



## Claudia Lisete Oliveira Groenwald

### Breve Reseña



Nació en 1959 en la ciudad de Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil. Realizó la licenciatura en Matemáticas en la Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), realizó una especialización en Educación Matemática en la Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), doctorado em Ciências de la Educación por la Pontificia de Salamanca, España, y postdoctorado en Tecnologías educativas por la Universidad de Tenerife en España.

É secretária do Comitê Interamericano de Educação Matemática (CIAEM), é editora da revista Acta Scientiae da Universidade Luterana Es secretaria del Comité Internacional de Educación Matemática (CIAEM), y editora de la revista acta Scientiae de la Universidad Luterana de Brasil. Fue directora de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática de Rio Grande do Sul (SBEM-RS).

Desde 1989 viene trabajando como profesora de matemáticas y didáctica de las matemáticas para la formación de profesores. Actualmente es titular de la Universidad Luterana de Brasil (ULBRA) y trabaja en la formación de profesores y en el Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemática Profesional (PPGECIM). Coordina un grupo de investigación sobre Estudos Curriculares em Educação Matemática (GECEM).

Imparte cursos de maestría e doctorado sobre dicho tema y ha dirigido disertaciones de maestría e tesis doctorales sobre educación matemática.



## Educación Matemática y Tecnologías: planificación de tareas de investigación centradas en el aprendizaje de los estudiantes

## Educação Matemática e Tecnologias – planejamento de tarefas investigativas focando na aprendizagem dos estudantes

Agostinho Iaquan Ryokiti Homa, Claudia Lisete Oliveira, Groenwald,

<p><b>Resumen</b></p>	<p>Se presentan los resultados de la investigación Educación Matemática y Tecnologías Digitales, del Grupo de Estudios Curriculares de Educación Matemática (GECEM). El problema es: ¿Cuáles son las posibilidades didácticas de las Tecnologías Digitales para la Educación Matemática? Presenta el papel del aprendizaje y su importancia para el desarrollo del alumno de forma integral, y un recorte de la importancia del desarrollo de tareas, consideradas de alta demanda cognitiva con dos ejemplos de tareas abiertas que fomentan la investigación permitiendo a los alumnos ser destacados en las clases online pero también interesantes en las presenciales.  <b>Palabras clave:</b> Educación Matemática. Aprendiendo. Tareas de investigación.</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>The results of the research Mathematics Education and Digital Technologies, from the Curricular Studies Group of Mathematics Education (GECEM), are presented. The problem is: What are the didactic possibilities of Digital Technologies for Mathematics Education? It presents the role of learning and its importance for the development of the student in an integral way, and an incutting of the importance of the development of tasks, considered of high cognitive demand with two examples of open tasks that encourage research allowing students to be prominent in online classes but also interesting in face-to-face classes.  <b>Keywords:</b> Mathematics Education. Learning. Research tasks.</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Apresenta-se os resultados da pesquisa Educação Matemática e Tecnologias Digitais, do Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM). O problema norteador é: Quais as possibilidades didáticas das Tecnologias Digitais para a Educação Matemática? Apresenta-se o papel da aprendizagem e sua importância para o desenvolvimento do aluno de maneira integral, e um recorte da importância do desenvolvimento de tarefas, consideradas de alta demanda cognitiva com dois exemplos de tarefas abertas que incentivam a investigação permitindo aos estudantes serem protagonistas nas aulas online, mas também interessantes em aulas presenciais.  <b>Palabras chave:</b> Educação Matemática. Aprendizagem. Tarefas de investigação.</p>

## 1. Introducción

La pandemia causada por el virus SARS-CoV-2 ha tenido un claro impacto en todos los sectores de la sociedad a nivel mundial. Iniciado en China en diciembre de 2019, el virus llegó a Brasil en marzo de 2020, trayendo una serie de consecuencias para la humanidad y, para los brasileños, a medida que se cambiaran las relaciones humanas, presentando nuevos desafíos y requiriendo nuevas formas de relación con los demás y con el medio ambiente, especialmente en el entorno educativo.

Las universidades y las escuelas de Educación Básica en Brasil comenzaron las clases en febrero de 2019, pero se paralizaron en marzo debido a pandemia. "Ante esta emergencia sanitaria, las redes educativas públicas y privadas brasileñas tomaron la decisión de suspender las clases presenciales entre el 11 y el 23 de marzo de 2020" (Tamayo; Silva, 2020, p. 29). Para los autores, la suspensión de clases fue una medida importante, tomada al inicio del aumento de comunidades infectadas por Covid-19 en Brasil, colaborando con el aislamiento social entendiendo que, la escuela es un espacio donde el contacto es inevitable.

En el contexto educativo, se han implicado diferentes medidas que abarcan la completa transformación de la docencia, marcadas por clases totalmente online, incluso con evaluaciones no presenciales. Al requerir que los docentes utilizaran herramientas digitales a las que no estaban acostumbrados o no conocían, surgió la necesidad de nuevas perspectivas para las actividades que se desarrollarían con los estudiantes.

Actualmente la mayor preocupación en Brasil es la consecuente expansión de las desigualdades, tanto sociales como educativas debido a la pandemia. Es de destacar que los profesionales de la educación, docentes e investigadores y estudiantes a la hora tuvieron que actuar en un contexto de excepcionalidad, buscando e investigando alternativas que comenzaron a adoptarse, con el objetivo de reducir el daño educativo y asegurar el año escolar, siguiendo las pautas establecidas (Groenwald, 2021).

Es indudable que el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) se ha incrementado durante la pandemia como herramientas para cubrir las nuevas necesidades tanto de docentes como de los propios estudiantes. Se entiende que el uso de las TIC en el proceso educativo debe ir siempre acompañado de un enfoque metodológico adecuado, aunque se ha detectado un preocupante desfase en el uso y aplicación de metodologías docentes en el aula (García-Peñalvo & Corell, 2020). Importante resaltar que de acuerdo con la Ley de Directrices y Bases de la Educación Nacional (Brasil, 1996), la Educación Nacional tiene como objetivo el pleno desarrollo del estudiante, su preparación para el ejercicio de la ciudadanía y su calificación para el trabajo. Así, la educación y la inserción en la sociedad digital implican una adaptación del aula a la realidad tecnológica, cuyo uso de la tecnología por parte de los docentes es una condición necesaria para esta adecuación.

Ante tales adaptaciones del sistema educativo para las clases en línea, y a través de instrucciones a menudo incompletas de los organismos públicos, debido a que no existen precedentes de situaciones similares, los docentes, de Educación Básica y Educación Superior, siguieron con sus actividades docentes de manera

remota, enfrentando muchas dificultades tanto estructurales como de adecuación de cómo desarrollar el conocimiento en línea. Ante este proceso educativo con clases online, las investigaciones del grupo GECEM se centraron en investigar el papel del aprendizaje en la formación de los alumnos y en el papel de las tareas que llevan a los alumnos a ser protagonistas de su aprendizaje y los profesores mediadores en el proceso.

El objetivo de este trabajo es presentar un recorte de los resultados obtenidos en las investigaciones sobre el aprendizaje y el desarrollo de tareas en estos tiempos de educación en línea. Se presenta la idea de aprendizaje y su importancia para el desarrollo del alumno de manera integral y que le habilita a tener habilidades para actuar en el mundo contemporáneo, también un extracto de la importancia del desarrollo de tareas, consideradas de alta demanda cognitiva y con el uso de tecnologías y, finalmente, colocamos dos ejemplos de tareas consideradas abiertas que incentivan la investigación y que llevan a los estudiantes a ser protagonistas en las clases de educación a distancia y que también resultan interesantes en la docencia presencial.

## 2. Aprendizaje de los estudiantes

En un sistema social global como el actual, caracterizado por la complejidad, la imprevisibilidad y la interdependencia, existen varios desafíos que los jóvenes deberán enfrentar (Sá & Paixão, 2015). Para los autores, los desafíos globales (crisis socioeconómica, problemas ambientales, conflictos sociales y económicos) requieren un enfoque reflexivo y holístico, destacando la necesidad de dotar a los individuos de habilidades (técnicas, personales y relacionales) que les permitan vivir en el mundo moderno.

Según el proyecto DeSeCo (OCDE, 2019), el desarrollo y mantenimiento del capital humano y social representan un factor importante para que las sociedades generen prosperidad, cohesión social y paz y, sobre todo, para gestionar los desafíos y tensiones de una sociedad cada vez más interdependiente, global, cambiante y conflictiva. Para la OCDE (2005), el capital humano no solo juega un papel importante en el desempeño económico, sino que también aporta beneficios individuales y sociales, con mejoras en la salud, el bienestar, la paternidad, además de un mayor compromiso social y político.

Las condiciones que impone la vida moderna, cuando estamos llamados a actuar en un mundo en constante cambio, cada vez más dependiente de las tecnologías y que, en todo momento, nos presenta nuevos retos, tanto individuales como colectivos, exigen que los individuos desarrollen autonomía, capacidad de resolución, situaciones problemáticas, tomar decisiones, actuar en beneficio de su entorno social.

En este contexto, la Educación, y en particular la Educación Matemática, tiene la responsabilidad de desarrollar un trabajo que permita a los estudiantes, desde temprana edad, actuar en entornos que contribuyan a su formación como ciudadanos activos en este mundo cada vez más exigente. En el corazón del marco de competencias clave está la capacidad de las personas para pensar por sí mismos, expresando madurez moral e intelectual y asumiendo la responsabilidad de su aprendizaje y acciones (OCDE, 2005).

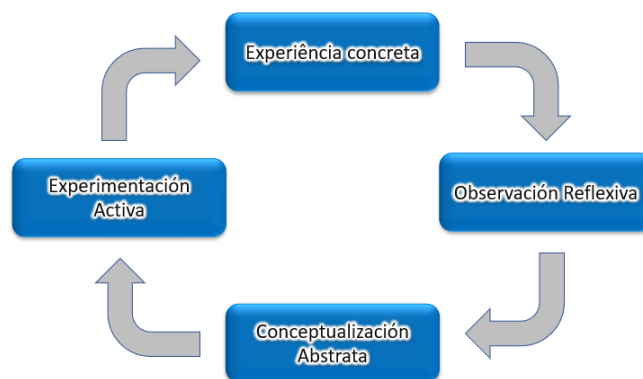
En este sentido, es importante discutir el aprendizaje para la formación del ciudadano que actuará en la sociedad en estos tiempos modernos. Según Illeris (2013) el aprendizaje es un tema complejo, que abarca un campo mucho más amplio de lo que tradicionalmente se entiende, como es la adquisición de conocimientos y habilidades. El aprendizaje para el autor incluye dimensiones emocionales, sociales y sociales.

Según Illeris (2007, p. 3):

El aprendizaje puede definirse de manera amplia, como cualquier proceso que, en los organismos vivos, conduzca a un cambio permanente en las capacidades y no se deba únicamente a la maduración biológica o al envejecimiento.

Para el autor todo aprendizaje conlleva la integración de dos procesos muy diferentes: un proceso externo de interacción entre el individuo y su entorno social, cultural o material, y un proceso psicológico interno de elaboración y adquisición.

Para Illeris (2013), toda aprendizaje implica tres dimensiones: contenido, incentivo y entorno. La dimensión del contenido se refiere a lo aprendido, como conocimientos y habilidades, así como opiniones, percepciones, significados, posturas, valores, formas Observación reflexiva de actuar, métodos, estrategias, etc., lo que lleva al individuo a construir significado y capacidad para hacer frente a los desafíos de la vida práctica. La dimensión del incentivo proporciona y dirige la energía mental al proceso de aprendizaje, involucrando sentimientos, emociones, motivación y volición, asegurando el equilibrio mental continuo del individuo desarrollando una sensibilidad personal. La dimensión de interacción proporciona los impulsos que inician el proceso de aprendizaje, a través de la percepción, transmisión, experiencia, imitación, actividad, participación, etc., formando la integración personal en la sociedad, construyendo así la sociabilidad del individuo.



**Figura 1 - Ciclo de aprendizaje de Kolb**  
Fuente: adaptado de Kolb (1984).

Según Kolb (1984, p. 38): "el aprendizaje es el proceso por el cual el conocimiento es creado por la transformación de la experiencia", donde la experiencia no es conocimiento, sino la base para la creación de conocimiento. El autor sugiere la representación del ciclo de aprendizaje (Figura 1) en una perspectiva holística e integradora sobre el aprendizaje que combina experiencia, percepción, cognición y comportamiento.



Kolb (2013) considera valiosas las experiencias concretas e inmediatas para crear sentido y validar el proceso de aprendizaje, así como la investigación-acción y la enseñanza de laboratorio, que se caracterizan por el proceso de retroalimentación, en el que "la información ofrecida por la retroalimentación es el punto de partida de un proceso continuo, que consiste en la acción orientada al objetivo y la evaluación de las consecuencias de esta acción" (Elkjaer, 2013, p.104).

Según Kolb (1984) el aprendizaje está vinculado a las capacidades mencionadas en el ciclo de aprendizaje de la Figura 1 y los estudiantes deben estar plenamente involucrados en nuevas experiencias, siendo capaces de reflexionar y observar experiencias desde diversas perspectivas, creando conceptos que integren sus observaciones en teorías que apoyan la toma de decisiones y la resolución de problemas.

Para Jarvis (2013), aprendemos con la experiencia cuando le atribuimos significado, y cuando aprendemos, cambiamos como persona. Para el autor no es necesario tener un significado para aprender con la experiencia, sino que la reflexión sobre las experiencias lleva a la resignificación, las emociones se transforman, las opiniones, actitudes y valores se ven afectados, influyendo en la toma de decisiones y la acción.

El aprendizaje es continuo (Figura 2) y por mucho que sigamos aprendiendo, seguimos siendo personas inacabadas y la posibilidad de más crecimiento, más experiencia, permanece (Jarvis, 2013). Para el autor "el ser y el devenir son entrelazados, y el aprendizaje humano es uno de los fenómenos que une a los dos, porque es fundamental para la propia vida" (Jarvis, 2013, p. 40-41) así, a través del aprendizaje, el conocimiento, las habilidades, las actitudes, las emociones, las creencias, los valores, los sentimientos y la identidad cambian y evolucionan.

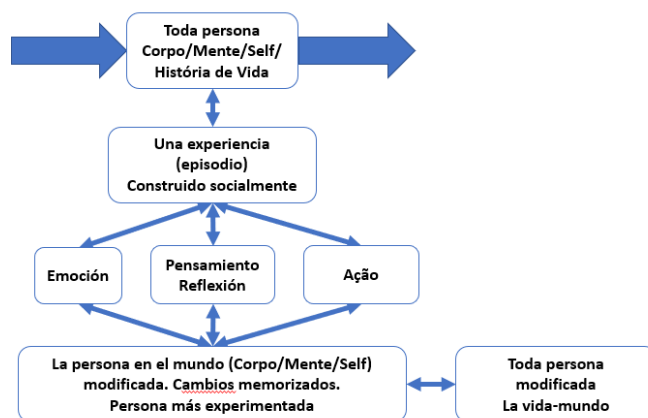


Figura 2 - La transformación de la persona mediante el aprendizaje Fuente: Jarvis (2013).

Las investigaciones del GECM sobre el aprendizaje, en este caso el aprendizaje matemático, conducen a una comprensión de la necesidad de actividades / tareas que hacen que los estudiantes se involucren, reflexionen, formulen hipótesis, saquen conclusiones y generalicen. Dando lugar a la planificación de tareas de investigación que permitan el desarrollo de estas capacidades.

### 3. Educación matemática mediante tareas de investigación

Penalva y Llinares (2011), Llinares, Buforn y Groenwald (2019), afirman la necesidad de que los docentes mantengan en cuenta los objetivos a alcanzar y cómo alcanzar dichos objetivos utilizando recursos, como tareas matemáticas, a la hora de planificar sus clases. Para estos autores, las tareas matemáticas son las propuestas que hacen los profesores para el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, son las proposiciones realizadas por el profesor con el objetivo de centrar la atención de los alumnos en lo que se pretende enseñar y definir qué actividad es un conjunto de tareas a desarrollar por los alumnos y los procedimientos son las formas de realizar las tareas.

Stein, Grover y Henningsen (1996, p. 460) definen una tarea como "una actividad en el aula cuyo objetivo es centrar la atención de los estudiantes en un tema en particular".

Las tareas matemáticas pueden variar desde un conjunto de ejercicios de rutina hasta un problema complejo y desafiante que centra la atención de los estudiantes en una idea matemática en particular (NCTM, 2015). Según NCTM (2015), la enseñanza efectiva utiliza las tareas como una forma de motivar el aprendizaje de los estudiantes y ayudarlos a construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.

Se entiende que es posible establecer un vínculo entre el aprendizaje y la gestión de tareas siempre que ellos, las tareas, hagan que el estudiante vaya por un camino claro hacia la comprensión de los contenidos matemáticos (Llinares, 2011; Llinares, Buforn y Groenwald, 2019; Damasco, Groenwald y Llinares, 2020). Solo las tareas no son suficientes para el aprendizaje, pero son factores que pueden contribuir al logro de los objetivos propuestos y al aprendizaje de los estudiantes. Para ello, los autores refuerzan que las tareas deben permitir a los estudiantes pensar en hacer matemáticas, superando la memorización y los procedimientos sueltos, sin conexión.

Para los autores uno de los elementos importantes para el aprendizaje de las matemáticas son los problemas, actividades y ejercicios que el profesor propone a sus alumnos (tarea). Penalva y Llinares (2011) consideran importante la tarea matemática, porque es la que determina qué pueden aprender los alumnos y cuál es el camino a ello, en este sentido las tareas, según los autores, son los instrumentos que el profesor utiliza para que los alumnos aprendan matemáticas, por lo que existe un vínculo entre el aprendizaje y la gestión o gestión de tareas en el aula. No son solo las tareas las que permiten a los alumnos aprender, sino qué harán con él y, como lo dirige el profesor, entendiendo que si los alumnos realizan únicamente actividades de reproducción de procedimientos previamente introducidos, con el objetivo de memorizar algoritmos, difícilmente podrán alcanzar otros objetivos o difícilmente ampliarán sus conocimientos en relación con lo estudiado.

Así, se entiende que una tarea es una actividad de aula que involucra a estudiantes con asignaturas, contenidos y conceptos matemáticos, configurándose "como un vehículo importante para el desarrollo de la capacidad del estudiante para pensar y razonar matemáticamente<sup>1</sup>" (Stein; Grover; Henningsen, 1996, p. 455).

---

<sup>1</sup> Nuestra traducción

Teniendo en cuenta que las tareas matemáticas pueden influir, estructurar y comandar la forma en que los profesores organizan sus clases y cómo los estudiantes perciben y aprenden matemáticas, entendemos la importancia de las investigaciones en la planificación y organización de tareas de alta demanda cognitiva (procesos de pensamiento). Dado que la relevancia de la relación entre el proceso de pensamiento (nivel de requerimiento cognitivo) y las tareas matemáticas es la principal imagen de las investigaciones de GECEM.

Refiriéndose a los procesos de pensamiento, Doyle (1988), hizo una diferenciación primaria entre ellos. Reconoció que, si, por un lado, había tareas que requerían procesos más elementales, como la reproducción precisa de contenidos previamente aprendidos, por otro lado, había tareas que requerían un razonamiento más complejo, como las que implicaban la comprensión y conexión de los contenidos ya estudiados. Los niveles cognitivos se intercalan "entre tareas que involucran a estudiantes en el nivel superficial y tareas que involucran a estudiantes en un nivel más profundo, que requieren interpretación, flexibilidad, organización de recursos y construcción de significados<sup>2</sup>". (Stein; Grover; Henningsen, 1996, p. 459).

Para Penalva y Llinares (2011) el término Demanda Cognitiva se ocupa de la clase y el nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para resolver la tarea, señalando lo que se logra y lo que se aprende en cada nivel.

Smith y Stein (1998) clasifican los niveles de demanda cognitiva en cuatro, con los niveles 1 y 2 como demandas de bajo nivel, y los niveles 3 y 4 como demandas de alto nivel:

- Nivel 1 - tareas que requieren memorización;
- Nivel 2 - tareas que utilizan procedimientos sin conexión;
- Nivel 3 - tareas que utilizan procedimientos con conexión;
- Nivel 4 - tareas que requieren "hacer matemáticas".

Las tareas de memorización de nivel 1 implican reproducir fórmulas, reglas, hechos o definiciones previamente aprendidas o ya establecidas y que no pueden ser resueltas a través de procedimientos, porque no existen o porque el tiempo determinado para resolver la tarea es breve para emplear el procedimiento; No son ambiguas, estas tareas implican reproducir exactamente algo visto anteriormente y lo que hay que reproducir se establece clara y directamente; No tiene relación con los conceptos o significados que subyacen a los hechos, reglas, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.

Las tareas de nivel 2 son tareas de procedimientos sin conexión, son algorítmicas, utilizan procedimientos que están específicamente definidos, o su uso es obvio en función de la información que se encuentra en la tarea planificada; Requiere un requerimiento cognitivo limitado para lograrlo con éxito; Hay poca ambigüedad de lo que hay que hacer y cómo hacerlo; no tienen relación con conceptos o significados subyacentes al procedimiento utilizado; Se centran en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar la comprensión matemática;

---

<sup>2</sup> Nuestra traducción



No requieren explicaciones, o solo explicaciones centradas en describir el procedimiento utilizado.

Las tareas de nivel 3 son tareas de procedimientos con conexión, que se centra en la atención del estudiante en el uso de procedimientos, con el fin de desarrollar una comprensión de los conceptos e ideas matemáticas; Sugiere formas (explícita o implícitamente) que son procedimientos generales, que tienen una estrecha relación con las ideas conceptuales, en lugar de algoritmos que no están claros en relación con los conceptos subyacentes; De manera habitual, se representan en varias formas (diagramas visuales, gráficos, material concreto, símbolos, situaciones problemáticas); Hay conexiones entre múltiples representaciones que ayudan a desarrollar el significado matemático; Requieren un cierto grado de esfuerzo cognitivo; Aunque es posible seguir los procedimientos generales, no se pueden usar sin pensar, los estudiantes deben involucrarse con las ideas conceptuales detrás de los procedimientos para realizar con éxito la tarea.

Las tareas de nivel 4 son aquellas que necesitan hacer matemáticas porque requieren un pensamiento complejo y no algorítmico (no hay aproximación con caminos ya recorridos en otras tareas que puedan ser recordados o un camino que sea sugerido explícitamente por la tarea o instrucción previa); Requieren que los estudiantes exploren y comprendan conceptos matemáticos, así como procesos y sus relaciones; Requieren auto-verificación o autorregulación de los procesos cognitivos; Requieren que los estudiantes encuentren una respuesta que requiera la comprensión conceptual de la noción matemática, verificando y explicando la respuesta producida; Exigir a los estudiantes que accedan a conocimientos o experiencias relevantes y hagan un uso adecuado de ellos en el desarrollo de la tarea; Requieren un esfuerzo cognitivo considerable, y pueden implicar un cierto nivel de ansiedad de los estudiantes, debido a la naturaleza imprevisible del proceso de resolución requerido.

Según Stein y Lane (1996), la investigación ha demostrado que la mejora del aprendizaje de los estudiantes está relacionada con el trabajo con tareas de alta demanda cognitiva (Stein; Lane, 1996). Se entiende que todo tipo de tareas son importantes y tienen su papel en el aprendizaje, pero las de alta demanda cognitiva son palancas del pensamiento matemático y del aprendizaje del alumno.

Se entiende que la actividad de alta demanda cognitiva son actividades abiertas que permiten la investigación y resolución de problemas. Investigar es descubrir relaciones entre objetos matemáticos conocidos o entre estos y nuevos objetos matemáticos, tratando de identificar y probar sus propiedades (Ponte, 2021). Para el autor los momentos en la realización de una investigación son:

- Exploración y formulación de cuestiones, lo que implica reconocer la situación, explorar y formular preguntas;
- Formulación de conjeturas, que implica las actividades de organizar los datos y formular conjeturas;
- Prueba y reformulación de conjeturas, que implica realizar pruebas y refinar hipótesis;
- Justificación y evaluación, que implica justificar una conjetura y evaluar el razonamiento o el resultado del razonamiento.

Según Ponte (2006), el objetivo principal de la Investigación Matemática es encontrar regularidades, reflexionar sobre los temas, justificarlos y probarlos, generalizar contenidos. "Investigar es descubrir relaciones entre objetos matemáticos conocidos o desconocidos, buscando identificar sus propiedades" (Ponte, 2006, p.13).

La investigación en Matemáticas incluye la formulación de preguntas, que a menudo evolucionan a medida que avanza el trabajo. La investigación también implica la producción, el análisis y el refinamiento de conjeturas sobre estos mismos temas. Y, por último, implica la demostración y comunicación de los resultados. El punto de partida para una investigación puede ser un problema matemático o una situación no matemática (tanto de otras ciencias y tecnología, como de la organización social o de la vida cotidiana) (Ponte, 2010).

Para Ponte (2010) una tarea tiene cuatro dimensiones fundamentales (Figura 3): el grado de complejidad, la estructura, el contexto referencial y el tiempo requerido para su resolución. Combinando las dos primeras dimensiones, se obtienen cuatro tipos básicos de tareas:



**Figura 3 – Dimensiones de la tarea**

**Fuente: adaptado de Ponte (2010).**

Es decir, las investigaciones de GECEM se centran en la planificación de tareas de investigación abierta de alta demanda cognitiva, es decir, de alta complejidad, con apoyo en tecnologías.

Otro punto é que en el campo de la Educación Matemática, las Tecnologías de la Comunicación y la Información - TIC e Investigación Matemática han sido señalados como una de las tendencias metodológicas de la enseñanza que favorecen la comprensión de los conceptos matemáticos, así como la oportunidad de hacer conjeturas y generalizar.

Así, se percibe que en entornos de aprendizaje es interesante combinar la investigación Matemática con softwares educativos, como o software GeoGebra, que puede brindar oportunidades para la creación, manipulación, exploración de situaciones, análisis, elaboración de conjeturas, verificación de regularidades, discusión de resultados y generalización.

En este sentido, es necesario diseñar tareas que puedan ser el punto de partida de las investigaciones y exploraciones matemáticas de los alumnos y discutir

cómo se pueden trabajar en el aula. Las tecnologías pueden hacer una contribución significativa a esto. A continuación, se muestran ejemplos de tareas utilizando objetos de aprendizaje desarrollados por GECEM, que son tareas de investigación que, a nuestro entender, llevan a los estudiantes a realizar investigaciones en matemáticas.

#### 4. Ejemplos de tareas de investigación desarrolladas en el software GeoGebra

La tarea presentada en la Figura 4, fue desarrollada en el software GeoGebra y se puede encontrar en: <http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio>. Está indicado para estudiantes que se encuentran en los últimos años de la escuela primaria (6° a 9° grado) con edades comprendidas entre los 11 y los 14 años de edad.

<p>Considere una fracción y analice lo que sucede cuando agrega un valor cualquier al numerador y al denominador simultáneamente.</p>	
<p>La idea es que, en parejas o en grupos de 3 o 4 alumnos, discutan y reflexionen sobre las posibilidades para la tarea propuesta y hacer tantos ejemplos como sea necesario para sacar conclusiones</p>	
<p>Situación 1</p> <p>Para <math>\frac{a}{b}</math>, con <math>a &lt; b</math>, tenemos:</p> $\frac{a}{b} < \frac{a+2}{b+2} < \frac{a+4}{b+4} < \dots < 1$ <p>En el ejemplo presentado tenemos:</p> $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < \frac{7}{8} < \dots < 1$ <p>Resulta que las fracciones se acercan a 1 pero nunca llegan a 1</p>	
<p>Situación 2</p> <p>Para <math>\frac{a}{b}</math>, con <math>a = b</math>, tenemos:</p> $\frac{a}{b} = \frac{a+2}{b+2} = \frac{a+4}{b+4} = \dots = 1$ <p>En el ejemplo presentado tenemos:</p> $\frac{1}{1} = \frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{7}{7} = \dots = 1$	

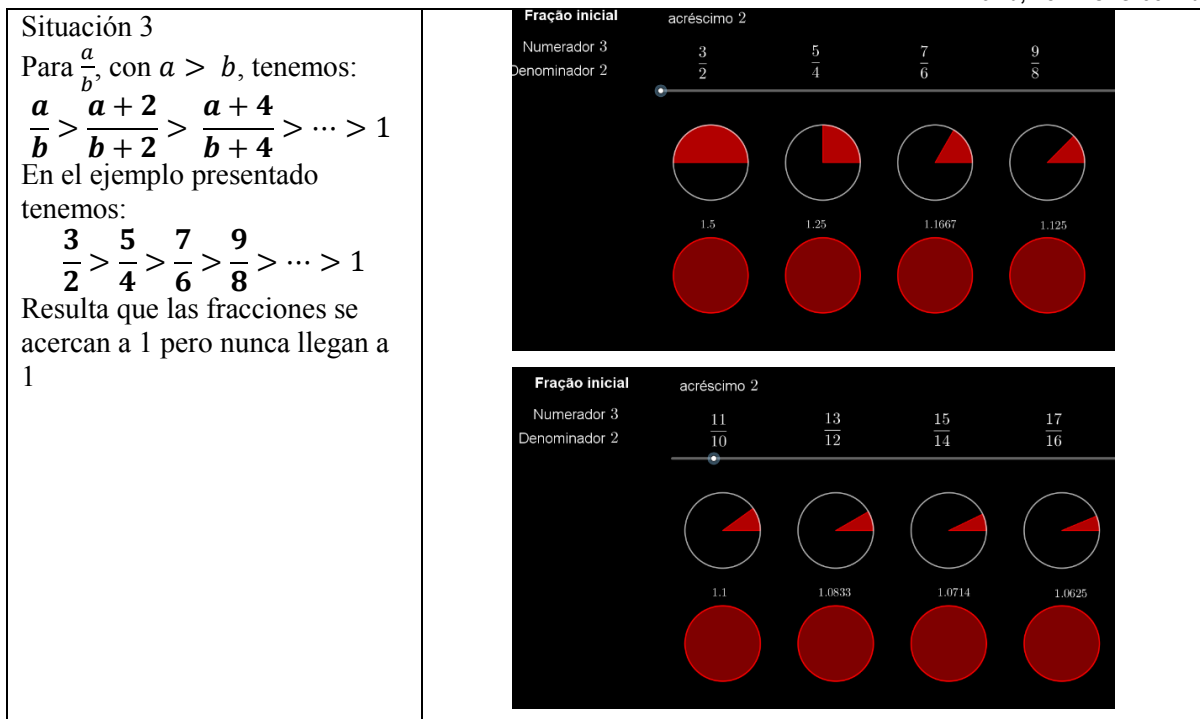


Figura 4 – Tarea investigativa con fracciones

Fuente: <http://ppgecim.ulbra.br>

Es importante destacar que en el objeto desarrollado permite a los alumnos definir la fracción inicial, pudiendo analizar hasta 54 fracciones a las que se suma un valor arbitrario definido como "suma" al numerador y denominador de la fracción.

En el ejemplo mostrado en la Figura 3, se agregó un valor de 2 unidades al numerador y al denominador de la fracción inicial (3/2). El objeto de aprendizaje permite al estudiante definir la fracción inicial, y se debe alentar al profesor a explorar las situaciones que se presentan con los diferentes tipos de fracciones iniciales (numerador más pequeño que el denominador; numerador igual al denominador; numerador mayor que denominador).

Otro ejemplo es la actividad desarrollada con simuladores de brazo robótico permiten el desarrollo de tareas de alta demanda cognitiva especialmente con conceptos de trigonometría, con la ventaja de tener un menor costo en comparación con los brazos robóticos reales, ya que no hay necesidad de adquirir equipos robóticos, con los costos asociados solo con el laboratorio de computación que se utiliza para otras actividades educativas (Homa, 2019).

Según (Homa, 2019) el uso de objetos de aprendizaje tridimensionales permite el cambio del ángulo de visión que facilita la visualización de las características y propiedades matemáticas involucradas en la situación problemática. Dadas las características del simulador que representa un objeto real, en este caso un brazo robótico, la posibilidad de observar las interacciones y resultados de los comandos en un entorno de realidad virtual tridimensional se muestra como un recurso favorable para acciones exploratorias en tareas de investigación.

Se desarrollaron un conjunto de tres brazos robóticos que presentan un nivel creciente de dificultad asociado al objetivo propuesto de dar órdenes para que el brazo robótico sale de la posición de reposo y tome la bola roja. Para el primer

brazo robótico, Figura 5, es necesario informar la distancia que debe extender el brazo y el ángulo de rotación para colocar la garra en la bola.

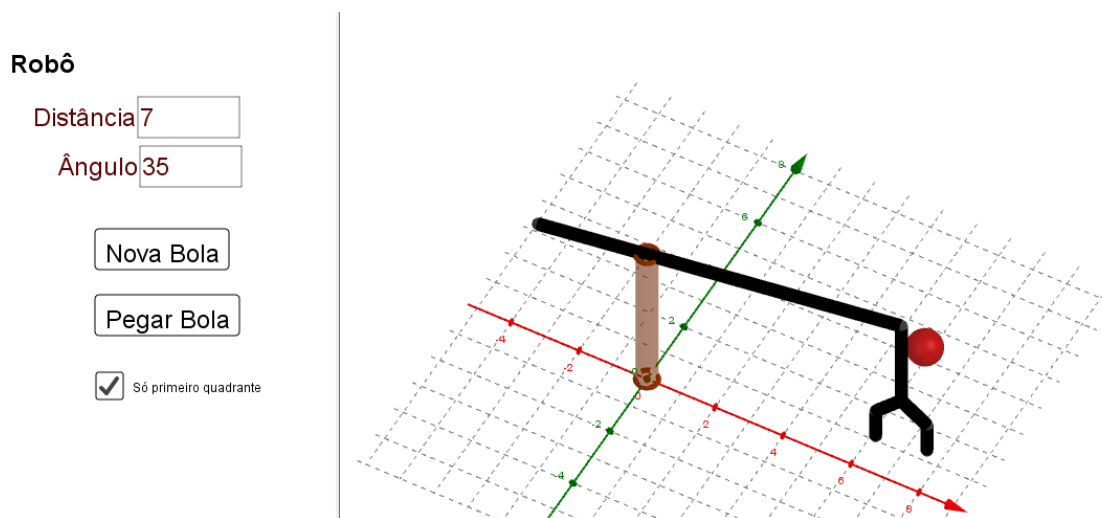


Figura 5 –Simulador robótico 1  
Fuente: <http://ppgecim.ulbra.br>

Entre las primeras acciones que se esperan en esta propuesta se encuentran el ensayo y error para lograr el objetivo. Debido a que los simuladores fueron programados para aceptar un error de 0.1 desde la distancia desde el centro de la pelota y la garra, las posibilidades de éxito por intento son pequeñas. Los cambios del ángulo de visualización de la acción, durante los intentos, permiten la identificación del triángulo rectángulo formado por las coordenadas de la bola y el brazo, así se disparan los conocimientos de trigonometría para la solución de la tarea. En este caso se utiliza el Teorema de Pitágoras, las relaciones trigonométricas y su inversa.

Para las primeras actividades con simuladores robóticos se recomienda restringir la posición de la bola al primer cuadrante utilizando el *checkbox* "solo primer cuadrante", debido a las dificultades relacionadas con los ángulos congruentes y la inversa de las relaciones trigonométricas.

El segundo brazo robótico (Figura 6) aumenta el nivel de complejidad porque es un brazo robótico con 2 segmentos, lo que requiere que se defina el ángulo de apertura entre los segmentos para que la garra se coloque a la distancia de la bola en relación con la base. Para ello el alumno puede utilizar las leyes del coseno o descomposición en 2 triángulos rectángulo para calcular el ángulo de apertura. Los movimientos de ascenso y descenso de la garra son controlados automáticamente por el simulador para disminuir el grado de complejidad de los comandos involucrados.



### Robô 2

Os braços do robô medem ambos 4u.c.

Dica: Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha)$$

Rotação da base

Ângulo da articulação

Nova Bola

Pega Bola

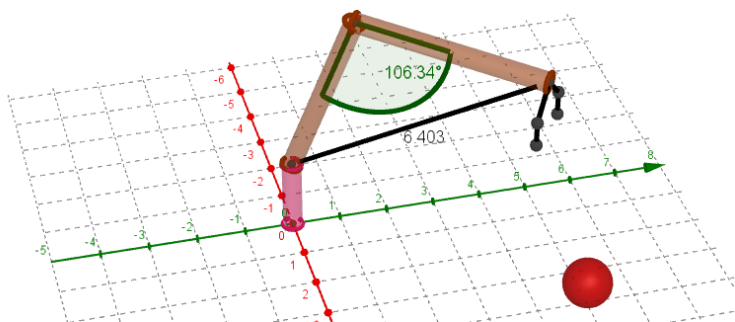


Figura 6 –Simulador robótico 2

Fuente: <http://ppgecim.ulbra.br>

Diferente del primer y segundo simulador, el tercer brazo robótico (Figura 7) presenta la bola posicionada en el espacio, siendo necesario, además de la aplicación de los conocimientos aplicados en actividades anteriores, el uso de trigonometría en el espacio. Debido a que está fuera del plano, la información de la posición vertical de la bola se presenta como un valor numérico sin un plano que facilita la identificación de los triángulos rectángulo y las relaciones trigonométricas involucradas. En este caso se define el ángulo de apertura entre los segmentos para lograr la diagonal mayor que el adoquín definido por el origen y las coordenadas de la bola en el espacio.

### Robô 3

Os segmentos do braço do robô medem ambos 5u.c.

Dica: O ângulo de descida da gara é em relação ao vetor normal ao planoxy e o segmento formado pela Origem e o centro da garra

Rotação da base

Ângulo da articulação

Ângulo de descida da garra

Nova Bola

Pega Bola

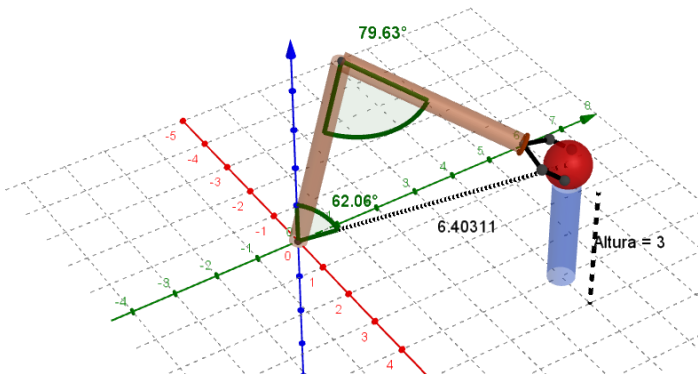


Figura 7 –Simulador robótico 3

Fuente: <http://ppgecim.ulbra.br>

Para el tercer simulador es necesario informar el ángulo de inclinación del brazo para que la garra se coloque en el espacio, porque es una coordenada esférica y para reducir la complejidad el ángulo informado debe ser el formado entre el normal al plano XY el segmento formado entre el origen y el centro de la garra.

Los simuladores de brazos robóticos son una gran alternativa para el uso contextualizado de la trigonometría en tareas online, particularmente en este momento de pandemia. De esta manera los alumnos trabajan con un tema

contemporáneo, como es la robótica, aplicando la trigonometría del triángulo rectángulo.

## 5. Consideraciones finales

La Escuela necesita cambiar, actualizarse para formar a este alumno que trabajará en un mundo que no conocemos y el docente necesita ser ese profesional que comprende este mundo y visualiza esta nueva Escuela;

Se necesita un nuevo plan de estudios que desarrolle lo conocimiento y la creatividad, centrado en el aprendizaje.

¡El mundo contemporáneo exige un nuevo alumno! Con capacidad de presentar diferentes posibilidades de solución adecuadas a una situación problemática, que se enfoquen en diferentes aspectos del problema y/o diferentes formas de resolverlo, especialmente formas inusuales (originalidad).

En este sentido, es muy importante que el docente esté capacitado para desarrollar un trabajo que lleve a los estudiantes al aprendizaje y que este se lleve a cabo con diferentes niveles de tareas, considerando tareas de alta demanda cognitiva (hacer matemáticas), y que considere la posibilidad de incluir en la planificación didáctica tareas abiertas, integradas con tecnologías y que permitan al alumno formular conjeturas y validarlas conducentes a la generalización.

## 6. Agradecimientos

Para la Coordinación para el Perfeccionamiento del Personal de Educación Superior (Capes) es con la beca de productividad científica de nivel 1 para Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

## Bibliografía

- Brasil. (1996). Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Recuperado el 10 de Octubre de 2021 de [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/l9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm)
- Damasco, F. C.; Groenwald, C. L. O. y Llinares, S. C. (2020). A competência docente de Observar com Sentido situações de ensino e aprendizagem na Matemática. In: *Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática: referencias, práticas e perspectivas*. ULBRA.
- Elkjaer, B. (2013). *Pragmatismo – Uma teoria da aprendizagem para o futuro*. In: *Teorias Contemporâneas da Aprendizagem*. São Paulo, Penso.
- Groenwald, C. L. O. (2021). Educação Matemática em tempos de pandemia: uma experiência em um curso de Licenciatura em Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, v. 16, p. 229-247.
- Homa, A. I. R. (2019). Robotics Simulators in STEM Education. *Acta Scientiae* [en línea], 21(5), 178–191. Recuperado el 10 de Noviembre de 2021, de <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5417>
- Homa, A. I. R. (2019). Objetos De Aprendizaje Tridimensionales Construidos Con El Software Geogebra. *Revista Paradigma*, 40(1), 69–79. Recuperado el 11 de Noviembre de 2021, de <https://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/viewFile/8598/5182>
- Illeris. K. (2007). *How We Learn: Learning and Non-learning in Schools and Beyond*. London/New York: Routledge.
- Illeris. K. (2013). *Teorias Contemporâneas da Aprendizagem*. São Paulo, Penso.

- Llinares, S.; Buforn, P.; Groenwald, C. (2019). Mirar Profesionalmente las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. In: *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Salamanca, Ediciones Universidad Salamanca.
- NCTM. (2015). *De los principios a la acción – para garantizar el éxito matemáticos para todos*. México: Editando Libros S.A., 2015.
- OECD. Organisation for Economic Co-Operation and Development. *The Definition and Selection of Key Competencies – DeSeCo*. 2005. Recuperado em: 12 ago. 2019 de <https://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf>
- OECD. Organisation for Economic Co-Operation and Development. *Future of education and skills*. [Proyecto]. Recuperado el 12 agosto de 2019 de <http://www.oecd.org/education/2030-project>
- Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning: Experience at the source of learning and development*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Penalva, M. C.; Llinares, S. (2011). Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. In: GOÑI, Jesus María (coord) et al. *Didáctica de las Matemáticas. Colección: Formación del Profesorado. Educación Secundaria*. Barcelona: Editora GRAÓ. 12, 27-51.
- Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169. Recupeado el 15 de octubre de 2021 de <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4071>
- Sá, P.; Paixão, F. (2015). Competências-chave para todos no séc. XXI: orientações emergentes do contexto europeu. *Interações*, v. 11, n. 39, p. 243-254.
- Stein, M. K.; Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation: An International Journal on Theory and Practice*, v. 2(1), n. Routledge, p. 50–80.
- Smith, M. S; Stein, M. K. (1998) Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 344-50.
- Tamayo, C. & Tuchapesk, M. (2020). Desafios e possibilidades para a Educação (Matemática) em tempos de “Covid-19” numa escola em crise. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. 13(1), 29-48.
- Therón, R.; García-Holgado, A.; Marcos-Pablos S. (2021). Docencia de la asignatura Interacción Persona-Ordenador en tiempos de pandemia: una experiencia con Microsoft Teams Teaching Human-Computer Interaction in pandemic time: an experience with Microsoft Teams. *Anais VI Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Cooperación (CINAIC)*. Octubre 2021, Madrid, España.

Groenwald Claudia Lisete Oliveira. Licenciada en Matemáticas y doctora en Ciencias de la Educación. Profesora titular de la Universidad Luterana de Brasil y coordinadora del Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas. Desarrolla investigaciones sobre currículo en Educación Matemática, enseñanza e aprendizaje y tecnología en Educación Matemática. [claudia1959@gmail.com](mailto:claudia1959@gmail.com).

Homa Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa. Licenciado en Matemáticas aplicadas a la Informática y doctor en Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas. Profesor del Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas de la Universidad Luterana de Brasil. Desarrolla investigaciones sobre tecnologías en Educación Matemática. [iaqchan@hotmail.com](mailto:iaqchan@hotmail.com).