

a) el número pentagonal 15: ______________________

b) el número pentagonal 22: ______________________

c) el número pentagonal 33: ______________________

d) ¿Cómo le hiciste?

Figura 7. En busca de una expresión general.

Se solicita el cálculo de números poligonales cada vez más grandes, que hagan necesario el cambio de razonamiento geométrico-aritmético. Finalmente, se pide encontrar una expresión algebraica para calcular cualquier número triangular o pentagonal. Se pretende que a través de las conjeturas y contradicciones surgidas dentro del debate se encuentren expresiones generales como n(3n-1)/2 (para los números pentagonales) y n(n+1)/2 (para los números triangulares).

Poly es un applet que puede representar cualquier número poligonal. Al introducir la posición muestra el resultado numérico y una representación icónica del número poligonal seleccionado. Pero esta aplicación tiene una función más interesante: a partir de los números cuadrangulares, hay una opción llamada descomposición triangular que tiene como resultado lo observado en la Figura 8.

Figura 8. Números triangulares en Poly y descomposición triangular del pentagonal 7.

Descompone la representación icónica en tres triángulos más la base. El razonamiento generado a partir de la visualización matemática sobre este tipo de representaciones juega un papel importante en nuestra investigación.

5. Resultados: números triangulares

Aunque se trabajó con la misma metodología, los resultados de la experimentación con números poligonales se presentan de distinta manera. En el caso de los números triangulares, se muestra el proceso que desarrollaron los estudiantes en la construcción de la expresión general para calcularlos. En cambio, con los números pentagonales se realiza un análisis por etapas de ACODESA.

En la experimentación con números triangulares se presentaron estrategias muy diversas para intentar reconocer el patrón de crecimiento de la serie. En el trabajo individual se observó: centración en un valor absoluto, donde utilizaban una constante que sirviera de diferencia universal entre todos los elementos de la serie; representaciones icónicas en las cuales se agregaban puntos a la figura anterior; la suma de posiciones hasta el triangular buscado y finalmente el uso de un algoritmo iterativo a partir de la creación de tablas elaboradas a lápiz y papel o razonamientos verbales.

Las representaciones espontáneas se fueron refinando en las etapas siguientes de ACODESA hasta construir una RSC, con la que es posible calcular cualquier número triangular.

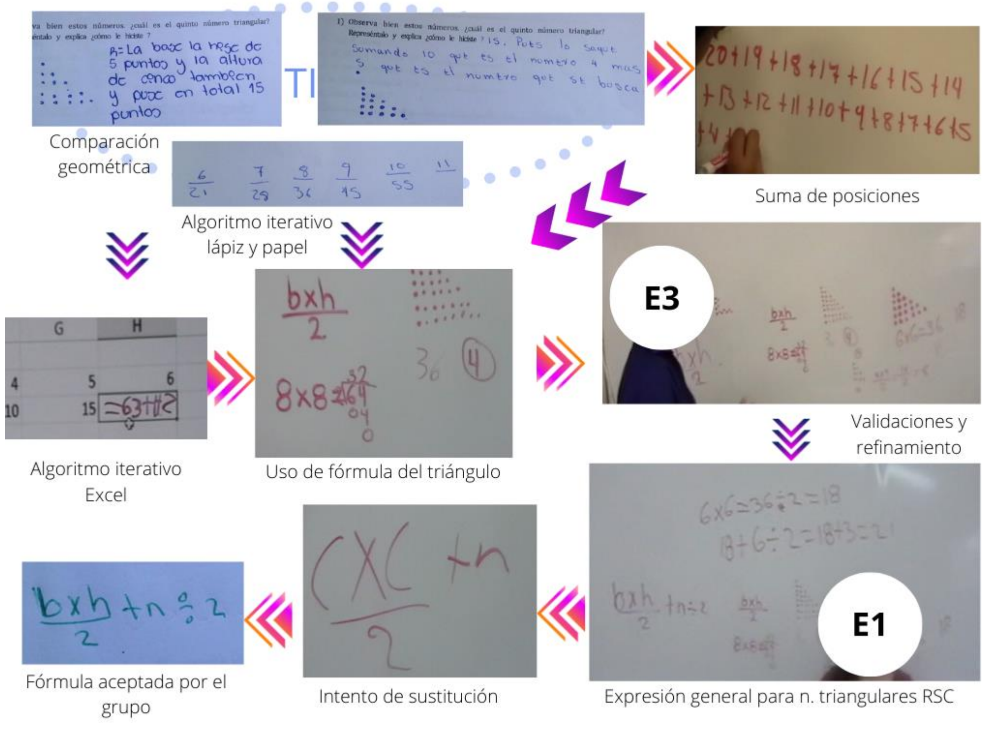


Figura 9. Proceso de construcción de expresión general, números triangulares.

En la Figura 9 se reconstruye el proceso que realizó el grupo hasta llegar a una expresión general. Se encontraron resultados parecidos a los de Healy y Sutherland (1990) de la forma **trig. Δn = na before + position**, en el entorno Excel y en el trabajo a papel y lápiz. Además, aparece una estrategia reconocida por Hitt (1994) en un estudio realizado con futuros profesores de secundaria en un entorno a papel y lápiz donde se estableció la fórmula siguiente **No Tri (n) = 1+2+3+….+n =** $\Sigma^{n}_{I=1} I$**,** es decir, la suma de las posiciones de los triangulares hasta llegar a la posición del número buscado, sólo que en este caso en sentido inverso y sin la representación matemática formal.

A partir de la visualización, y del uso de diferentes RFE, recurrieron a la fórmula para calcular el área del triángulo **bxh/2**, después, a través de contraejemplos en el debate en gran grupo, se anexó a la fórmula **n÷2**. Se observa claramente que la base del trabajo realizado es una estructura de control aritmética, la división se representa de dos formas, con una "raya" y con el signo "÷", cuando los estudiantes realizan la comprobación utilizan el signo referido a la aritmética. A continuación, se presentan dos fragmentos de conversaciones en el salón de clases (se hace referencia a los estudiantes con la notación E1, E2, …):

(*Fragmento ubicado en las comprobaciones de la fórmula del triángulo*).
E1: Dos, faltarían dos, a todos les falta la mitad. De cada número del triángulo le quitas la mitad.
Inv.: Pasa para que nos expliques.
E1: Ay, es que no sé cómo, pero a todos les hace falta la mitad, como este era ocho y le faltaban cuatro, este era seis y le faltaban tres.

A partir de la fórmula del triángulo identifica una constante que podría usar para definir la fórmula. Después de que se construye la expresión E1, E2 y E3 explican por qué se utilizó la n:

Inv.: ¿Y por qué utilizaron la **n**?
E2: Puede ser cualquier letra, pero nosotros pusimos **n**, solo va cambiando el valor de **n**.
Inv.: La **n** representaría un número…
E1: Cualquier número.
E2: La **n** representaría el número triangular.
E3: Principal.
Inv.: ¿Qué número principal?
E1: Así como este triangular era cuatro, ahí la n vale cuatro.

En la penúltima imagen de la Figura 9, los alumnos trataron de sustituir las literales **n, h, b**, por una sola, E4 propuso la letra **c**, pero la mayoría del grupo, aunque aceptaba la expresión, consideraban más fácil la primera porque "se pone con la fórmula del triángulo", aseveraba uno de los estudiantes. En la etapa de auto-reflexión (45 días después), cinco alumnos intentaron reconstruir la fórmula **bxh/2+n÷2** creada en la experimentación inicial.

6. Resultados: números pentagonales

El trabajo con los números pentagonales exige a los alumnos desarrollar estrategias para encontrar un patrón que es más complicado que el de los números triangulares. El uso de la tecnología en el cálculo de estos números tuvo un papel fundamental. Su influencia fue observada al construir la expresión algebraica que permitiera calcular cualquiera de los números de la serie.

6.1. Trabajo individual

Esta etapa de la metodología ACODESA tuvo una duración aproximada de 15 minutos y una de las principales dificultades encontradas fue la construcción de las representaciones icónicas. Esta tarea no representó ningún problema en los triángulos rectángulos utilizados anteriormente. En esta ocasión solo dos alumnos intentaron hacer una representación del número pentagonal 10. A continuación se presentan tres estrategias que fueron utilizadas por los alumnos.

1. E5 y E6 tienen una centración en la última diferencia de los números pentagonales 3 y 4 que es 10. Se observa la dificultad de la representación icónica, y la persistencia de la centración en el último valor de la sucesión, como referente absoluto. Prima una percepción centralizada.

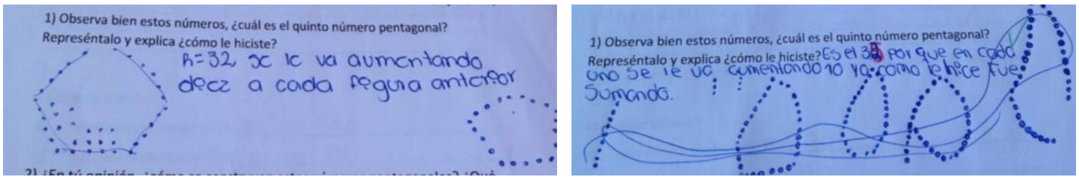


Figura 10. Centración en la última diferencia de la sucesión.

2. Apoyados en la visualización matemática, E2 logra construir la representación icónica sin ninguna otra información que se presente, aunque es claro que entendió cómo es que se modifica la serie al cambiar el número pentagonal buscado. E7 no construye la representación icónica, pero encuentra la relación numérica entre los lados del pentágono y la posición que ocupa el número pentagonal.

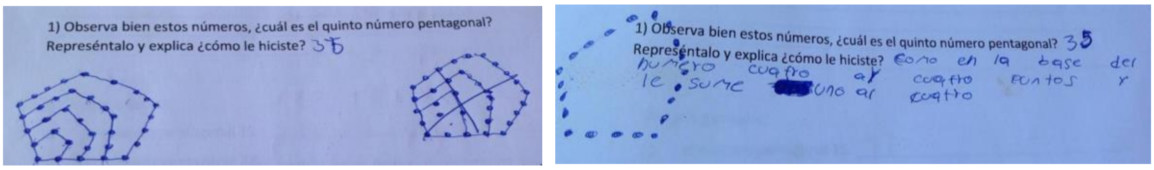


Figura 11. Representación icónica.

3. E8 encuentra un patrón para calcular los números pentagonales a través de un algoritmo iterativo, que es resultado de una visualización matemática y una estructura aritmética basada en secuencias numérico-geométricas, que posibilitan la comprensión de un patrón como anterior al pensamiento algebraico.

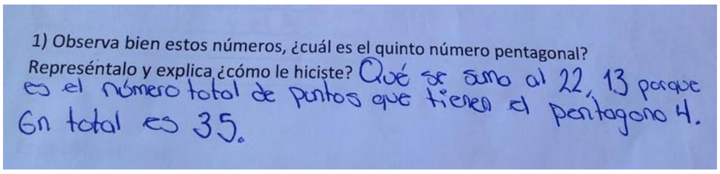


Figura 12. Reconocimiento del patrón en la serie.

Todas las representaciones espontáneas realizadas en el trabajo individual son representaciones funcionales, que los estudiantes han construido a través de la visualización matemática, y que están alejadas de las RI, pero serán punto de partida para conjeturas dentro del trabajo en equipo y en grupo

6.2. Trabajo en equipo

En esta etapa de la metodología ACODESA se dividieron los alumnos en cuatro equipos de tres y uno de dos estudiantes (EQ1, EQ2, EQ3, EQ4 y EQ5). Las conjeturas individuales fueron confrontadas y se llegó a estrategias como las que se muestran a continuación.

El EQ4, influido por E8, realizan una especie de tabla en donde comienzan a calcular los números pentagonales por medio de un algoritmo iterativo. El EQ2 intenta utilizar la fórmula para calcular el área del pentágono, siguiendo la misma estrategia que se utilizó en los números triangulares, pero sin los mismos resultados. No lograron identificar la apotema para poder comprobar su teoría e intentar calcular el número pentagonal sin importan cuál sea la posición.

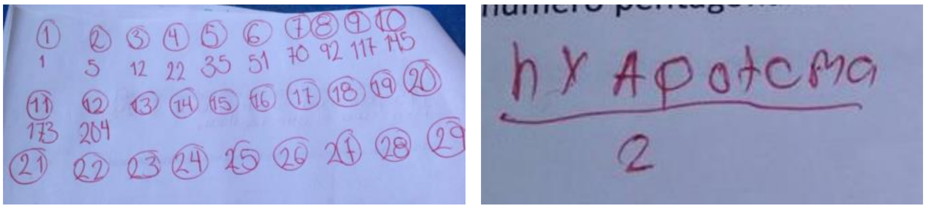


Figura 13. Expresión iterativa y fórmula para calcular área del pentágono.

Los integrantes del mismo equipo, presentan una estrategia interesante para calcular el pentagonal 10, al conocer que el pentagonal 5 tiene un valor de 35, simplemente lo multiplican por dos, ya que 10 el doble de 5, y por sentido común 70 tendría que ser el pentagonal 10, aunque en esta secuencia geométrica, esa línea de pensamiento no funciona.

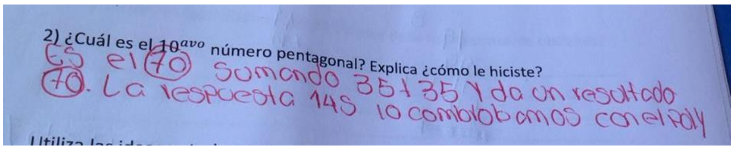


Figura 14. Estrategia multiplicativa.

6.3. Debate en gran grupo

Al iniciar esta etapa, el EQ4 y el EQ1 han construido un algoritmo iterativo, pero, en lugar de sumar la posición siguiente, como en los números triangulares, se le suma 3 a lo que aumentó el pentagonal anterior. Este reconocimiento de patrones puede ser un antecedente a una expresión algebraica y se logra solo a partir de una visualización matemática entre las representaciones semióticas y las mentales de los alumnos.

6.3.1. Episodio 1, presentación del algoritmo iterativo

El EQ1 pasa a explicar esta conjetura.

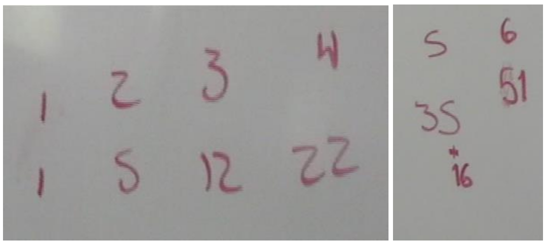


Figura 15. Algoritmo iterativo.

Inv.: ¿Cómo le hicieron para calcular el pentagonal 5?
E2: El pentagonal 5, pues el 1 tenía solo un punto, el 2 era 5, el 3 es 12, el 4 22.
(…)
E2: Pues nosotros lo que hicimos fue que, aquí como por ejemplo (*señala el pentagonal 2*), aumentaba 7 (*del 5 al 12*), a 7 le aumentamos 3 que sería 10, y ya aquí le sumamos, 12 más 10 (=) 22.

E8 del EQ4 pasa al pizarrón a continuar con la explicación que había iniciado E2.

E8: Se le van aumentando 3, como del 1 al 5 fueron 4, y luego se le aumentaron 3 para que fuera 7, y al 7 se le aumentaron 3 para que saliera 10 para 22, y luego al 10 se le aumentaron 3 para que saliera 13 para 35, y luego al 13 se le aumentaron 6 (*error superficial, no de línea de pensamiento*) para que de 35 saliera 51, y así sucesivamente.

Esta es una representación funcional de los números pentagonales, relacionada con un trabajo numérico sobre la actividad, los estudiantes dejaron atrás las representaciones figurales y trabajaron la serie a partir de simbolismos numéricos. Esta conversión de una representación a otra y la misma capacidad de interactuar entre ellas, acercan a los integrantes de estos equipos cada vez más al concepto, como lo había descrito Duval (1993), en nuestro caso a la expresión general.

6.3.2. Episodio 2, la representación icónica de los números pentagonales

En el trabajo individual se observaron las complicaciones para representar de manera geométrica esta serie. Dentro de la fase del debate en ACODESA, algunos estudiantes comentan que han aumentado puntos para construir los números pentagonales. Al respecto, E3, señala al realizar el pentagonal 5:

E3: Yo primero hice la figura, para ya después la figura irla dividiendo en puntos (*E3 empieza a marcar los puntos en el pentágono*).
E3: Por ejemplo, si es 5, hago la figura y por línea pongo 5. Y pues así hago el resto de la figura, hago otra figura y la voy reduciendo.
Inv.: ¿La puedes hacer por favor?
E3: Mjmm (*empieza a dibujar el interior del número pentagonal*).
Inv.: Y ahí, ¿contabas los puntos o que es lo que hacías?
E3: E, aquí pues iba como dividiendo, por ejemplo…
Inv.: La primera dices que tenía cinco por cada lado.
E3: Mjmm.
Inv.: ¿Y la segunda?
E3: Va a tener 4 por cada lado (*sigue haciendo pentágonos más pequeños y puntos*), y la de acá tres puntos por lado.

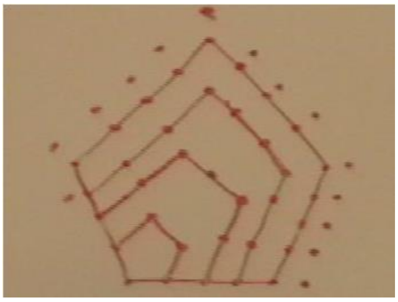


Figura 16. Pentagonal 6, representación icónica.

E11 intenta construir el pentagonal 6. Se observan limitantes en su representación. Agrega punto a punto en correspondencia biunívoca respecto al pentagonal 5 construido por E3. Dibuja 14 puntos, sólo más separados para crear un pentágono más grande. Contradicción detectada inmediatamente por E1 y E3 que pasa al pizarrón a corregir la representación de E11. Situaciones como estas pueden explicarse a través de procesos de control (Hitt & Saboya, 2013), ligados a estructuras mentales producidas con la ayuda de la visualización matemática y la interacción de representaciones.

6.3.3. Episodio 3, el uso de la fórmula para calcular el área del pentágono

Al observar que ni las representaciones icónicas ni los algoritmos iterativos funcionaban bien para números pentagonales "más grandes", E11 intenta calcular los números pentagonales por medio de la fórmula que se usa para calcular el área del pentágono, siguiendo mismo razonamiento utilizado para calcular los números triangulares:

Figura 17. Fórmula para calcular el área del pentágono.

Los alumnos en sus interacciones nunca pudieron identificar la apotema, lo que propició que dejaran esta línea de pensamiento de lado, pero rápidamente surgió una reflexión interesante.

6.3.4. Episodio 4, Poly en el razonamiento de los números pentagonales

E7, propone una idea que cambia la dirección del trabajo referente a la descomposición triangular de Poly:

E7: Y luego de aquí, por ejemplo, aquí en los pentágonos se forman los triángulos y…
Inv.: ¿Cómo?
E7: Ps, por ejemplo, aquí está un triángulo y aquí se podría hacer la fórmula (…).
E11: Solo que saquemos la fórmula de los tres triángulos y la sumemos (…).
E3: Después de que salgan los tres resultados se suman y después la base.

Después de esta conjetura empieza una nueva línea de razonamiento, se generan diferentes comentarios que acercan a los estudiantes a una expresión algebraica general para calcular cualquier número pentagonal. Esta reflexión hubiera sido muy difícil de lograr sin la ayuda de a descomposición triangular de Poly, la visualización matemática y las estructuras de control.

6.3.5. Episodio 5, proceso de construcción de la expresión general

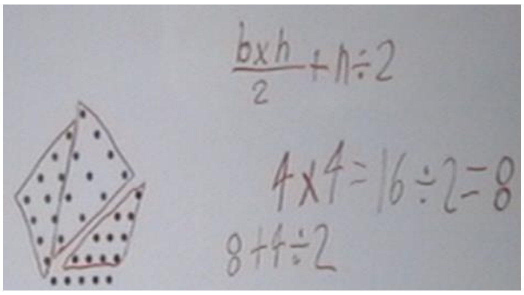
En la construcción de una expresión general para el cálculo de cualquier número pentagonal, la descomposición triangular de Poly jugó un papel indispensable, después de la conjetura de E7, se suscitó un debate intenso entre los miembros del grupo.

E11: Solo que saquemos la fórmula de los 3 triángulos y la sumemos.
E1: Ajá.
Inv.: ¿Y cómo le podríamos hacer?
E3: Podría ser sacando la fórmula, la cantidad de cada….
E8: De cada triángulo.
E3: De cada triángulo.
E8: Su base, su altura y dividiéndola entre 2, y luego de los otros 2 triángulos y luego sumarlos.
E3: Después de que salgan los 3 resultados se suman y después la base. (*E3 acaba de explicar la lógica de la fórmula, ahora solo falta representarla*).

Los estudiantes han explicado verbalmente cuál es el procedimiento que se tiene que realizar para la construcción de la fórmula general, pero es necesaria una conversión del lenguaje natural a un registro de representación algebraico, es decir, hacer tangibles esas reflexiones hechas por los integrantes del grupo. Esa transformación es compleja.

La necesidad de realizar esta conversión está relacionada con nuestro enfoque de acceso natural al álgebra. A partir de reflexiones aritméticas y geométricas colectivas surgió un procedimiento para el cálculo de cualquier número pentagonal, que en lo posterior tendrá que ser representado con una fórmula, lo que realmente sería el ejemplo de un tránsito natural, sin imposición de simbolismos y relaciones sintácticas, que resultará en una representación funcional alejada de las RI conocidas.

La importancia de la interacción de las diferentes líneas de pensamiento de los estudiantes dentro el aprendizaje colaborativo, llevan a reflexiones que conducen a la creación de nuevas conjeturas en la construcción de la expresión general, que es entendida como una RSC. Sobre una proyección del número pentagonal 5, en donde se observa la descomposición triangular de Poly, E3 encierra los 3 triángulos.



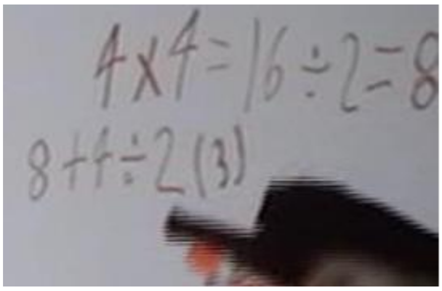


Figura 18. Descomposición triangular realizada por alumnos y la multiplicación por 3.

Con la intención de construir una expresión, algunos alumnos aportan ideas interesantes:

E3: Podría ser este… una fórmula por 3.
E11: Porque mire…
E3: Porque la fórmula del triángulo es de 10 (*se refiere al valor del número triangular 4*), pero al multiplicarlo por el 3, 10 por 3 nos da 30 y le pones más la base, son 35, o si fuera otra cantidad, como…
Inv.: Y ¿cómo podrías multiplicar la fórmula por 3?
E4: No se puede.
E11: Ah, como que no se puede, eso significa multiplicación, multiplicas la fórmula por 3.

Los estudiantes discuten de cómo se podría representar esa multiplicación de la fórmula por 3, si es al inicio o al final donde tendría que ubicarse la operación.

6.3.6. Episodio 6, la fórmula individual

Al tener problemas al multiplicar por 3 la fórmula surge una propuesta, que demuestra un grado de abstracción elevado, todo lo incluido en la expresión general para calcular los números triangulares es sustituido por una sola letra:

E3: Entonces haz la fórmula individual.
Inv.: ¿Cómo que haz la fórmula individual, a que te refieres E3?
E3: Así como, por ejemplo, que le ponga la **F** que signifique, la fórmula del triángulo (*es muy interesante ya que puede hacer representación de un objeto matemático abstracto como lo es una fórmula matemática*), o la **t** que signifique el triángulo (*E3 pasa al pizarrón y escribe **Fx3***).
Inv.: F por 3.
E3: Mjmm, lo cual la F es la fórmula y como hay 3 triángulos en el pentágono… pues se multiplica, por ejemplo, como estas.
Inv.: Con eso quedaría.
E3: ¿La fórmula? No, quedaría incompleta, se le aumentaría lo que es la base.
Inv. ¿Y cómo pondrías eso?
E11: Se le pone más 5.
E8: No, pero ponle **b.**
E3: **B.**
E8: De base.

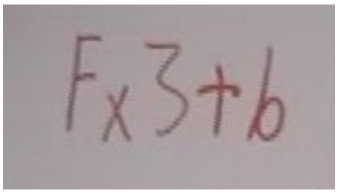


Figura 19. Fórmula "individual".

E3 propone la utilización de la "fórmula individual" en donde representa la expresión encontrada para calcular los números triangulares con una letra **F**, además la multiplica por tres y le suma la base, lo que ya se había dicho verbalmente con anticipación. Esta expresión, es en todo el sentido de la palabra, una representación funcional alejada de la RI **n(3n-1)/2**, que cumple dentro de su constitución, con los elementos del pensamiento aritmético-algebraico.

6.3.7. Episodio 7, expresión algebraica para cálculo de números pentagonales

Después la multiplicación y la suma de la base que aparecía en la fórmula "individual", se trasladan a la expresión **bxh/2+n÷2**, creada por los estudiantes para el cálculo de números triangulares. Posterior a la conversión se da un tratamiento sobre la nueva representación, que puede considerarse socialmente construida.

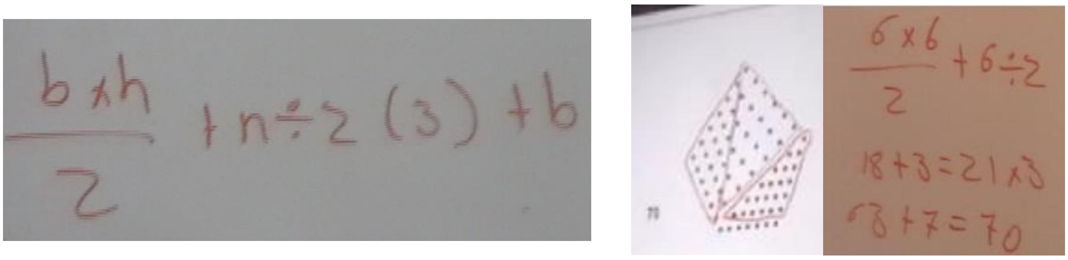


Figura 20. RSC para cálculo de números pentagonales y comprobación con pentagonal 7.

A partir de la construcción de la expresión, los alumnos intentan comprobar su conjetura con el número pentagonal 7.

E3: El 6, el triangular es el 6 y el pentagonal es el 7 ya se hace la fórmula del triangular. Sería 7 por 7 (*se escucha una voz que dice 7, pero no se aprecia quién es*).
E8: 49.
E2: Sería 6 por 6.
E1: 6 por 6 porque…
Inv.: ¿Por qué 6 por 6 y no 7 por 7?
E3: El triángulo es de 6 y el pentágono es de 7, en cada uno que se hace se le resta un número a la base.
Inv.: ¿A la base se le resta un número?
E3: Del pentágono.
Inv.: ¿A la base del pentágono se le resta un número?
E3: Bueno, se ve así en el triángulo, porque el triángulo tiene 6, la ba... y el pentágono tiene 7.
(*E2 realiza operaciones en el pizarrón*).
E2: Y ya 63 más 7 de la base del pentágono, 70.
E11: Sí, está bien, es 70.

La estructura de control basada en la aritmética y las nociones algebraicas sobre fórmulas para calcular áreas tuvieron un papel indispensable en la construcción de la fórmula de los números pentagonales, que no es más que una RSC de los alumnos que no coincide con la RI. Hay que considerar que la base del triángulo (dentro de la descomposición triangular de los números pentagonales), es uno menos que la base del pentágono. Los sujetos lo dan por hecho cuando aplican comprobaciones, aunque no esté representado directamente en la fórmula. E11 intenta representarlo, pero el grupo no se convence y siguen utilizando la representación inicial.

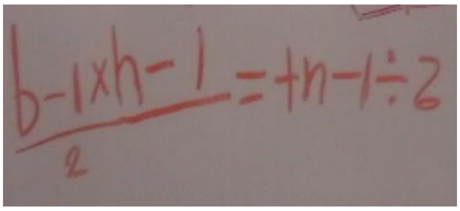
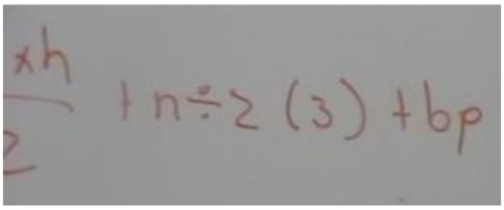



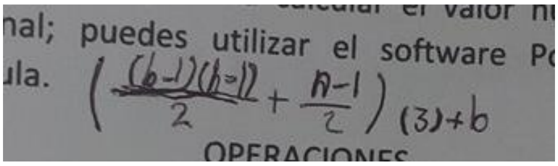
Figura 21. Literales menos 1 en fórmula para calcular triangulares y una representación especial para base del pentágono.

Al regresar a la expresión **bxh/2+n/2(3)+b** se les pregunta a los alumnos qué significa la **b**, ya que se incluye en dos partes en la fórmula, un primer momento representa la base del triángulo y al final la base del pentágono, es decir no es el mismo valor

Inv.: ¿Qué es la **b**?
E11, E1 y E3: Base del pentágono.
E11: Ponle **bp** (*E2 escribe **bp***)
Inv.: ¿Por qué le pusieron **bp**?
E1: Fue E11, por base del pentágono (*es interesante cómo buscan diferenciar la base del pentágono a la base de los triángulos de alguna manera*).

6.4. Auto-reflexión

Esta etapa se aplicó 45 días después. Cinco estudiantes lograron establecer algún tipo de fórmula, pero solo E3 pudo reconstruir una expresión general funcional. Durante la entrevista comentaba que no recordaba qué representaba la **n**. De hecho, tal como E3 la escribe nunca se construyó durante la experimentación inicial. Algo interesante ocurrió con E8 ya que construyo una fórmula para la sucesión que no había construido durante la experimentación:



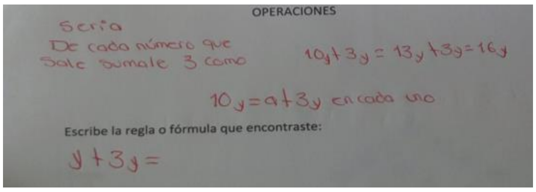


Figura 22. Representación funcional y expresión basada en las sucesiones.

Los resultados anteriores, indican que no todos los estudiantes lograron construir una estructura estable del pensamiento aritmético-algebraico, pero aquellos que lograron hacerlo pudieron utilizar estas nuevas herramientas para crear representaciones funcionales que en lo posterior pueden transformarse en RI con la ayuda del profesor.

7. Conclusiones

La construcción de una fórmula a partir de conjeturas propias (individuales y colectivas), promueve el desarrollo de ETM personales en los estudiantes, vinculados al pensamiento aritmético-algebraico. La emergencia de distintos dominios matemáticos durante las tareas realizadas siguiendo la metodología ACODESA, permite la articulación entre los elementos de estos ETM mediante fibraciones externas e internas, donde las génesis de los diferentes ETM se activan para promover una introducción natural al álgebra.

El desarrollo de una tarea colaborativa dentro de este marco, permite activar todos las dimensiones y componentes de los ETM, potenciando el trabajo completo mencionado por Kuzniak (2019), articulando metodológicamente las actividades en un ambiente sociocultural.

En el análisis de los resultados, se hizo visible la evolución de las representaciones. Los procesos de generalización surgidos en las actividades de reconocimiento de patrones con números poligonales, permitieron comprender que no solo existen en la matemática RI. Las RFE y las RSC pueden considerarse un antecedente a las representaciones formales.

En las dos experimentaciones realizadas los estudiantes no llegaron a expresiones convencionales para el cálculo de números triangulares **n(n+1)/2** y pentagonales **n(3n-1)/2**, pero encontraron, por medio de RFE y las RSC, la manera de resolver estas series geométricas. Lo que indica que los procesos de construcción natural de este tipo de fórmulas no siempre conducen a RI, pero sí a una reflexión mucho más profunda sobre las relaciones establecidas en los procesos de generalización algebraicos.

En, nuestro estudio, el uso de la tecnología, tiene un papel importante en la construcción cognitiva del sujeto. En Poly, la visualización matemática juega un papel fundamental en la descomposición triangular de los números pentagonales y su relación con la construcción de la fórmula.

Finalmente, para el desarrollo de un pensamiento aritmético-algebraico es necesario construir una estructura cognitiva en los estudiantes que tenga control de la actividad matemática a partir de fundamentos aritméticos y geométricos, con los que se pueda detectar la contradicción. También sería deseable incentivar una visualización matemática que ayude al reconocimiento de patrones, y que promueva de esta manera una generalización como puerta de entrada al pensamiento algebraico, permitiendo así la construcción personal de un $ETM_{A\text{-}A}$.

8. Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2012). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre*. http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-1.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–176. https://doi.org/10.1007/BF00314724.

Brousseau, G. (2002). Theory of Didactical Situations in Mathematics. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2.

Cortés, J. C., Hitt, F., & Saboya, M. (2014). De la Aritmética al Álgebra: Números Triangulares, tecnología y ACODESA. *REDIMAT*, *3*(3), 220–252. https://doi.org/10.4471/redimat.2014.52.

Cortés, J. C., Hitt, F., & Saboya, M. (2016). Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. *BOLEMA*, *30*(54), 240–264.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 37–65). Grupo Editorial iberoamérica.

Healy, L., & Sutherland, R. (1990). The use of spreadsheets within the mathematics classroom. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *21*(6), 847–862.

Hitt, F. (1994). Visualization, anchorage, availability ad natural image: polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25*(3), 447–455.

Hitt, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques. *Annales de didactiques et de sciences cognitives, 18*, 9–27.

Hitt, F., & Quiroz, S. (2019). La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En F. Hitt & J. C. Cortés (Eds.), *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 11–29). AMIUTEM.

Hitt, F., & Saboya, M. (2013). Structure Cognitive De Controle Et Competences Mathematiques De L ' Arithmetique a L ' Algebre Au Secondaire : Les Nombres Polygonaux. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, *23*(1), 134–146.

Hitt, F., Saboya, M., & Cortés, J. C. (2015). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0749-5.

Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En D. W. Carraher, J. J. Kaput, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2007). Research on the Learning and Teaching of School Algebra at the Middle, Secondary, and College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1–135.

Kuzniak, A. (2019). La teoría de los espacios de trabajo matemáticos desarrollo y perspectivas. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya Delgadillo, P. R. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier (Eds.), *Sexto simposio sobre el trabajo Matemático* (pp. 41–60). Pontificia Universidad Católica de Valparaiso.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectiva. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*, 5–15.

Leontiev, A. (1978). *Activity, counciousness, and personality*. Prentice-Hall.

Tanguay, D., Montoya Delgadillo, E., Nechache, A., & Oktac, A. (2019). El trabajo matemático y los espacios de trabajo matemático. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya Delgadillo, P. R. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier (Eds.), *Proceeding ETM 6*. (pp. 137–141). Pontificia Universidad Católica de Valparaiso.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En *International handbook of mathematical education* (pp. 99–137). Kluwer Academic Publishers.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Visualization in teaching and Learning Mathematics. *MAA Series*, *19* USA, 25–37.

Ulises Said Landín Juárez: Maestro en Educación Matemática y en Psicología Educativa en la perspectiva Psicogenética. Estudiante de doctorado en Formación de Formadores, Escuela Normal superior de Michoacán. https://orcid.org/0000-0002-8955-2447. ulandinjuarez@gmail.com

José Carlos Cortés Zavala: Profesor Investigador de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana; presidente de la Asociación Mexicana de Investigadores para el Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas (AMIUTEM). jcortes@umich.mx