REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-10

Rompecabezas geométrico e indagaciones didáctico-matemáticas

Uldarico Malaspina

Resumen	En este artículo se presenta y comenta problemas de geometría creados mediante indagaciones didáctico-matemáticas, generadas a partir de actividades con diez figuras planas (6 rectangulares y 4 triangulares) mostradas a profesores de primaria y de secundaria en servicio, en talleres virtuales sobre creación de problemas. En esta experiencia de indagación y aprendizaje en un ambiente lúdico, se llegó – apoyados por la intuición – a problemas aplicables en primaria y secundaria, que permiten relacionar áreas y perímetros de regiones poligonales, con aspectos básicos de la teoría de números, de sistemas de ecuaciones y de optimización matemática. **Palabras clave**: Indagación; creación de problemas; resolución de problemas; áreas y perímetros; puzles.
Abstract	This article presents and comments on geometry problems created through didactic-mathematical inquiries, generated from activities with ten plane figures (6 rectangular and 4 triangular) shown to primary and secondary school in service teachers, in virtual workshops on problem posing. In this experience of inquiry and learning in a playful environment, it was arrived - supported by intuition - to problems applicable in primary and secondary schools, which allow to relate areas and perimeters of polygonal regions, with basic aspects of number theory, systems of equations and mathematical optimization. **Keywords**: Inquiry; problem posing; problem solving; areas and perimeters; puzzles.
Resumo	Este artigo apresenta e comenta problemas de geometria criados por meio de inquéritos didático-matemáticos, gerados a partir de atividades com dez figuras planas (6 retangulares e 4 triangulares) apresentadas a professores do ensino fundamental e médio em serviço, em oficinas virtuais de criação de problemas. Nesta experiência de investigação e aprendizagem em ambiente lúdico, chegou-se - apoiado na intuição - a problemas aplicáveis ao ensino básico e secundário, que permitem relacionar áreas e perímetros de regiões poligonais, com aspectos básicos da teoria dos números, de sistemas de equações e otimização matemática. **Palavras-chave:** Inquérito; criação de problemas; resolução de problemas; áreas e perímetros; quebra-cabeças.

1. Problema

¿Cuál es la región cuadrada de mayor área que se puede formar uniendo por sus lados algunas de las figuras que se muestran en la Figura 1, sin superposiciones ni vacíos? (Tomar como unidad de área la región cuadrada más pequeña del papel cuadriculado sobre el cual se han trazado las figuras)

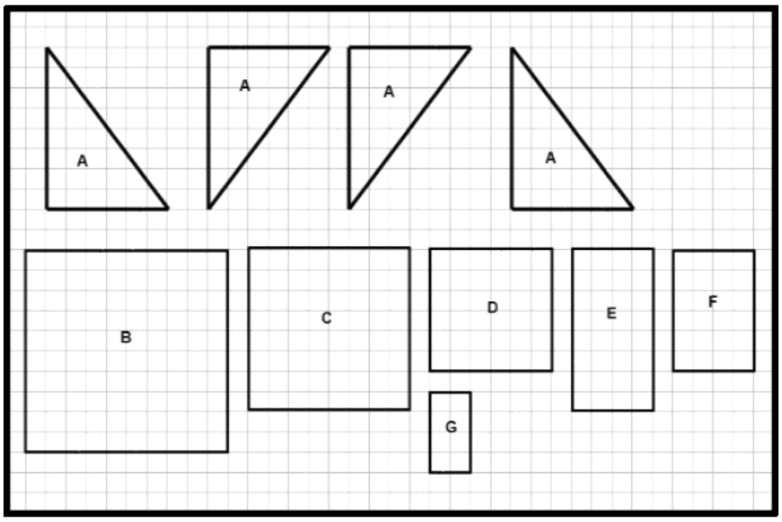

Figura 1. Material enviado a cada participante del taller

Cabe aclarar que este problema no es el punto de partida en la experiencia didáctica que explicaremos a continuación. Este problema, como algunos otros, surgió haciendo indagaciones didáctico-matemáticas sobre un problema propuesto en un grupo de trabajo.

2. La experiencia didáctica

Fue una experiencia didáctica desarrollada en forma virtual en el 2020, con docentes en servicio: Un taller con 60 profesores de primaria de diversos distritos de Lima; otro con 40 profesores de primaria de la región Amazonas; y un tercero con 53 profesores de educación secundaria de Lima, en el marco de talleres de creación de problemas de matemáticas, poniendo énfasis en la indagación, como parte de los programas de formación continua en matemáticas y ciencias, que ofrece la Academia Nacional de Ciencias del Perú al profesorado de educación básica[1].

El propósito fundamental fue brindar a los profesores en servicio experiencias de aprendizaje o profundización de conocimientos matemáticos, en un ambiente lúdico, indagando básicamente sobre áreas y perímetros de regiones planas: creando actividades, formulando preguntas y creando problemas de geometría, usando figuras especialmente diseñadas sobre papel cuadriculado. Veremos cómo resultaron problemas de geometría que se relacionan con la descomposición de un número en sus factores primos, con la identificación de números cuadrados perfectos, con un sistema de ecuaciones no lineal en dos variables y con la búsqueda de una configuración óptima.

[1] Me acompañaron en esta experiencia, integrando el equipo docente, la profesora Maritza León y los profesores Carlos Torres, Enrique Piñeyro y Max Ponce.

Se siguió una secuencia muy similar a la seguida con estudiantes de primaria, en un taller presencial, expuesta detalladamente en el número anterior de UNIÓN (Malaspina, 2021a); es decir, a todos los docentes participantes se les envió con anticipación un archivo con los triángulos y rectángulos que se muestran en la Figura 1 (notar que entre los rectángulos hay tres cuadrados) y se les pidió que, a partir de tal situación – trabajando colaborativamente en el taller, grupos de a lo más 5 participantes – desarrollen indagaciones didáctico-matemáticas creando actividades, preguntas y problemas, para estudiantes de un grado de la educación básica que ellos escojan. Tales actividades, preguntas y problemas deberían estar relacionados con áreas y perímetros de regiones poligonales. Más aún, los problemas creados tenían que ser resueltos y luego identificar sus cuatro elementos fundamentales (información, requerimiento, contexto y entorno matemático). Todo esto fue realizado por todos los grupos, expuesto por algunos de ellos en la reunión plenaria y enriquecido con los aportes e indagaciones, tanto de los participantes como de los monitores integrantes del equipo docente.

Sugiero al lector, imprimir, recortar y pegar las figuras en cartón u otro material que facilite su manipulación, para que siga experimentalmente las diversas indagaciones y trate de resolver los problemas propuestos. En el anexo se presenta una hoja para este propósito. Tomando como unidad u la longitud de los lados de los cuadrados más pequeños del papel cuadriculado, los triángulos tienen catetos de longitudes $6u$ y $8u$; el cuadrado B tiene lados de longitud $10u$; el cuadrado C, lados de longitud $8u$; el cuadrado D, lados de longitud $6u$; el rectángulo E es de $4u$ por $8u$; el rectángulo F de $4u$ por $6\,u$; y el rectángulo G de $2u$ por $4u$.

Algunas de las actividades propuestas por algunos grupos de docentes participantes, a partir del material recibido (Figura 1), fueron:

a) Averigua si hay figuras que tienen la misma área

b) Averigua si hay figuras que tienen el mismo perímetro

c) Averigua si hay un rectángulo que tiene la misma área que un triángulo

d) Recorta las figuras dadas y arma una figura como, por ejemplo: un robot, un tren, un barquito, etc.

Algunas de las preguntas propuestas por algunos grupos de participantes, a partir del material recibido y teniendo en cuenta las actividades propuestas, fueron:

i) ¿Qué figuras podríamos unir para formar otra que tenga el mismo perímetro que la figura C?

ii) ¿Cuál de las figuras dadas tiene mayor área?

iii) ¿Cuál de las figuras armadas tiene mayor área?

iv) ¿Cómo hallar el perímetro de las figuras de forma triangular?

v) ¿Cómo hallar el perímetro de las figuras armadas uniendo las figuras recortadas?

vi) ¿Cuál de las figuras armadas tiene mayor perímetro?

3. Problemas y más indagaciones

A continuación, mostraré algunos de los problemas creados en los grupos. Ciertamente, la idea en la secuencia didáctica es que – en el marco de indagaciones didáctico-matemáticas a partir de una situación dada – las actividades y preguntas creadas sirvan de base para la creación de uno o más problemas. El Grupo U1, en uno de los talleres con profesores de primaria, propuso la actividad d) y la pregunta v) y, a partir de ellas, propuso el siguiente problema:

Problema 1.

Hallar el área y el perímetro de la figura mostrada

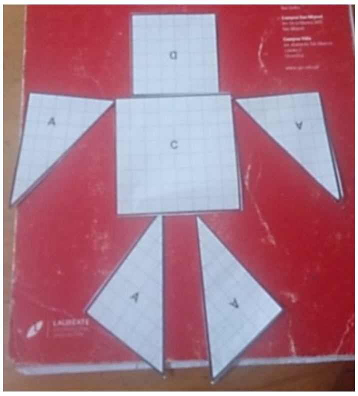

Figura 2. "Robot" creado por el Grupo U1, con algunas de las piezas recortadas

El área se obtuvo directamente, sumando las áreas de las figuras que conforman el "robot": 4 veces el área de A + el área de C + el área de D (lo cual da 196u^2). Obtener el perímetro conllevó la dificultad de hallar la longitud de la hipotenusa de los triángulos rectángulos A. Por cierto, esto no ocurrió con los profesores que recordaban el teorema de Pitágoras. Algunos profesores de primaria dedujeron que tal longitud es 10 unidades, observando que la hipotenusa coincidía completamente con la longitud de los lados del cuadrado B, que es precisamente de 10 unidades. Fue una ocasión para comentar sobre la confiabilidad en las mediciones empíricas y para destacar la importancia del teorema de Pitágoras. Así, se obtuvo que el perímetro del "robot" es de 140 unidades. El lector puede verificar que una manera de obtener tal perímetro es: 4 veces el perímetro de A + el perímetro de C + el semiperímetro de D.

Cuando el problema fue expuesto en la reunión plenaria, surgieron algunas indagaciones en torno a él:

- *¿Cómo cambian el área y el perímetro del "robot" si este desplaza su cabeza hacia la izquierda o hacia la derecha, sin sobrepasar su cuerpo?*
- *¿Cómo cambian el área y el perímetro del "robot" si este pega sus brazos a su cuerpo?*

Ante las preguntas sobre el área, en ambos casos, la respuesta fue inmediata: el área del "robot" no se altera, porque se mantienen las áreas de las figuras que lo componen. La respuesta sobre el perímetro no fue muy inmediata, pero también se concluyó que en el primer caso el perímetro del "robot" se mantiene.

Ante la pregunta sobre el perímetro del "robot" cuando pega sus brazos al cuerpo se concluyó que el perímetro sí se altera, pues en tal caso, se entiende que resultan 8 unidades en común entre el cuerpo y un brazo y otras 8 unidades en común entre el cuerpo y el otro brazo. Estas 16 unidades en común ya no forman parte del perímetro total del “robot”, por lo cual hay que descontarlas del perímetro del “robot” en la presentación inicial (Figura 2).

Problema 2

> *Con todas las piezas recortadas de la Figura 1, formar un rectángulo, sin vacíos ni superposiciones.*
>
> *Calcular el perímetro y el área del rectángulo formado.*

Este problema fue creado por el Grupo 8, en el taller con profesores de secundaria, y como solución de la primera parte presentó la que muestro en la Figura 3.

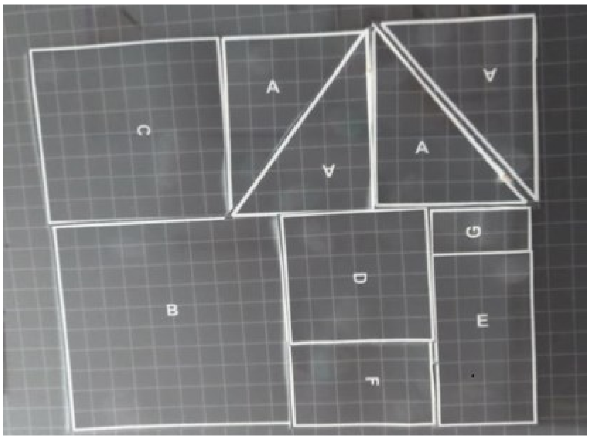

Figura 3. Rectángulo formado con todas las piezas

La novedad principal de este problema está en la construcción del rectángulo, usando todas las figuras que conforman el material básico presentado en la Figura 1, constituyendo así un rompecabezas (o puzle) interesante. El perímetro y el área se obtuvo sin dificultad: 76u y 360u^2, respectivamente.

A partir de este problema, algunas indagaciones didáctico-matemáticas nos llevan a nuevos problemas; por ejemplo:

- *Si uniendo todas las piezas se pudiera formar otro rectángulo, sin vacíos ni superposiciones, ¿tendría área diferente?*
- *¿Se puede construir otro rectángulo de perímetro mayor, uniendo todas las piezas, sin vacíos ni superposiciones?*

La primera pregunta conlleva el reforzamiento de la conservación de la cantidad – en este caso de áreas, al modificar la posición de las piezas – que es fundamental en la educación primaria. Notar que juega un papel muy importante la palabra *todas*. Resulta interesante que, para responder a la pregunta, no es necesario saber si realmente se puede construir otro rectángulo con todas las piezas.

Responder la segunda pregunta lleva a indagaciones matemáticas interesantes, más allá de la búsqueda, por ensayo y error, de la construcción de otro rectángulo usando todas las piezas. Por ejemplo:

- Si se usan todas las piezas, el área del rectángulo que se construya, siempre tendría que ser 360u^2; en consecuencia, si a y b fueran las longitudes de la altura y de la base de tal rectángulo, tendría que ocurrir que ab = 360 y su perímetro sería $2a + 2b$. Llamando *P* a tal perímetro, tenemos un sistema de ecuaciones que da algunas pistas para desarrollar indagaciones matemáticas orientadas a responder la pregunta.

- Sabiendo que ab = 360, también una pista de indagación matemática es explicitar los factores primos de 360; esto es: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ y con esta información se busca pares de números naturales a y b que multiplicados den 360. La suma de tales números correspondería al semiperímetro del rectángulo. Un par de tales números es 18 y 20, que da el semiperímetro 38, como se muestra en la Figura 2, pero la idea es examinar si existe otro par de números naturales cuyo producto sea 360 y cuya suma sea mayor que 38.
- Las longitudes de los lados de todas las piezas son números pares; en consecuencia, la base y la altura de cualquier rectángulo que se construya con ellas, tendrán longitudes pares; es decir, a y b deben ser números pares. Esto lleva a descartar el par 24 y 15, así como el par 8 y 45.

Problema 3

Formar un cuadrado uniendo el mayor número de las piezas dadas, sin vacíos ni superposiciones.

Hallar su área y su perímetro.

Este problema fue creado por el Grupo 2 de participantes en el taller con profesores de secundaria y presentó como solución a la primera parte, la que muestro en la Figura 4.

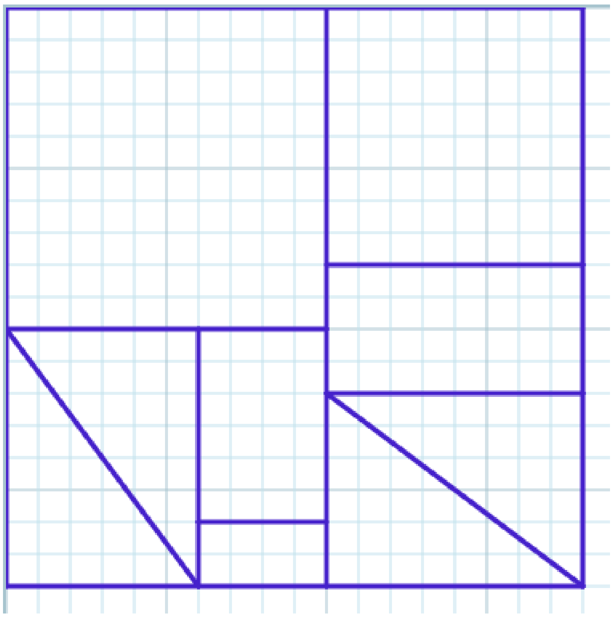

Figura 4. Cuadrado formado con 9 de las 10 piezas.

El área y el perímetro de este cuadrado se halló fácilmente, observando que sus lados tienen longitud 18u; Así: Área = 324u^2 y Perímetro = 72u.

Nuevamente, tenemos un puzle matemático, que motiva hacer algunas indagaciones didáctico-matemáticas; por ejemplo:

- *¿Cuál es el cuadrado de mayor área que se puede formar uniendo algunas de las figuras dadas, sin vacíos ni superposiciones?*
- *¿Se puede formar un cuadrado uniendo todas las piezas dadas, sin vacíos ni superposiciones?*

Responder estas preguntas, lleva a otras observaciones e indagaciones matemáticas interesantes; por ejemplo:

- El cuadrado mostrado ha sido construido con 9 de las 10 piezas. Si se usara la pieza que falta, el área del cuadrado sería $360u^2$ ¿Puede existir un cuadrado con lados de longitud entera, cuya área sea $360u^2$?
- ¿360 es un cuadrado perfecto?

Como 360 no es un cuadrado perfecto, no puede existir un cuadrado cuyos lados sean de longitud entera (más aún, número par, por lo que se vio en el problema anterior) y cuya área sea $360u^2$.

Como $324u^2$ es el área del cuadrado mostrado en la Figura 3 y $324 = 18^2$ es el número cuadrado más próximo a 360, menor que 360 (el siguiente es $361 = 19^2$), no es posible formar un cuadrado de área mayor que $324u^2$ con las piezas de la Figura 1.

Así, tenemos respondidas las preguntas y, en consecuencia, resuelto el problema con el que iniciamos este artículo.

4. Comentarios

Los análisis hechos al examinar los problemas propuestos, brindan elementos para nuevas indagaciones didáctico-matemáticas uniendo las piezas de la Figura 1, sin vacíos ni superposiciones. Por ejemplo,

- ¿Qué otros rectángulos se pueden construir con las piezas dadas?
- ¿Qué otros cuadrados se pueden construir con las piezas dadas?
- ¿Es posible construir triángulos uniendo algunas piezas?
- ¿Se puede formar un triángulo uniendo dos figuras triangulares a dos lados de uno de los cuadrados?
- ¿Se puede construir rectángulos S y T, tales que S tenga perímetro menor que T, pero área mayor que T?
- ¿Se puede utilizar las figuras para ilustrar el teorema de Pitágoras?

Ciertamente, responder estas preguntas y otras similares que puedan surgir, es resolver problemas haciendo interactuar la experimentación, la intuición y criterios matemáticos, todo lo cual, es sustancial en la formación científica de profesores y estudiantes.

Estamos llamando *indagación didáctico-matemática* de los docentes, a las preguntas con sentido matemático, motivadas por la búsqueda de formas de facilitar aprendizajes a los estudiantes, a partir de una situación, de un problema o de un concepto matemático. Esto conlleva proponer actividades y crear problemas que estimulen su curiosidad. Más aún, la resolución y refinamiento didáctico y matemático de los problemas creados. En muchos casos, las actividades, las preguntas y los problemas creados, convendrá organizarlos en secuencias didácticas que favorezcan los aprendizajes.

Podemos percibir la importancia de las indagaciones didáctico-matemáticas a partir de una situación dada – en este caso, el material repartido (Figura 1) – y de las indagaciones didáctico-matemáticas a partir de problemas – en este caso, los problemas 1, 2 y 3 – que son dos caminos básicos para crear problemas; en el primer caso por *elaboración* y en el segundo por *variación* (Malaspina, 2021b). Hemos visto que estas dos formas de crear problemas se potencian entre sí, en el sentido que, partiendo de una situación se crea uno o más problemas por elaboración y luego, a partir de estos, se crean nuevos problemas por variación.

Los talleres interactivos desarrollados, en forma presencial o virtual, siguiendo secuencias didácticas de creación de actividades, creación de preguntas y creación de problemas, con estudiantes o con docentes (Malaspina, 2021a, 2021c), así como otras experiencias didácticas que se exponen en diversas publicaciones sobre indagación y creación de problemas, recientes – como la de Divrik et al. (2020) – y de hace algunas décadas – como la de Yerushalmy et al. (1990), me llevan a afirmar, parafraseando a Cruz-Guzmán et al. (2017), que aun con sus dificultades y limitaciones, el aprendizaje por indagación es uno de los enfoques didácticos más idóneos para aprender matemáticas haciendo matemáticas.

Considero fundamental que, desde temprana edad, en contextos lúdicos, los niños sean estimulados en su curiosidad innata y se les brinde oportunidades para observar, experimentar, formular preguntas, desarrollar su intuición matemática, hacer conjeturas y crear problemas. Ciertamente, para esto es fundamental que los docentes, como parte de su formación inicial y continua, vivan experiencias de indagaciones didáctico-matemáticas. En números anteriores de UNIÓN he expuesto experiencias interesantes con docentes, en las que, indagando, se llega a temas matemáticos no previstos, inclusive de nivel universitario (Malaspina, 2017, 2019, 2021c).

El uso de rompecabezas adecuados es un recurso particularmente motivador y contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas (Gorev et al., 2018). Es un desafío para investigadores y educadores, crear rompecabezas adecuados que motiven indagaciones didáctico-matemáticas para brindar a nuestros estudiantes ocasiones de aprendizaje reflexivo, en contextos lúdicos y con emociones positivas.

Bibliografía

Cruz-Guzmán, M., García-Carmona, A., & Criado, A. M., (2017) Aprendiendo sobre los cambios de estado en educación infantil mediante secuencias de pregunta–predicción– comprobación experimental. *Enseñanza de las Ciencias, 35*.3, pp. 175-193

Divrik, R., Pilten, P., & Tas, A. M. (2020). Effect of Inquiry-Based Learning Method Supported by Metacognitive Strategies on Fourth-Grade Students' Problem-Solving and Problem-Posing Skills: A Mixed Methods Research. *International Electronic Journal of Elementary Education, 13*(2), 287-308.

Gorev, P. M., Telegina, N. V., Karavanova, L. Z., & Feshina, S. S. (2018). Puzzles as a didactic tool for development of mathematical abilities of junior schoolchildren in basic and additional mathematical education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(10), em1602.

Malaspina, U. (2017). Operaciones con números y operaciones con funciones afines. Gráficos e indagaciones. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 50*, pp. 167-174

Malaspina, U. (2019). Rectángulos: Perímetros, áreas y curvas de nivel. Una experiencia de indagación. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, No. 57*, pp. 153-161

Malaspina, U. (2021a). Creación de problemas sobre triángulos, jugando con varillas *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 62*, pp. 1 – 8.

Malaspina, U. (2021b). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 10*(1), 1-17.

Malaspina, U. (2021c). Triángulos en un rectángulo. Situación, actividades, preguntas y problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 61*, 1 - 9

Yerushalmy, M., Chazan, D., & Gordon, M. (1990). Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional Science, 19*(3), 219-245.

Autor: Malaspina Jurado, Uldarico

Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Expositor en foros internacionales de Educación Matemática. Autor y coautor de libros y artículos de Matemática y Educación Matemática. Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Palmas Magisteriales - Grado Amauta

Anexo

Hoja con el material de trabajo.
(Sugiero imprimir, recortar las figuras y pegarlas en cartón u otro material que facilite su manipulación.)