

## Usos de las gráficas en una plataforma virtual de matemática Usos de las gráficas em uma plataforma virtual de matemática

**Zenia Yacir Testa Rodriguez**

Fecha de recepción: 8/11/2021  
 Fecha de aceptación: 21/12/2021

<p><b>Resumen</b></p>	<p>Se presentan algunos aspectos de una investigación en el contexto de una plataforma adaptativa de matemática virtual. Brindo muestras de los usos de las gráficas que los estudiantes ponen en juego. De los resultados surgen aportes a la perspectiva teórica, y elementos a tener en cuenta por parte de los docentes en el proceso de enseñanza. Se destaca la importancia de ir más allá de las respuestas que dan los estudiantes en las plataformas virtuales, conocer los procesos que ponen en juego al trabajar con ellas.  <b>Palabras clave:</b> plataforma virtual, uso de las gráficas, educación</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>There are presented some aspects of an investigation in the context of an adaptive mathematics platform virtual. The uses of graphs that students put into play are presented. From the results, contributions to the theoretical perspective emerge, and elements to be taken into account by teachers in the teaching process. The importance of going beyond the answers given by the students on the virtual platforms and understanding the processes that is done while working with them is highlighted.  <b>Keywords:</b> virtual platform, use of graphics, education</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Alguns aspectos de uma investigação são apresentados no contexto de uma plataforma de matemática adaptativa virtual. São apresentados os usos dos gráficos que os alunos colocam em jogo. A partir dos resultados encontram-se contribuições para a perspectiva teórica, e elementos a serem levados em consideração pelos professores no processo de ensino. Ressalta-se a importância de ir além das respostas dadas pelos alunos nas plataformas virtuais, conhecendo os processos que eles colocam em ação ao trabalhar com eles.  <b>Palavras-chave:</b> plataforma virtual, uso de gráficos, educação</p>

### 1. Introducción

A causa de la pandemia desatada a comienzos del 2020 en Uruguay se pasó de una educación presencial a una virtual. Dadas las condiciones únicas en este país; por la existencia del Plan Ceibal desde hace más de 14 años, que ha entregado dispositivos portátiles a estudiantes y docentes, puesto a disposición de estas plataformas educativas y plataformas específicas de matemáticas; este pasaje

ha sido casi inmediato. Esto se destaca en el documento elaborado por el BID en 2020, en él se indica que Uruguay en la pandemia potenció la infraestructura tecnológica que tenía a raíz de la existencia del Plan Ceibal, siendo el único país de la región con una plataforma integrada para la administración de los aprendizajes de los estudiantes. (Arias et al., 2020)

En este contexto investigaciones sobre la utilización de las plataformas por parte de los estudiantes, sobre el uso del conocimiento (Cantoral, 2013) que los estudiantes ponen en juego al realizar actividades que ofrecen las plataformas, brindan elementos que pueden ser tenidos en cuenta por los docentes a la hora de utilizar este tipo de herramientas. En este artículo se presenta parte de la investigación “Uso de las gráficas cartesianas en el contexto de una Plataforma Adaptativa de Matemática” (Testa, 2020) para obtener el grado de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa. Dicha investigación se realizó utilizando la plataforma adaptativa PAM, con foco en el uso de las gráficas cartesianas (Cordero, Cen, Suárez, 2010). PAM es la primera plataforma de matemática que Plan Ceibal pone a disposición de docentes y estudiantes.

## 2. El contexto

### 2.1. La educación en Uruguay

Para entender el impacto del Plan Ceibal en estos dos años de pandemia debemos hacer un breve resumen de algunos aspectos desde su creación. Así como enmarcar la incidencia de él en los estudiantes y docentes uruguayos.

En Uruguay, el Sistema Educativo abarca Educación en la Primera Infancia e Inicial, Primaria, Media Básica y Media Superior, Terciaria (Universitaria y no Universitaria). Para todos estos ciclos hay Centros Públicos (laicos y gratuitos) y Privados. La enseñanza desde Inicial 4 (a partir de 4 años) a Media Básica (aproximadamente 15 años) es obligatoria.

Testa (2020) muestra el nivel de cobertura de Educación Primaria y Media Básica presentado por el Ministerio de Educación y Cultura (2020) al 2017. En Educación Primaria la cobertura educativa es universal, próxima al 100%, en Educación Secundaria Básica, nivel en el que se realizó la investigación, la cobertura es superior al 95%.

Frente a esta situación podemos asegurar que Plan Ceibal llega a un elevado porcentaje de docentes y estudiantes, lo que favoreció el rápido pasaje de los cursos, de la presencialidad a la virtualidad, en la pandemia. Testa decía, que:

Los porcentajes de estudiantes que asisten a Centros Educativos Públicos en Educación Media Básica es superior al 86% según los datos del Anuario Estadístico de la Educación (Ministerio de Educación y Cultura, 2019, p. 1). Estos estudiantes y sus docentes son, entre otros casos muy específicos, los considerados *usuarios Ceibal*. Este alto porcentaje de cobertura a nivel país pone de relevancia la importancia de realizar investigaciones en Matemática Educativa de los materiales, programas y plataformas que Plan Ceibal pone a disposición de dichos estudiantes y docentes. (Testa, 2020, p.4)

### 2.2. El Plan Ceibal

El Plan Ceibal se crea por decreto presidencial en 2007. Es un proyecto socioeducativo, que convierte a Uruguay en un país vanguardista en la reducción de la brecha digital en la sociedad, la inclusión y la equidad en el acceso a la información. Entrega a cada docente de Educación Primaria (6 a 11 años) y Media

Básica (12 a 14) pública (obligatoria, gratuita y laica), así como a sus estudiantes, una laptop o tablet para su uso personal, tanto en el aula como fuera de ella. Además de la entrega de los dispositivos pone a disposición de estos estudiantes y docentes distintas plataformas educativas, materiales, ofrece variados cursos, así como desarrolla distintos proyectos. Plan Ceibal brinda conectividad gratuita a los Centros Educativos públicos. En época de pandemia generó planes de conexión para estudiantes y docentes, además de sumar a las plataformas ya existentes una herramienta de videoconferencia que no consume datos, de esta forma facilitó los encuentros sincrónicos, que vinieron a sumarse a las interacciones asincrónicas que ya brindaban las plataformas con las que se contaba. La entrega de los dispositivos impactó en la población disminuyendo la brecha de acceso a un dispositivo portátil entre los distintos quintiles como se puede observar en la Figura 1.

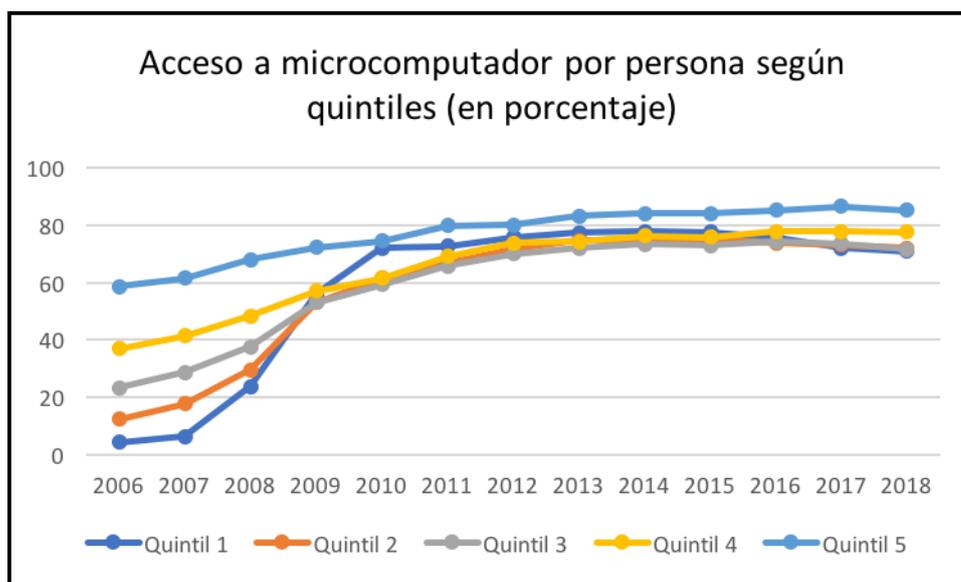


Figura 1. Acceso a microcomputador 2006-2018 (Uruguay)

Nota: elaboración propia con datos del Ministerio de Desarrollo Social (2020)

### 2.3. La plataforma adaptativa de matemática “PAM”

Desde mediados del 2013 Plan Ceibal pone a disposición de sus usuarios PAM, plataforma a la que se accede en línea con contenidos de tercer año de Educación Primaria a tercer año de Educación Media Básica. Tiene una lógica de trabajar en base a actividades o series de actividades, cuenta con más de 100.000 actividades las cuales se presentan por tema o por curso. Cabe destacar que todas las actividades de PAM están disponibles para los docentes y los estudiantes, independientemente del curso en el que se encuentren. Entre todas las actividades de PAM el docente puede elegir las que asignará a sus estudiantes, y los estudiantes pueden realizar tanto las asignadas por su docente como cualquier otra PAM.

Cuando el estudiante realiza las actividades si lo desea puede acceder a aspectos teóricos, “consultar”, que es un libro virtual que le presenta exactamente el tema relacionado con la actividad con la cual está trabajando, que contiene ejemplos, definiciones, etc., y que permite navegar dentro del desarrollo del tema en cuestión. El estudiante en la actividad también puede ingresar a “pistas”, en general observaciones sobre la actividad dadas en lenguaje coloquial. Estos aspectos

diferencian a PAM de la mayoría de los libros en formato papel en los cuales primero desarrollan el tema y luego se presentan las actividades.

PAM brinda al estudiante una retroalimentación sobre lo realizado en la actividad. Como desarrolla Testa (2020) el concepto de “adaptativa” en lo micro se refiera a la retroalimentación inmediata que le brinda al estudiante al ingresar una respuesta. Si la respuesta es la esperada por PAM se lo indica con sonido e imágenes que así se lo hacen saber. Si la respuesta ingresada no es correcta (según PAM) también emite sonido y marcando en rojo la respuesta (o la parte de ella) que no es correcta<sup>1</sup>. Si en el primer intento de respuesta de la actividad, ésta no es la esperada por la plataforma, el estudiante tiene la posibilidad de responder nuevamente (ya alertado de los errores cometidos en el primer intento), y en caso que nuevamente la respuesta dada no sea la esperada por PAM la plataforma le proporciona una posible solución acompañada de una explicación.

La PAM no presenta un fundamento explícito escrito sobre la concepción pedagógica ni didáctica de su propuesta; Plan Ceibal ha brindado variados y numerosos cursos a docentes de corte instrumental y de corte matemático-educativo. Por ello considero, en base a mis 11 años de trabajo en Plan Ceibal, y al estudio de Testa y Suárez (2019), que cada docente la utiliza de distintas maneras, teñido por sus hábitos, sus concepciones y su punto de vista sobre la enseñanza de la Matemática como también reportan los estudios de Drijvers et al. (2010) sobre otras herramientas tecnológicas. En el estudio de Testa y Suárez (2019) se destaca también que los docentes han ido modificando la forma de utilizar PAM en función de las capacitaciones en las que participan y del proceso de apropiación que van realizando.

### 3. La investigación

El estudiante al trabajar en PAM, dadas las características descritas anteriormente, puede establecer una interrelación (personal) con ella y sus contenidos. En esta interrelación se producen distintos *usos del conocimiento* (Cantoral, 2013). La investigación, de la cual en este artículo se reportan algunos objetivos y sus resultados, buscó indagar sobre dichos usos, en particular el *uso de las gráficas* (Cordero et al., 2010) determinado por sus *formas y funcionamientos*; indagar si se produce, o no, un *desarrollo del uso de la gráfica* cuando un grupo de estudiantes realiza una actividad en PAM seleccionada especialmente para esta investigación.

Presento en este párrafo algunos de los antecedentes, sobre el trabajo en el aula con tecnología, que consideramos para esta investigación. El informe de la XVII ICMI Study Conference (Hoyle & Lagrange, 2010) donde analizan los cambios desde el primer estudio ICMI; Sinclair et al. (2010) indica que en el inicio las investigaciones se enfocaban en aprendices individuales y su relación con la computadora, y luego incorporaron estudios de gran escala demandan una aproximación más sistémica. Los proyectos reportados son *Enciclomedia* (México), *M@t.abel* (Italia), *Sketchpad for Young Learners* (US), *Mathematics 9 and 10 with the Geometer's Sketchpad* (Lituania) y *E-content Initiative* (Irán). Sacristán et al.

---

<sup>1</sup> En todos los casos en este artículo nos referimos a respuesta “correcta” o “incorrecta” según la respuesta esperada por PAM.

(2010) estudian los modos en que los estudiantes se involucran en el aprendizaje al utilizar herramientas digitales. Julie *et al.* (2010) presentan proyectos de desarrollo regionales, en Rusia, Hong Kong, Vietnam, Sudáfrica y Latinoamérica. Los estudios de Hoyles y Lagrange (2010), Goos (2005), Villarreal (2012) y Ponte *et al.* (2002), se centran más en el docente y la utilización de la tecnología.

### 3.1. La perspectiva teórica

La perspectiva teórica de esta investigación fue Teoría Socioepistemológica, en particular el *Uso de las gráficas* (Cordero *et al.*, 2010). Cantoral (2013) destaca el aporte de la Socioepistemología, “*modela la construcción del conocimiento matemático conjuntamente con su difusión institucional, esto es, modeliza las dinámicas del saber o conocimiento puesto en uso*” (p. 97). Indica que fue necesario introducir la noción de *uso* y de *conocimiento en uso*, en contraste a la noción psicológica que plantea un conocimiento estático. En cuanto a la investigación, en la teoría, indica que “...inicia con este particular tratamiento del *saber*. Se lo construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y en el espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa” (p. 97).

Considerar al *saber* como el *conocimiento en uso* rompe la centralización en los objetos matemáticos. Esto implica cambiar la lupa de lo que *sabe un estudiante sobre cierto objeto matemático*, o cómo el *docente debe enseñarlo*, a colocarla en *cómo se usa el conocimiento* en cierta situación. Impacta también en la concepción de la enseñanza de la matemática, dejando de considerarla como transmisora de conocimientos a una enseñanza funcional. Lo cual implica crear las condiciones para que el aprendiz realice un aprendizaje funcional. El concepto que abarca estas dos últimas cuestiones es considerar a la matemática desde una mirada funcional, en contraposición de una mirada utilitaria. (Testa, 2020, p. 37)

A partir del constructo *conocimiento en uso* planteado por Cantoral (2013), Cordero *et al.*, (2010) consideran el *uso de la gráfica* a través de los conceptos de *forma* y *funcionamiento*. En este sentido Cordero *et al.*, (2010) consideran al uso de la gráfica “como el papel que desempeña en la situación y se manifiesta por sus funcionamientos y formas” (p.199). Respecto a la forma y funcionamiento de la gráfica los autores indican que “el funcionamiento son las ejecuciones, acciones u operaciones que desempeña la gráfica en la situación, mientras que la forma son las clases de esas ejecuciones, acciones u operaciones.” (p.199). Se establece una relación dialéctica entre el funcionamiento y la forma de la gráfica, dando origen a su uso.

Para esta investigación consideré las categorías teóricas que surgen del estudio de los programas de seis semestres del bachillerato tecnológico bivalente del Instituto Politécnico Nacional de México, en el área de físico-matemáticas realizado por Cordero *et al.* (2010). Los usos de la gráfica reportado por estos autores son: *distribución de puntos*, *comportamiento geométrico*, *análisis de la curva*, *cálculo de áreas y volúmenes*, y *análisis de la información*. En la Tabla 1 sintetizo la descripción que dicho estudio realiza de los “usos”, a partir del funcionamiento y la forma de la gráfica que los determinan.

Uso	Situación	Funcionamiento	Forma
Distribución de puntos	Atañe al conocimiento de la forma gráfica de una función.	Ubicación de puntos, desplazamiento en el plano cartesiano, variación de los	Tablas con valores previamente

		puntos para el trazado de curvas continuas o no.	establecidos, gráficas y ecuaciones.
Comportamiento geométrico	Alude a la interpretación geométrica de una función o asociación curva-expresión algebraica, para comprender las transformaciones de las funciones.	Obtención de nuevas gráficas de funciones a partir de una ya conocida	Traslación horizontal o vertical, estiramiento o reflexión de la gráfica.
Análisis de la curva	Dirigida hacia la variación de la curva (análisis global).	Análisis del comportamiento (crecimiento o decrecimiento) para ubicar máximos y mínimos, puntos de inflexión y concavidad en distintos intervalos.	Tabla de variación, criterios de la derivada primera y derivada segunda
Cálculo de áreas y volúmenes	Centrada en hallar el área o volumen de una figura limitada por funciones (foco en la unidad de análisis que describen la o las gráficas).	Para definir la superficie (cálculo de área) o superficie a rotar (cálculo de volumen)	Integración

**Tabla 1. Categorías de usos de las gráficas (Cordero et al., 2010)**

**Nota: Creación propia con datos de Cordero et al. (2010, p. 200)**

Cordero *et al.* (2010) también destacan que el debate entre las formas y funcionamientos de la gráfica permite que estos se vayan transformando y modificando, generando nuevas formas y funcionamientos. A esta transformación le denominan *desarrollo de usos de la gráfica*, que implica su *resignificación*. “Se forman construcciones, se hacen distinciones entre ellas, se ponen en juego clases de actividades y usos del conocimiento donde no sólo se da un lenguaje de herramientas, sino también se desarrolla” (Cordero *et al.*, p. 200).

### 3.2. Marco metodológico

La propuesta fue realizada por tres equipos de Estudiantes de primer y tercer año de Ciclo Medio Básico. Trabajaron con una sola computadora, para que debieran acordar la respuesta a ingresar en PAM, y se dieran interacciones entre ellos. La investigadora grabó las interacciones orales entre los estudiantes y tomó notas de sus gestos, sin intervenir. Acorde a la perspectiva teórica de la investigación se consideró el abordaje metodológico de Montiel y Buendía (2011) donde presentan un *Esquema Metodológico para la Investigación Socioepistemológica*, Figura 2.



**Figura 2. El esquema metodológico**  
**Nota. Fuente, Montiel y Buendía (2011, p. 446)**

Montiel y Buendía (2011) indican que los nodos representan fases o momentos del proceso de investigación (incluyendo tareas), y las flechas que los vinculan, acciones que relacionan los distintos momentos. La relación entre los nodos presentados en el esquema en forma genérica y los de la investigación que acá presento es la siguiente: *primer nodo* la problemática a estudiar; *segundo nodo* se consideraron los estudios de Cordero y Flores (2007), Cordero *et al.* (2010) y Suárez (2014) en torno a la graficación como práctica social, *tercer nodo* (situación-problema) del esquema corresponde a la de la plataforma adaptativa de matemática, que he llamado *Gráficas en PAM*, que seleccioné especialmente para este estudio y *cuarto y último nodo* del esquema corresponde a los resultados del análisis de las producciones de los estudiantes. En la Tabla 2 presento las distintas etapas del diseño metodológico de la investigación.

Etapa	Acciones
1	Se analizó en profundidad PAM, experimentando con distintas actividades relacionadas al uso de las gráficas considerando los elementos propios de ella; <i>consultas, pistas, la solución PAM</i> (con la respuesta esperada), y <i>las devoluciones</i> frente a una respuesta.
2	Seleccioné de las actividades de PAM las que contuvieran una gráfica de una función pero no su expresión analítica. De las pocas actividades que cumplían esta condición, que podrían permitir evidenciar el <i>uso de la gráfica</i> que los estudiantes pondrían en juego al realizarla, y que además fuera un desafío no paralizante para los estudiantes elegí la llamé <i>Gráficas en PAM</i> . Según la clasificación de Cordero <i>et al.</i> (2010) la enmarqué en el uso <i>distribución de puntos</i> .
3	Apliqué la actividad a tres equipos de tres estudiantes de primer y tercer año de Educación Media Básica.
4	Analicé las producciones de los estudiantes

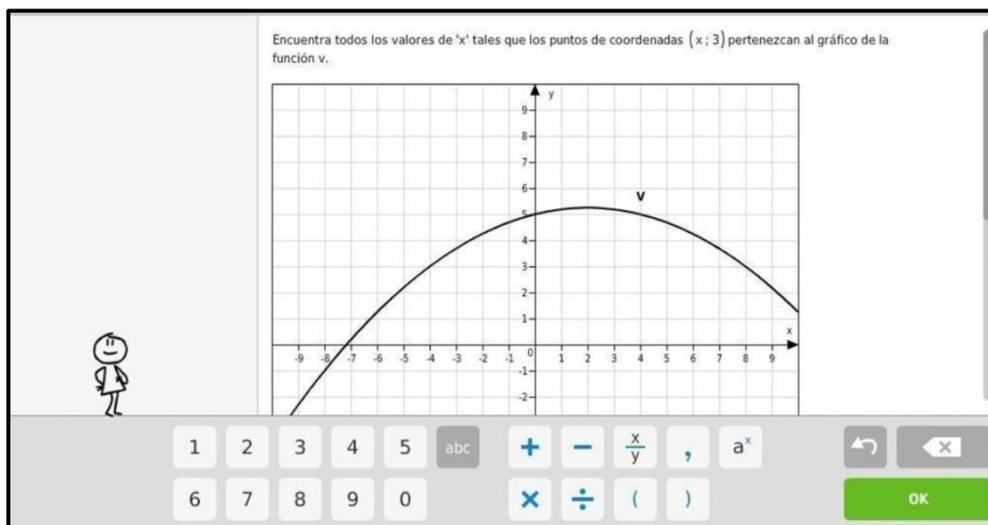
**Tabla 2. Etapas del diseño metodológico**

### 3.3. La propuesta

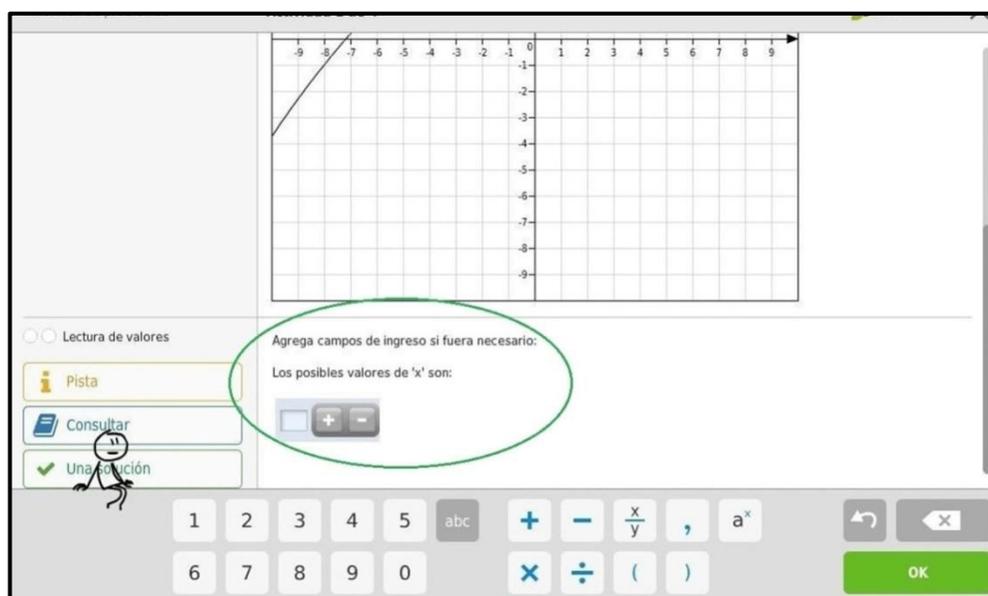
Se presenta a continuación la actividad seleccionada, la pista asociada a ella, y la resolución que propone PAM. No se presenta el consultar dada su extensión y además porque los sujetos de la investigación no recurrieron a él.

#### 3.3.1. La actividad *Gráficas en PAM*

Las Figuras 3 y 4 muestran la actividad seleccionada para la investigación. En la pantalla se debe deslizar la barra lateral para ver toda la actividad, por ello la misma se presenta en dos figuras. La consigna indica: Encuentra los valores de "x" tales que los puntos de coordenadas  $(x; 3)$  pertenezcan al gráfico de la función  $v$ .



**Figura 3. Actividad Gráficas en PAM 1**  
Nota: Captura de pantalla de PAM (2019)



**Figura 4. Actividad Gráficas en PAM 2**  
Nota: Captura de pantalla de PAM modificado (2019)

En las figuras anteriores se puede observar que la gráfica está representada en un sistema de ejes cartesianos ortogonales, y que se presenta una cuadrícula relacionada con las abscisas y ordenadas enteras. La consigna hace referencia a

una función pero no presenta su expresión analítica. Estos aspectos fueron tenidos en cuenta para la elección de esta actividad, ya que implica que el estudiante interactúe directamente con la gráfica, aunque queda abierta la posibilidad de que intente encontrar alguna expresión analítica que se corresponda con la gráfica dada. La zona marcada con verde es el espacio donde los estudiantes deben ingresar la respuesta antes de enviarla para recibir la devolución de PAM. En la Figura 4, debajo, se puede observar las casillas para ingresar a pista y consultar asociados a esta actividad, así como una solución.

### 3.3.2. La pista

La *pista* (Figura 5) de la actividad que llamamos Gráficas en PAM indica: Un punto de  $(x;y)$  pertenece a la gráfica de una función  $v$  si  $y=v(x)$ .

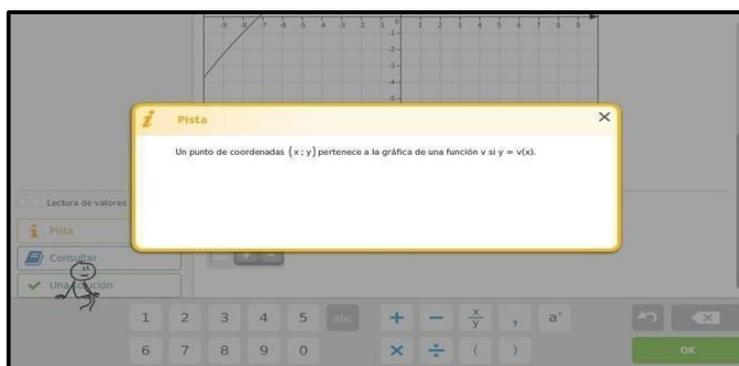


Figura 5. La pista

Nota. Fuente, captura de pantalla PAM (2019)

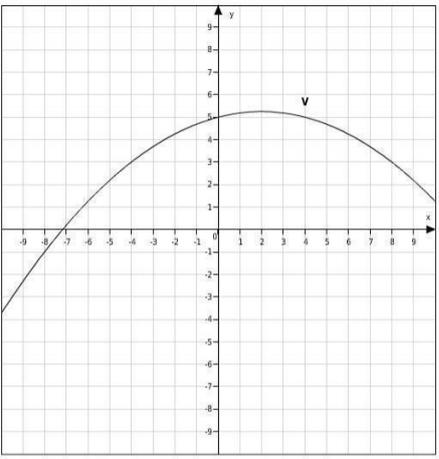
Como se puede observar no brinda información directa sobre lo solicitado en la actividad, no da un ejemplo en el contexto gráfico, ni muestra la representación de un punto en una gráfica y la relación de éste con sus coordenadas. Tampoco está dada en lenguaje coloquial, como la mayoría de las *pistas* en PAM, sino en lenguaje matemático-formal. En esta investigación nos propusimos analizar el significado que los estudiantes asignen a la información dada en la pista y si genera nuevas formas y funcionamientos de la gráfica, en caso de que ingresaran a ella.

### 3.3.3. Devolución frente a una respuesta no correcta<sup>2</sup>

En el caso que los estudiantes no ingresen la respuesta esperada por la plataforma, respuesta "incorrecta según PAM", la devolución instantánea que les brinda se presenta en la Figura 6.

<sup>2</sup> No correcta según PAM.

Encuentra todos los valores de 'x' tales que los puntos de coordenadas (x; 3) pertenezcan al gráfico de la función v.



No es correcto. Pero puedes intentarlo una vez más.

Pista

Consulta

Una solución

Agrega campos de ingreso si fuera necesario:

Hay al menos una respuesta correcta más.

Los posibles valores de 'x' son:

8

1 2 3 4 5 abc + - x/y , a^

6 7 8 9 0 × ÷ ( )

Enviar

OK

**Figura 6. Devolución de PAM**  
**Nota: Fuente, captura de pantalla PAM (2019)**

Para el análisis ingresamos solo uno de los números que dan solución a la actividad, la PAM en la devolución indica que el valor ingresado es correcto pero que no está completa la respuesta. Ya sea que la respuesta ingresada sea “parcialmente correcta” o “incorrecta” según la plataforma ahora el estudiante solo tiene una opción más para dar una nueva respuesta. En caso de ingresar un número distinto al esperado por la PAM la devolución indica: “la respuesta no es correcta, inténtalo nuevamente”.

### 3.3.4. Solución brindada por PAM

En este artículo, como ya se indicó, no se presenta el “consultar” ni su análisis, ya que ningún equipo ingresó a él. Pero la solución (Figura 7) que brinda PAM está relacionada con el contenido del consultar y brinda muestras de la estrategia que La plataforma propone para la solución de esta actividad.

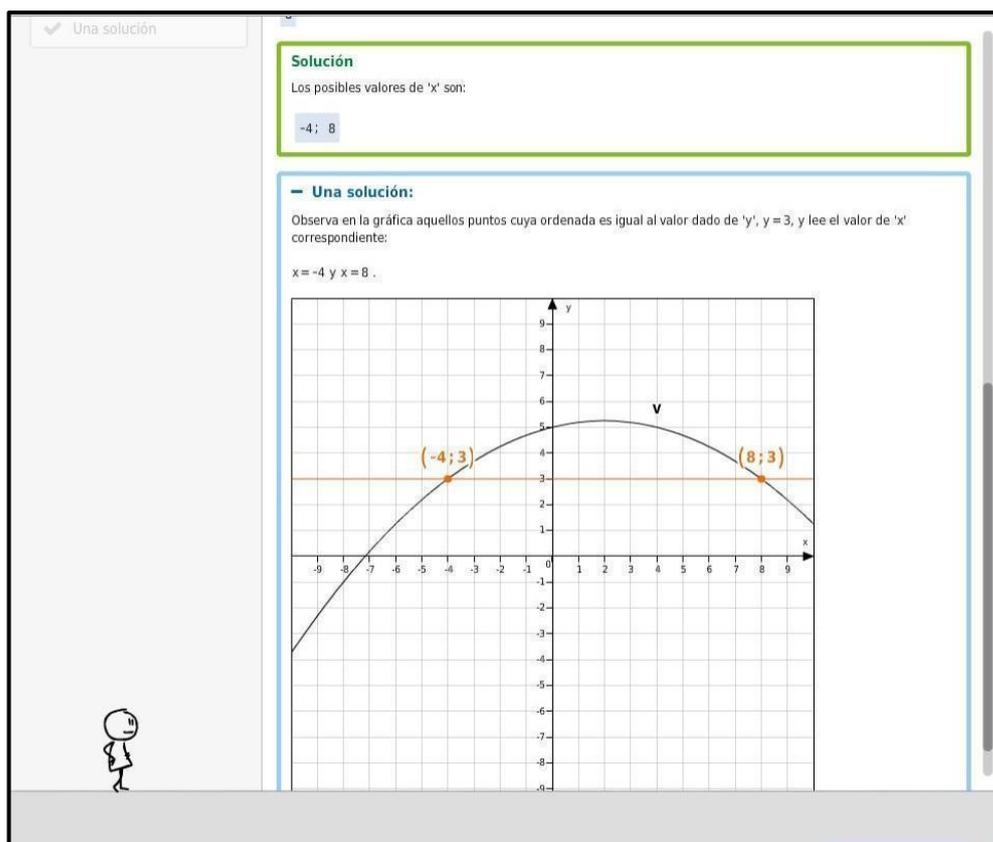


Figura 7. Solución PAM

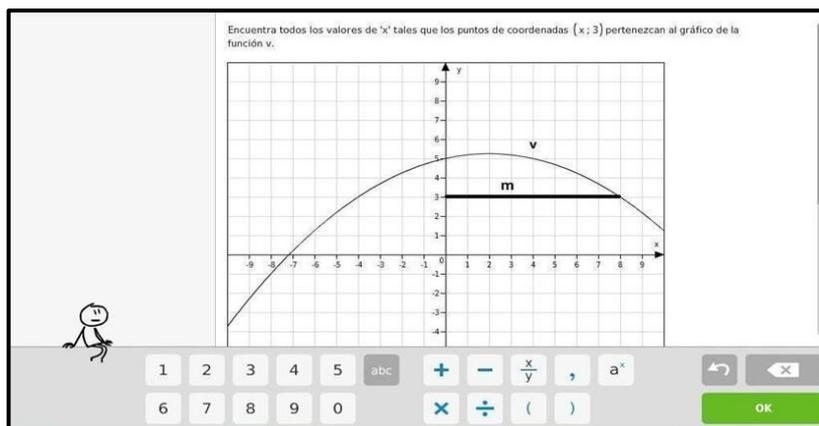
Nota: Fuente, captura de pantalla PAM (2019)

La estrategia que presenta PAM, para dar respuesta a la actividad, la considero dentro del uso de la gráfica *distribución de puntos* (Cordero et al., 2010) que tiene asociado, en este caso, el funcionamiento “determinar de los puntos de ordenada 3 los que pertenecen a la gráfica para hallar su abscisa” y las formas: considerar el conjunto de puntos de ordenada 3 (recta  $y=3$ ), intersectar la recta con la gráfica, proyectar los puntos de intersección sobre el eje de las abscisas.

### 3.4. Algunos resultados de la investigación

Presento en este apartado algunos resultados de uno de los tres equipos que participaron en esta investigación. Corresponde a estudiantes de primer año de Educación Media Básica, nivel en el cual no se ha abordado formalmente el concepto de función. Para el análisis de las producciones y la presentación de los resultados se determinan “momentos” teóricos. Estos están dados por algún cambio significativo en el uso de la gráfica que los estudiantes están poniendo en juego.

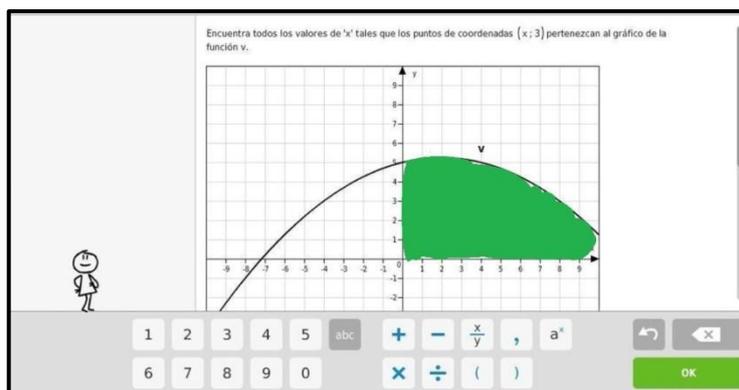
En el Momento 1 consideraron que los puntos de ordenada 3 de la gráfica son los que están debajo de ella en el cuadrante I (con ordenada 3 o con ordenada “próxima” a 3). Los estudiantes tocan en la pantalla, como se muestra en la Figura 8, pero esto no queda registrado en PAM, dado que en esta actividad la respuesta implica ingresar números en la zona determinada para ello y no acepta “marcar en la pantalla”.



**Figura 8. Segmento en cuadrante I**

**Nota: Fuente, Testa (2020, p. 111)**

Las formas de la gráfica que surgen en este momento son considerar el semieje de las abscisas positivas, el  $(0;3)$  marcado, puntos debajo de la curva con abscisas *próximas* a 3, y luego de abscisa 3, lo que les funciona para determinar puntos de ordenada 3 con abscisa positiva debajo de la curva, lo que significan como *pertenecer a la gráfica*. Está implícito que consideran que los puntos que pertenecen a la gráfica son los de la Zona A (Figura 9), determinada superiormente por la curva, inferiormente por el eje de las abscisas, a la derecha por la ventana de la actividad y a la izquierda por el eje de las ordenadas; están considerando solo el primer cuadrante.



**Figura 9. Zona A**

**Nota: Captura de Pantalla PAM modificado (2019)**

El uso de la gráfica que observé en este momento no lo encontré reportado en la revisión bibliográfica realizada, y le llamé *envoltura*. Asocié el uso de la gráfica envoltura al de figuras planas. Dado que estos estudiantes son de primer año de Educación Media Básica, y en Educación Primaria han trabajado con figuras en el plano, en general convexas (círculo, cuadriláteros, triángulos, entre otros), esta podría ser la razón que les lleva a considerar que los puntos “debajo de la curva”, en particular los de la Zona A, son los que pertenecen a la gráfica. El uso de la gráfica envoltura que ponen en juego los estudiantes en este momento presenta similitudes a las reportadas por Suárez y Cordero (2010), en relación con la Figuración de las Cualidades de Oresme. Aquí se establecen relaciones entre figuras planas y situaciones de variación. Los autores mencionan, por ejemplo, el uso del rectángulo para representar una situación donde la intensidad de la cualidad no varía. La

determinación de esta nueva categoría de usos de la gráfica es uno de los hallazgos más importantes del estudio de Testa (2020).

El contorno de estas figuras geométricas guarda parecido con las curvas que actualmente en sistemas de ejes coordenados representan funciones analíticas. Hay una estrecha relación entre la Figuración de las Cualidades y una etapa histórica del desarrollo del concepto matemático de función. (Suárez y Cordero, 2010, p. 323)

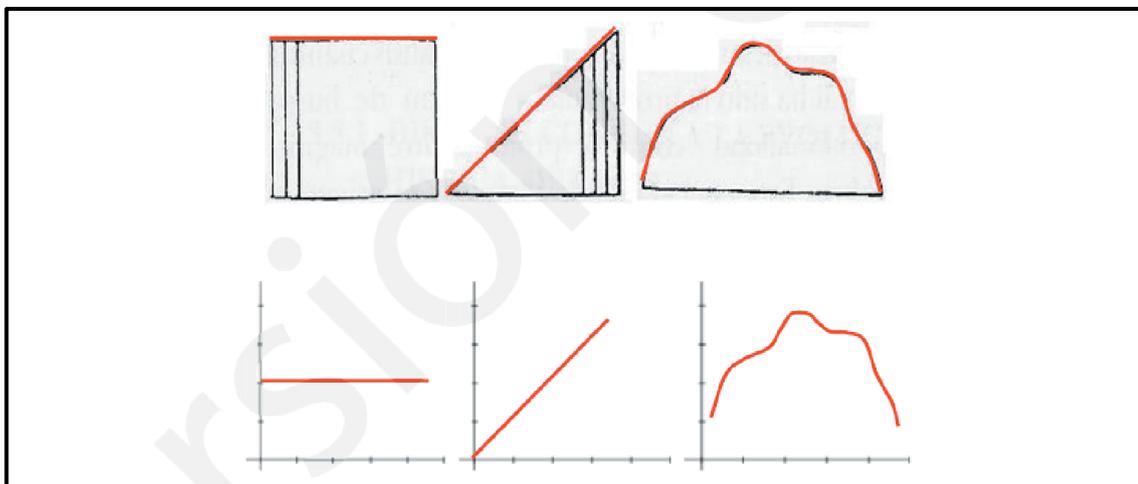


Figura 10. La gráfica antecede a la función (Cordero et. al., 2010, p. 323)

En el Momento 2 los estudiantes consideraron que los puntos de la gráfica de la función son los que “están en la curva”<sup>3</sup> y en el cuadrante I. Esto les lleva a ingresar como respuesta el 8 y la PAM le brinda la devolución ya presentada en la Figura 6. Esto da muestras de que los estudiantes *resignificaron la gráfica* ya que pasan de considerar que sus puntos son los de la Zona A a que son los de la curva en el cuadrante I.

En este momento los estudiantes del equipo presentan evidencias de *evolución en el uso de la gráfica* pasando del *uso envoltura* al *distribución de puntos*. El funcionamiento de la gráfica que ponen en juego los estudiantes es determinar el valor de  $x$  (positivo) que verifica que  $(x;3)$  pertenece a la gráfica y las formas de la gráfica son considerar el  $(0;3)$  y el semieje positivo de las abscisas, intersectar la línea horizontal (de la cuadrícula) a la que pertenece  $(0;3)$  con la gráfica (en el cuadrante I), proyectar el punto de intersección sobre el eje de las abscisas; los estudiantes presentan muestras de ello tocando en la pantalla como se muestra en la Figura 11.

<sup>3</sup> En palabras de los estudiantes.

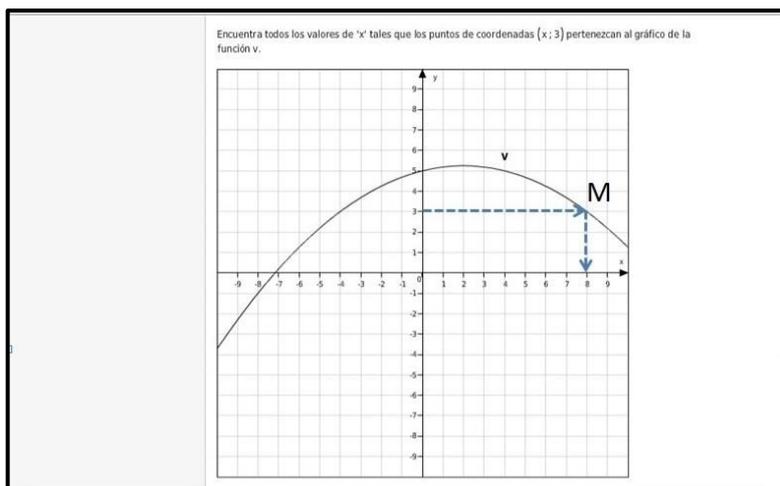


Figura 11. Pre imagen de 3

Nota: Captura de Pantalla PAM modificado (2019)

En el Momento 3 se mantiene el uso de la gráfica distribución de puntos asociado a nuevas formas y funcionamientos de ésta. En este momento la gráfica les funciona para determinar, considerando “la altura”, que 8 verifica que  $(x;3)$  pertenece a la gráfica. Expresan que “8 tiene altura 3”, por lo cual es la solución al problema. Las formas de la gráfica que ponen en juego en este momento son: determinar el 8 en el eje de las abscisas, intersectar la línea vertical (de la cuadrícula) a la que pertenece  $(8;0)$  con la gráfica, determinar el punto M (Figura 12) y proyectarlo sobre el eje de las ordenadas. Esta estrategia, sumada a la del momento anterior, les lleva a ingresar como respuesta 8, y la PAM les brinda la devolución presentada en la Figura 6.

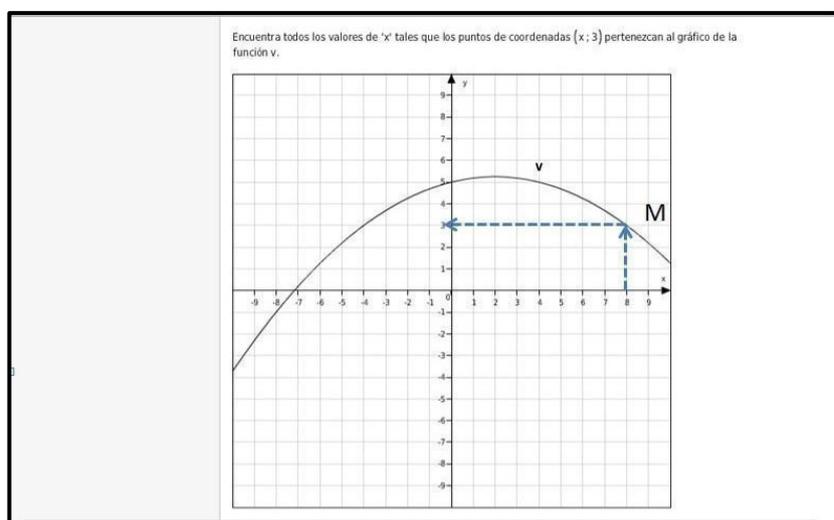


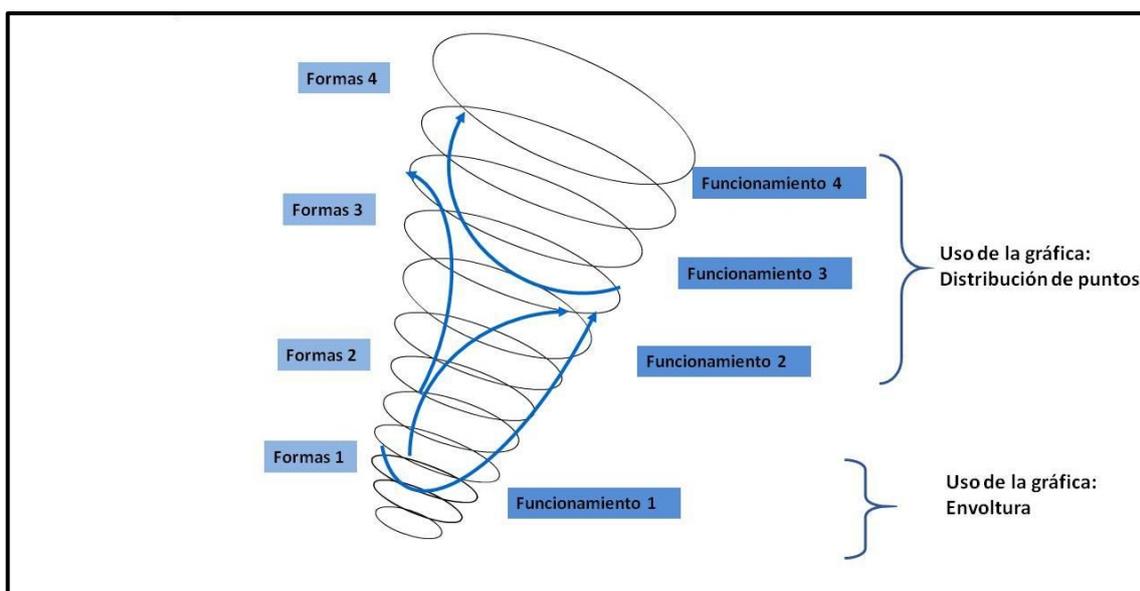
Figura 12. Imagen de 8

Nota: Captura de Pantalla PAM modificado (2019)

En el último momento, Momento 4, los estudiantes mantienen la estrategia de determinar “la altura de puntos” (en particular de los enteros). Se mantiene el uso de la gráfica *distribución de puntos*. El cual tiene asociado el funcionamiento de determinar qué otros valores de  $x$  verifican que  $(x;3)$  pertenece a la gráfica; y las formas: determinar enteros representados en el eje de las abscisas, considerar la línea vertical (de la cuadrícula) a la que pertenecen, considerar  $(0;3)$  y la línea horizontal (de la cuadrícula) a la que pertenece, luego intersectar las dos líneas de

la cuadrícula antes mencionadas y observar si ese punto pertenece o no a la gráfica. Esta estrategia les permite que algunos enteros que no cumplen la condición requerida y que el -4, además de 8, la cumple.

La Figura 13 representa el *desarrollo de los usos de la gráfica* que han realizado los estudiantes de este equipo, lo que indica la *resignificación de la gráfica* que estos estudiantes han realizado al buscar dar respuesta a la actividad *Gráficas en PAM*. También se muestra la evolución de usos de la gráfica de la cual han dado muestras estos estudiantes, al pasar del uso de la gráfica (envoltura) a otro (distribución de puntos). En la Tabla 2 se presentan los *funcionamientos y formas de la gráfica*, que ponen en juego los estudiantes en los distintos momentos, los cuales determinan distintos usos de ella.



**Figura 13. Desarrollo del uso de la gráfica. Resignificación de la gráfica**  
 Nota: Idea de espiral tomada de Suárez (2014, p. 98)

Uso de la gráfica	Funcionamientos	Formas
Envoltura	Determinar los puntos de ordenada 3 con abscisa positiva que están debajo de la curva.	Considerar el (0,3). Considerar el semieje positivo de las abscisas. Considerar la concavidad negativa de la gráfica y su trazo continuo. Tocar puntos de ordenada próxima a 3 y abscisa positiva que están debajo de la curva. Tocar puntos de ordenada 3 y abscisa positiva que están debajo de la curva.
		Considerar la línea horizontal de la cuadrícula a la que pertenece (0;3).
Distribución de puntos	Determinar el valor de x (positivo) que verifica que (x;3) pertenece a la gráfica	Considerar el (0,3) y el semieje positivo de las abscisas. Intersectar la línea la línea horizontal (de la cuadrícula) a la que pertenece (0;3) con la gráfica (en el cuadrante I), M. Proyectar M sobre el eje de las abscisas. Tocar en la pantalla dando muestras de la puesta en juego de las formas antes detalladas.
	Determinar si 8 verifica que (x;3)	Considerar el 8 del eje de las abscisas y la línea

	pertenzca a la gráfica	<p>vertical (de la cuadrícula a la que pertenece (0,8)).</p> <p>Intersectar la línea vertical; de la cuadrícula a la que pertenece (0,8); con la gráfica (M).</p> <p>Proyectar M sobre el eje de las ordenadas.</p> <p>Tocar en la pantalla dando muestras de la puesta en juego de las formas detalladas.</p>
	Determinar valores del eje de las abscisas que verifiquen que $(x;3)$ pertenezca a la gráfica	<p>Considerar distintos enteros del eje de las abscisas y la línea vertical (de la cuadrícula) a la que pertenecen.</p> <p>Considerar <math>(0;3)</math> y la línea horizontal (de la cuadrícula) a la que pertenece.</p> <p>Intersectar las dos líneas antes mencionadas y observar si dicho punto pertenece o no a la gráfica.</p> <p>Tocar en la pantalla dando muestras de la puesta en juego de las formas detalladas.</p>

Tabla 2. Evolución del uso de la gráfica

#### 4. Conclusión

La presente investigación aportó al marco teórico elementos para la categorización de usos de la gráfica, al detectar un uso no reportado en la bibliografía consultada, al que llamé *envoltura*. Así como formas y funcionamientos específicos de la gráfica asociados al uso distribución de puntos. Se presentaron muestras de que, eligiendo adecuadamente una actividad de PAM, se puede desarrollar el uso de la gráfica y su resignificación.

Dada la situación sanitaria por Covid-19 a nivel mundial, el pasaje que se hizo de la enseñanza presencial a la virtual, y la relevancia que pasaron a tener plataformas como PAM, considero que los resultados acá presentados pueden ser valiosos para los docentes a la hora de planificar sus clases. Los elementos que dieron fuerza a este estudio surgen de la interacción de los estudiantes con la plataforma, con la devolución que les brindó, y las interacciones entre ellos, al exteriorizar sus creencias, al argumentar. De acá la importancia, para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, de que los docentes generemos ambientes (virtuales o no) propicios para el desarrollo del pensamiento matemático; promoviendo la argumentación de las respuestas, la confrontación de las ideas, la creación de hipótesis, el desarrollo del conocimiento en uso.

#### 4. Referencias bibliográficas

Arias, E., Rieble-Aubourg, S., Álvarez, H., Rivera, M., Viteri, A., López, A., Pérez, M., Vásquez, M. Bergamaschi, A., Ortiz, M., Gerrero, M. y Viteri, A., Banco Interamericano de Desarrollo (2020). La educación en tiempos del coronavirus: Los sistemas educativos de América Latina y el Caribe ante COVID-19.

- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa S.A.
- Cordero, F., Cen, C., & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 187-214.
- Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10, (1), 7-38.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, An International Journal*, 75 (2), 213-234.
- Goos, M. (2005). A Sociocultural analysis of the development of pre-service and beginning teachers pedagogical identities as users of technology. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 35-59.
- Hoyle, C., & Lagrange, J. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. 17<sup>th</sup> ICMI Study*. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- Julie, C., Leung, A., Chi Thanh, N., Posadas, L., Sacristán, A., y Semenov, A. (2010). Some Regional Development in Access and Implementation of Digital Technologies and ICT. En C. Hoyle & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. 17<sup>th</sup> ICMI Study*. (pp. 361-384). <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- Montiel, G., & Buendía, G. (2011). *Propuesta metodológica para la investigación Socioepistemológica*. Memoria de la XIV Escuela de invierno en Matemática educativa. 443-454
- Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J.M. (2002). Development of Pre-Service Mathematics Teachers' Professional Knowledge and Identity in Working with Information and Communication Technology. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 93-115 <https://doi.org/10.1023/A:1015892804607>
- Sacristán, A., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., Tabach, M. Moreno, L. & Perrusquía, E. (2010). The Influence and Shapping of Digital Technologies on the Learning -and Learning Trajectories- of Mathematical Concepts. En C. Hoyle & J. Lagrange (Eds.) *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. 17<sup>th</sup> ICMI Study* (pp.179-226). <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- Sinclair, N., Arzarello, F., Trigueros, M., Lozano, M., Dagiene, V., Behrooz, E., & Jackiw, N. (2010). Implementing Digital Technologies at a National Scale. En C.

Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. 17<sup>th</sup> ICMI Study*. (pp.61-80). <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0>

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Ediciones Díaz de Santos.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 13 (4-II), 319-333.

Testa, Y. (2020). Usos de las gráficas cartesianas en el contexto de una Plataforma Adaptativa de Matemática. [Tesis de doctorado, 2020, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN, México, tesis no publicada]

Testa, Y., y Suárez, L. (2019). Los profesores uruguayos ante la implementación de la Plataforma Adaptativa de Matemática para aprender y enseñar matemática. *Educación em Revista*, 35 (78), 105-129. <https://revistas.ufpr.br/educar/issue/view/2622/showToc>

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *VEsC*, 3 (5), 73-94.

Yacir Testa. Profesora de Matemática y de Didáctica de Matemática. Doctora en Matemática Educativa. [prof.yacirtesta@gmail.com](mailto:prof.yacirtesta@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-8629-4895>, Uruguay.