

## GeoGebra como recurso didáctico en la enseñanza de las Distribuciones Probabilísticas. Una experiencia de aula.

Fredy Rivadeneira Loor

<p><b>Resumen</b></p>	<p>En diferentes centros de Educación Superior, la Estadística es considerada asignatura básica en las carreras que se ofertan; pero en su enseñanza se presentan ciertas dificultades ya que en la etapa de Educación Secundaria no se cumple con los contenidos propuestos en el currículo, sobre todo en lo que a Estadística Inferencial se refiere. El presente documento tiene como fin describir la experiencia de aula utilizando los recursos que posee GeoGebra para enseñar Distribuciones Probabilísticas, en que se utilizó una metodología participativa con un enfoque teórico-práctico. <b>Palabras clave:</b> GeoGebra, Distribuciones probabilísticas, Didáctica, Estadística</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>In different Higher Education centers, Statistics is considered a basic subject in the careers that are offered; but in its teaching certain difficulties arise since in the Secondary Education stage the contents proposed in the curriculum are not fulfilled, especially with regard to Inferential Statistics. The purpose of this document is to describe the classroom experience using the resources that GeoGebra has to teach Probabilistic Distributions, in which a participatory methodology with a theoretical-practical approach was used. <b>Keywords:</b> GeoGebra, Probabilistic distributions, Didactics, Statistics</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Em diferentes Centros de Ensino Superior, a Estatística é considerada uma disciplina básica nas carreiras que são oferecidas; mas no seu ensino surgem algumas dificuldades, visto que na fase do Ensino Secundário os conteúdos propostos no currículo não são cumpridos, especialmente no que se refere à Estatística Inferencial. O objetivo deste documento é descrever a experiência em sala de aula utilizando os recursos que o GeoGebra possui para o ensino de Distribuições Probabilísticas, nas quais foi utilizada uma metodologia participativa com abordagem teórico-prática. <b>Palavras-chave:</b> GeoGebra, distribuições probabilísticas, didática, estatística</p>

## 1. Introducción

La Estadística, ciencia que se encarga de la obtención, presentación y descripción de los datos muestrales (Johnson & Kubby, 2008), es en la actualidad la ciencia que todo profesional debe conocer y utilizar en su diario accionar; pero a pesar de su importancia, no ha sido posible cubrir en su totalidad los contenidos que se establecen en los diferentes niveles de formación académica, sobre todo los temas relacionados con las Distribuciones Probabilísticas Discretas. Esto último se convierte en un problema a solucionar, lo cual se torna complicado porque los profesores se enfrentan con diferentes obstáculos al momento de impartir los mencionados contenidos.

De las tantas dificultades que se presentan en la práctica docente, una de ellas es no tener a la mano recursos para ser utilizados en la enseñanza, sobre todo aquellos que tienen relación con la tecnología, como, por ejemplo, un software.

Como es de conocimiento general, en el campo de la Estadística Inferencial se aborda el tema Distribuciones Probabilísticas tanto Discretas como Continuas, entre ellas, Binomial, Hipergeométrica, Poisson y Normal. La enseñanza de estos modelos probabilísticos se desarrolla siguiendo un esquema: teoría – resolución de problemas, mismo que se lo realiza tradicional (el Docente resuelve ejercicios tipo y el Estudiantado resuelve talleres). Es decir que el proceso de abstracción queda muchas veces a un lado, y con ello, difícilmente se llega a aprendizajes significativos.

Duval (1999), manifiesta que el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. Según esta afirmación, lograr verdaderos aprendizajes implica tener en el proceso la mayor cantidad de registros, y uno que falta en la enseñanza de las Distribuciones Probabilísticas es el registro gráfico; situación que se soluciona incorporando GeoGebra como recurso didáctico.

Y es que GeoGebra no es solo geometría dinámica (Geo) y álgebra (Gebra), es mucho más, ya que ofrece herramientas y opciones que permitirán trabajar cualquier contenido matemático, en diferentes niveles educativos, tal como sostiene Carrillo (2010).

Con GeoGebra se pueden activar diferentes registros de representación, lo que permitirá que las Distribuciones Probabilísticas sean aprendidas tanto en su modelo y algoritmo como en su gráfica.

En el presente documento se describirá la experiencia de aula en la que se utilizó las diferentes herramientas que posee GeoGebra, un software libre de Matemática Dinámica que Markus Hohenwarter y todo un equipo de programadores vienen desarrollando desde 2002 cuando salió la primera versión, y que están estrechamente relacionadas con las Distribuciones Probabilísticas, que bien pueden convertirse en alternativas a ser utilizadas como recurso pedagógico en el aula de clase y en el aprendizaje autónomo, sobre todo en situaciones, como las vividas a causa de la COVID19, en la que se tuvo que migrar de procesos educativos presenciales a virtuales.

De acuerdo con Guachún et al (2020), en tiempos de pandemia donde prevalece la educación virtual el utilizar el Software GeoGebra como recurso didáctico resulta muy útil, debido a su fácil obtención, instalación y manejo, a más de generar un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes, permitiendo alcanzar los conocimientos mínimos y despertando la motivación por aprender, pues les permite aprender mejor y más rápidamente. Y es que GeoGebra se convirtió en un importante aliado de los profesores en los tiempos que se viven a causa de la pandemia.

## 2. Descripción de la experiencia

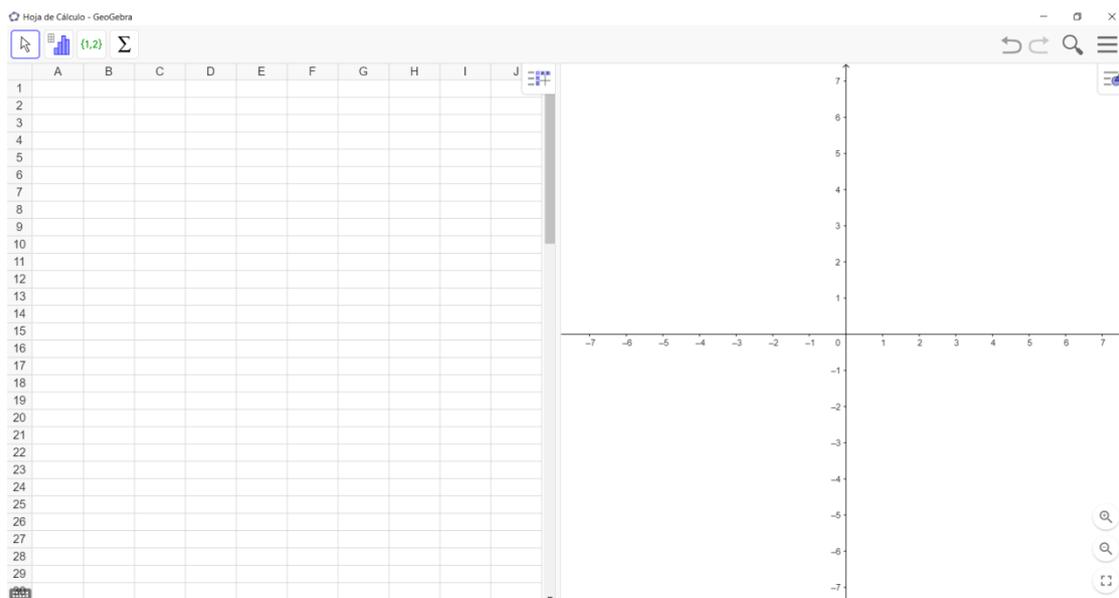
Estadística Aplicada a la Investigación Educativa es una de las asignaturas del Programa de maestría en Pedagogía de las Ciencias Experimentales mención Matemática y Física de la Universidad Técnica de Manabí, Ecuador. En los contenidos mínimos se aborda lo relacionado a las Distribuciones Probabilísticas y en el diagnóstico cualitativo realizado se pudo determinar que no todos los maestrantes dominaban dichos temas, por lo que se decidió optar por incorporar GeoGebra como recurso para mediar su enseñanza en el ambiente virtual en el que se desarrolló la asignatura, debido a que la pandemia de la COVID19 no permitió que sea presencial como originalmente está considerado el tratamiento de la mencionada asignatura.

La experiencia de aula consta de tres etapas o momentos: primero se revisan las herramientas y vistas que posee GeoGebra y que están relacionadas con la Estadística. En segundo lugar, se resuelven problemas tipo relacionados con las Distribuciones Probabilísticas Discretas, y finalmente problemas de aplicación de Distribución Normal; en estas dos últimas instancias utilizando GeoGebra.

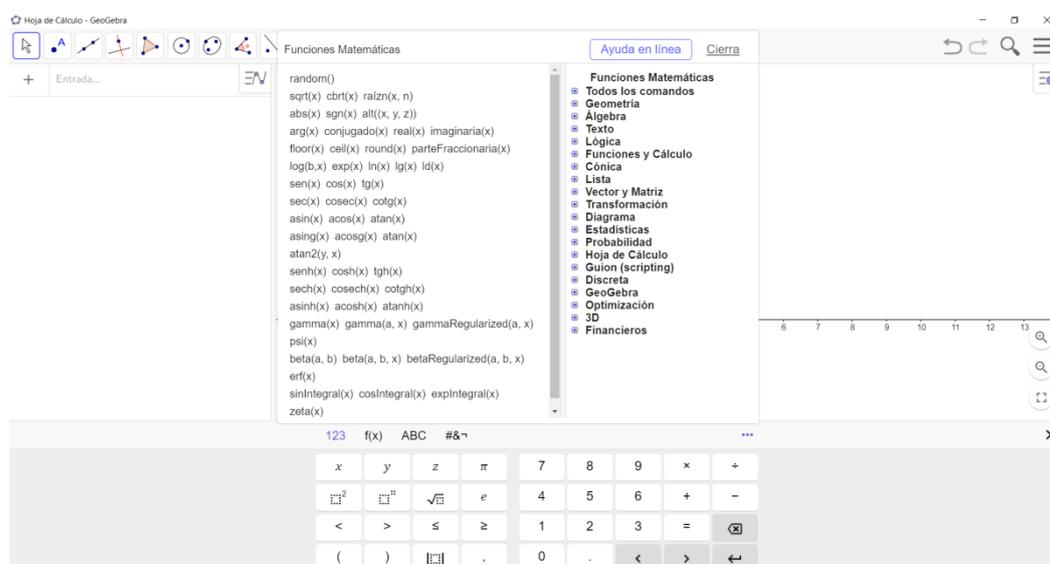
### 2.1. Herramientas de GeoGebra para enseñar Estadística

En la versión 6.0 de GeoGebra se puede encontrar una amplia gama de herramientas que pueden ser utilizadas en la enseñanza de la Estadística, así tenemos:

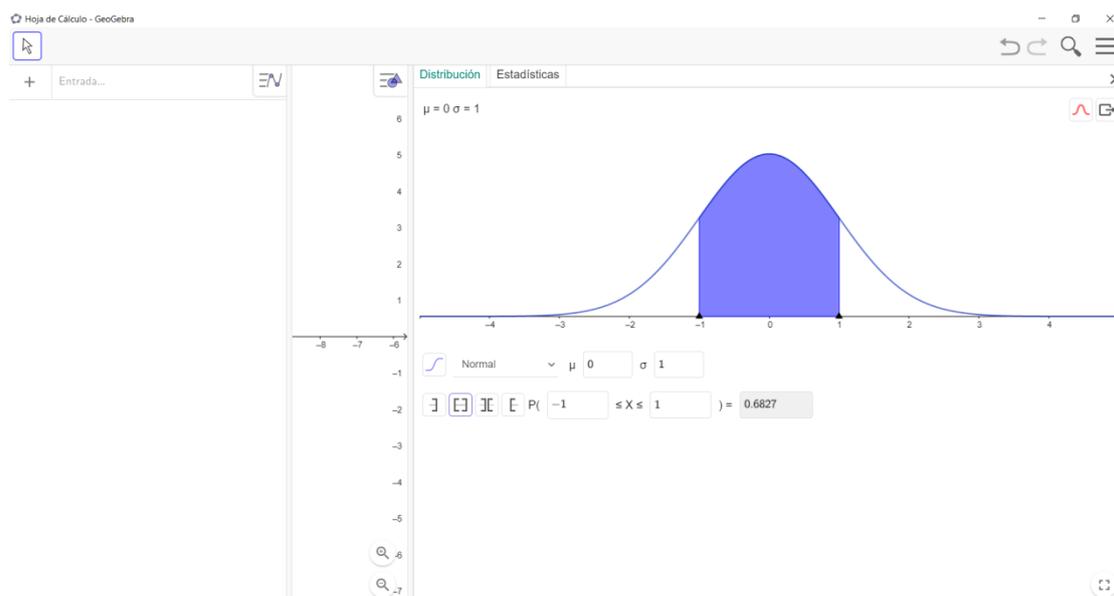
La hoja de cálculo, vista que sirve para ingresar datos numéricos que pueden ser procesados con la ayuda de tres herramientas que se encuentran en el extremo superior izquierdo de la hoja de cálculo.



Lista de comandos, donde se encuentran grupos de funciones matemáticas que facilitan el análisis y procesamiento de datos estadísticos.



Cálculos de probabilidad, interfaz que permite visualizar la gráfica de los diferentes modelos de distribución de probabilidad, así como también realizar test de validación de hipótesis y cálculo de intervalos de confianza.



## 2.2. Resolución de problemas relacionados con Distribuciones Probabilísticas Discretas utilizando GeoGebra.

En esta etapa de la experiencia se configuró la interfaz de GeoGebra de tal forma que la vista gráfica sirva como pizarra digital donde se presenta el enunciado del problema y se realiza la resolución algorítmica del mismo, y teniendo activa la vista de cálculo de probabilidades se compara y visualiza lo calculado.

A continuación, se detalla el proceso de resolución de un problema de Distribución Probabilística Binomial poniendo en práctica lo descrito en el párrafo anterior:

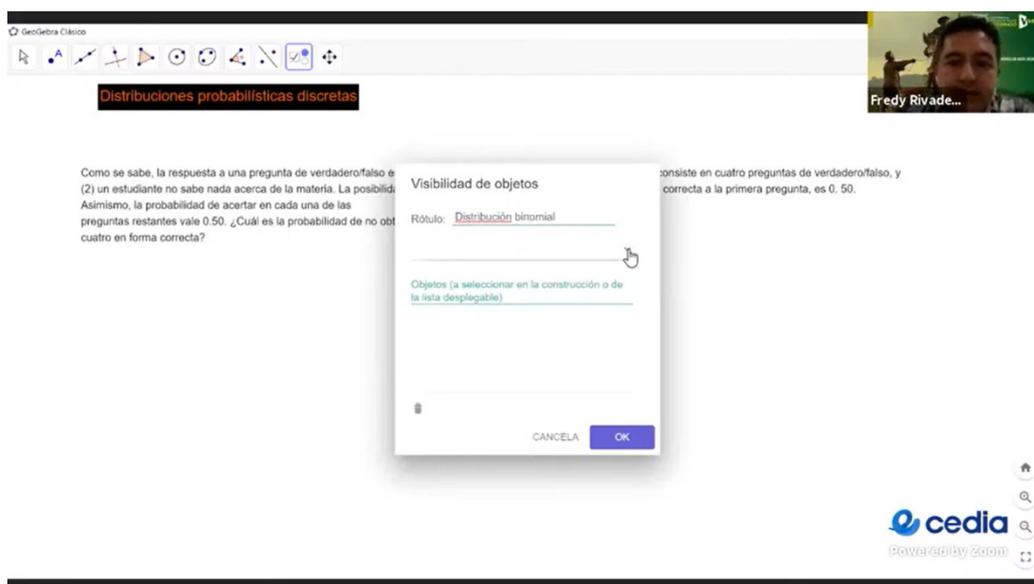
### 2.2.1. Preliminares.

La sesión inicia con un conversatorio en el que los participantes exponen sus fortalezas y debilidades en cuanto al tema de las distribuciones probabilísticas, este es el momento del desequilibrio cognitivo ya que con el aporte del docente se establecen puntos de partida para continuar con el proceso de enseñanza y aprendizaje.



### 2.2.2. Configuración de la interfaz de GeoGebra como una pizarra.

Una vez abierto GeoGebra, se procede a configurar la vista gráfica a modo de pizarra digital, también se ingresa el texto del problema a resolver y se lo liga con una casilla de control para ocultarlo cuando sea necesario.



### 2.2.3. Resolución del problema propuesto aplicando el modelo binomial.

Con la herramienta lápiz se realiza el proceso de resolución del problema planteado, demostrando una de las ventajas que posee GeoGebra.

Distribuciones probabilísticas discretas

Distribución binomial

Como se sabe, la respuesta a una pregunta de verdadero/falso es correcta o incorrecta. Considere que: (1) un examen consiste en cuatro preguntas de verdadero/falso, y (2) un estudiante no sabe nada acerca de la materia. La posibilidad (probabilidad) de que el alumno adivine la respuesta correcta a la primera pregunta, es 0.50. Asimismo, la probabilidad de acertar en cada una de las preguntas restantes vale 0.50. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener exactamente ninguna de las cuatro en forma correcta?

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$= C_0^4 \cdot (0.5)^0 (0.5)^4$$

$$= \frac{1}{16}$$

cedia  
Powered by Zoom

### 2.2.4. Utilizando la vista cálculos de probabilidad de GeoGebra.

Una vez realizada la resolución del problema, se procede a habilitar la vista de GeoGebra que permite interactuar con los diferentes modelos de distribución probabilística, escogiendo en este caso en Binomial. Se pudo visualizar las diferentes situaciones que se podrían dar y con ello lograr un aprendizaje mucho más consolidado.

Distribuciones probabilísticas discretas

Distribución binomial

Como se sabe, la respuesta a una pregunta de verdadero/falso es correcta o incorrecta. C (2) un estudiante no sabe nada acerca de la materia. La posibilidad (probabilidad) de que Asimismo, la probabilidad de acertar en cada una de las preguntas restantes vale 0.50. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener exactamente ninguna cuatro en forma correcta?

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$= C_0^4 \cdot (0.5)^0 (0.5)^4$$

$$= \frac{1}{16}$$

Distribución Estadísticas

$\mu = 2 \sigma = 1$

0	0.0625
1	0.25
2	0.375
3	0.25
4	0.0625

Binomial n 4 p 0.5

$P(0 \leq X \leq 0) = 0.0625$

cedia  
Powered by Zoom

### 2.2.5. Plenaria.

En esta etapa del proceso se vertieron importantes opiniones respecto al nuevo aprendizaje (para unos) y a la actualización del mismo (para otros). También

los maestrantes opinaron que, a pesar de que han utilizado GeoGebra, no conocían las herramientas estadísticas y probabilísticas que posee, y a las que se les puede sacar mucho provecho.



### 2.3. Resolución de problemas relacionados con Distribución Probabilística Normal utilizando GeoGebra.

Siguiendo el proceso metodológico descrito en 2.2., se procede a efectuar la resolución de un problema de aplicación de Distribución Normal.

#### 2.3.1. GeoGebra como pizarra digital.

Tal como se describió en 2.2.1., el primer paso es aprovechar la interfaz de GeoGebra como una pizarra digital e incluso como una herramienta para organizar presentaciones, teniendo todo en un mismo lugar, por así decirlo.

Se tiene un programa de capacitación diseñado para mejorar el desempeño docente de los profesores de Matemáticas del Ecuador. Debido a que el programa es auto-administrado, los profesores requieren un número diferente de horas para terminarlo. Un estudio de los participantes anteriores indica que el tiempo medio para completar el programa es de 500 horas, y que esta variable aleatoria, normalmente distribuida, tiene una desviación estándar de 100 horas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un profesor elegido al azar requiera más de 500 horas para completar el programa?

$P(x > 500) = 0.5$

b)  $P(300 \leq x \leq 450)$

c)  $P(600 \leq x \leq 800)$

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$z = \frac{700 - 500}{100} = 2$

$\mu = 500$   
 $\sigma = 100$

Diagrama de una distribución normal con  $\mu = 500$  y  $\sigma = 100$ . El área a la derecha de  $x = 500$  está sombreada.

### 2.3.2. Insertando tabla de áreas bajo la curva normal en formato imagen.

Además de la posibilidad de tener una pizarra digital, GeoGebra permite insertar imágenes, en este caso la tabla de distribución normal y con ello se tiene la posibilidad de visualizar en un mismo sitio los resultados del cálculo del estadístico z y el valor que este representa en la mencionada tabla.

The screenshot shows the GeoGebra interface with a table of normal distribution areas on the left and a problem statement on the right. Handwritten notes and calculations are overlaid on the right side.

**Table: Áreas bajo la curva normal**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7020	0.7055	0.7090	0.7125	0.7160	0.7195	0.7230
0.6	0.7265	0.7300	0.7334	0.7368	0.7402	0.7436	0.7470	0.7504	0.7538	0.7571
0.7	0.7606	0.7640	0.7674	0.7708	0.7742	0.7776	0.7810	0.7844	0.7877	0.7910
0.8	0.7944	0.7977	0.8011	0.8044	0.8078	0.8111	0.8144	0.8177	0.8210	0.8242
0.9	0.8274	0.8307	0.8340	0.8372	0.8405	0.8438	0.8470	0.8502	0.8534	0.8566
1.0	0.8599	0.8631	0.8663	0.8694	0.8726	0.8758	0.8789	0.8820	0.8851	0.8882
1.1	0.8913	0.8944	0.8975	0.9006	0.9036	0.9066	0.9096	0.9126	0.9156	0.9186
1.2	0.9216	0.9246	0.9276	0.9306	0.9336	0.9366	0.9396	0.9426	0.9456	0.9486
1.3	0.9516	0.9546	0.9576	0.9606	0.9636	0.9666	0.9696	0.9726	0.9756	0.9786
1.4	0.9816	0.9846	0.9876	0.9906	0.9936	0.9966	0.9996	1.0000	1.0000	1.0000

**Handwritten notes and calculations:**

- a.  $P(x > 500) = 0.5$
- $z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{500 - 500}{100} = 0$
- b)  $P(300 \leq x \leq 450)$
- c)  $P(600 \leq x \leq 800)$

### 2.3.3. Vista cálculos de probabilidad.

Realizados los cálculos, se procede a habilitar la vista cálculos de probabilidad seleccionando el modelo de distribución normal, consiguiendo así tener más de un registro de representación en la resolución de un problema de aplicación.

The screenshot shows the GeoGebra interface with the normal distribution calculator active. Handwritten notes and a small sketch are overlaid on the left side.

**Handwritten notes:**

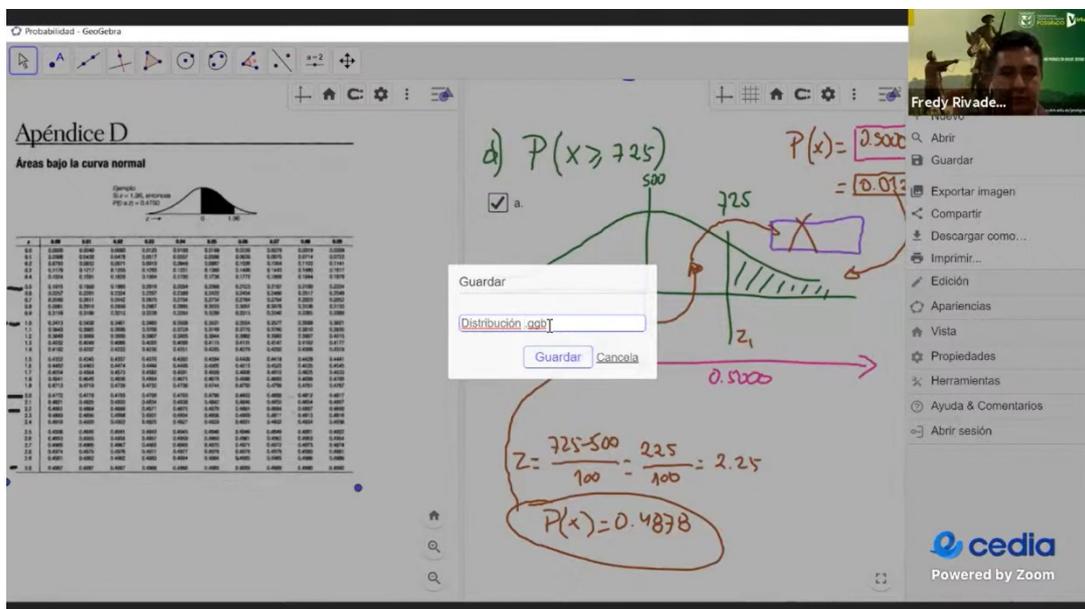
- b)  $P(300 \leq x \leq 450)$
- c)  $P(600 \leq x \leq 800)$
- z = 300, 500
- z = 450, 500

**Calculator settings:**

- Distribución: Normal
- Estadísticas:  $\mu = 500$ ,  $\sigma = 100$
- Intervalo:  $P(300 \leq x \leq 450) = 0.2858$

### 2.3.4. Guardando lo realizado.

Como un adicional, se procede a mostrar cómo realizar el guardado del trabajo en las diferentes alternativas que brinda GeoGebra.



### 2.3.4. Plenaria.

La plenaria estuvo cargada de importantes reflexiones relacionadas con la responsabilidad que se tiene como docente al momento de transmitir conocimientos, ya que al utilizar un adecuado recurso, el aprendizaje será significativo.



### 3. Consideraciones finales.

La pandemia de la COVID19 nos viene dejando muchos aprendizajes, sobre todo en el contexto educativo, donde se tuvo la necesidad de migrar de un entorno presencial a uno virtual, la experiencia de aula descrita en el presente trabajo se convierte en un aporte en el que se mostró cómo convertir a GeoGebra, no solo en un recurso didáctico, sino en un entorno virtual de aprendizaje aprovechando las herramientas que posee.

En este trabajo se evidenció que entre más registros de representación se puedan utilizar en la enseñanza de la Matemática, en este caso las Distribuciones Probabilísticas, se obtendrán aprendizajes significativos.

Los resultados cualitativos que se obtuvieron de las opiniones, preguntas y sugerencias realizadas en las plenarias dejan notar que incorporar GeoGebra en la enseñanza de las Distribuciones Probabilísticas fue una decisión acertada por cuanto las y los maestrantes quedaron satisfechos y sobre todo motivados para utilizar GeoGebra en su quehacer profesional.

### 4. Referencias bibliográficas

Carrillo, A. (2010). GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. España: UNIÓN.

[http://www.cvrecursosdidacticos.com/web/repository/1304332210\\_GeoGebra\\_Rey\\_Union\\_023\\_020.pdf](http://www.cvrecursosdidacticos.com/web/repository/1304332210_GeoGebra_Rey_Union_023_020.pdf)

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Guachún, F., Rojas, M. & Rojas, I. (2020). El software GeoGebra como recurso para la enseñanza de la Integral definida: Una propuesta didáctica. Ecuador: UNAE.

<http://repositorio.unae.edu.ec/bitstream/123456789/1882/1/182-192.pdf>

Johnson, R. & Kubly, P. (2015). *Estadística Elemental: lo esencial*. México: Cengage Learning Editores

Fredy Rivadeneira Loor

[fredy.rivadeneira@utm.edu.ec](mailto:fredy.rivadeneira@utm.edu.ec), [fredyrivadeneiraloor@gmail.com](mailto:fredyrivadeneiraloor@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-3106-2170>

Ecuador

Instituto GeoGebra de la Universidad Técnica de Manabí