REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 92-110

La articulación entre situaciones problema de Proyectos Productivos Agroindustriales y la función lineal y afín

Ligia Amparo Torres Rengifo, Ofelia Angulo Vallejo

Fecha de recepción: 11/01/2017
Fecha de aceptación: 09/03/2017

Resumen	Este artículo presenta los resultados de una investigación pedagógica que articula situaciones problémicas de Proyectos Productivos Agroindustriales en el contexto de la institución educativa Policarpa Salavarrieta del municipio de Yumbo[1] y la función lineal. Además muestra cómo se pueden apropiar los estudiantes de grado noveno de Educación básica secundaria, de conceptos y procedimientos relacionados con la función lineal y afín, tales como: identificación de relaciones de variación, comprensión e interpretación de la regla que determina el comportamiento variacional y utilización de diferentes representaciones. Esta propuesta que tiene como referente teórico el Análisis didáctico (Rico, 1997, pp. 39-59), reconoce dificultades reportadas por investigaciones en didáctica del álgebra y favorece el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes en la escuela. **Palabras clave:** Análisis didáctico, Unidad didáctica, Función lineal, Situaciones problémicas
Abstract	This article presents the results of a pedagogical research that articulates problematic situations of Productive Agroindustrial Projects in the context of the educational institution Policarpa Salavarrieta of the municipality of Yumbo and the linear function. It also shows how students of the ninth grade of secondary basic education, of concepts and procedures related to linear and related functions, can be appropriated, such as: identification of relations of variation, understanding and interpretation of the rule that determines the variational behavior and utilization Of different representations. This proposal has theoretical reference Didactic Analysis (Rico, 1997, pp. 39-59), recognizes difficulties reported by research in didactics of algebra and favors the development of students' variational thinking in school. **Keywords:** Didactic analysis, Didactic unit, Linear function, Problem situations

[1] Municipio ubicado en el departamento del Valle del Cauca – Colombia.

Resumo	Este artigo apresenta os resultados de pesquisa educacional que articula situações problemáticas Produtivo projetos agroindustriais no contexto da escola Policarpa Salavarrieta município de Yumbo ea função linear. Ele também mostra como você pode apropriar-se dos estudantes da nona série do secundário de educação básica, conceitos e procedimentos relacionados à função afim linear e, como identificar índices de variação, compreensão e interpretação da regra que determina o comportamento variational e uso de diferentes representações. Esta proposta tem como uma análise didática referencial teórico (Rico, 1997, pp. 39-59), reconheceu dificuldades relatadas pela pesquisa em álgebra de ensino e promove o desenvolvimento do pensamento variacional de alunos na escola. **Palavras-chave:** análise didática, unidade didáctica, função linear, situações problemáticas

1. Introducción

Este documento presenta los resultados de una investigación pedagógica realizada como trabajo de grado de la Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle[2]. Parte de reconocer la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, la cual está relacionada, con la naturaleza misma de esta disciplina en tanto los conceptos matemáticos, al ser objetos de naturaleza abstracta, tienen determinadas características y obedecen a leyes y propiedades bien definidas, que no son asequibles a los sentidos y por lo tanto requieren para su manipulación de diversas representaciones como la representación simbólica, que implica poner en juego una capacidad de abstracción que requiere espacios amplios de tiempo para ser desarrollada. Por esta razón se les dificulta a los estudiantes, realizar la visualización simbólica de los objetos matemáticos y aún más comprender y ejecutar el proceso de transformación de un objeto desde un sistema de representación a otro.

Acerca de la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, Sfard (1991, p. 3) plantea que: A diferencia de los objetos materiales, los constructos matemáticos avanzados son totalmente inaccesibles a nuestros sentidos, ellos únicamente pueden ser vistos con los ojos de nuestra mente. En efecto, aun cuando dibujemos una función o escribamos un número, somos muy cuidadosos al enfatizar que el símbolo sobre el papel es una de las diferentes representaciones posibles de alguna entidad abstracta, la cual en sí misma no puede ser vista ni tocada. El matemático haría afirmaciones acerca de la existencia y propiedades de este objeto intangible sin pensar mucho en las cuestiones filosóficas que sus declaraciones pueden evocar. Sólo casualmente un autor de un texto haría una observación de disculpa tal como esta: “No necesitamos discutir cómo estos entes abstractos... pueden ser

[2] Este proyecto titulado “Análisis de la articulación de los Proyectos Productivos Agroindustriales y la función lineal”, fue realizado por Ofelia Angulo Vallejo bajo la tutoría de la profesora Ligia Amparo Torres Rengifo (Mg) durante los años 2012-2013, sustentado el 7 de abril de 2014.

categorizados desde un punto de vista filosófico. Para el matemático... es importante solamente saber las reglas o leyes por las cuales estos pueden ser combinados" (Courant & Jhon, 1962, p. 2). Ser capaz de "ver" de algún modo estos objetos invisibles parece ser una componente esencial de la habilidad matemática; la carencia de esta capacidad puede ser una de las mayores razones a causa de la cual las matemáticas aparecen prácticamente impermeables a tantas "mentes bien formadas".

Con relación a lo anterior se plantea que existen dos concepciones matemáticas complementarias para definir cualquier concepto matemático, una es la concepción estructural que permite visualizar a un concepto como un objeto y la otra concepción es la operacional que permite visualizarlo como un proceso (Sfard, 1991); un ejemplo de esto, se observa con el significado del signo igual que en algunos casos actúa como símbolo de igualdad y en otros como una instrucción para obtener un resultado o realizar una operación.

Para el Álgebra en forma específica, resultados de investigaciones (Kieran, 1992, pp. 17-18), muestran que algunas de las dificultades presentadas por los estudiantes para el aprendizaje de esta disciplina se relacionan con un gran distanciamiento entre las concepciones estructural y operacional, que se manifiestan en las reacciones de la mayoría de los estudiantes cuando comienza el estudio de las expresiones algebraicas y no logran comprender su estructura, puesto que no han alcanzado a desarrollar el álgebra en su parte estructural; de ahí sus intentos infructuosos en: 1.) Convertir expresiones y/o situaciones problémicas en ecuaciones, 2.) Simplificar expresiones, 3.) Operar sobre una ecuación como un objeto, 4.) Entender que el signo igual es un símbolo de simetría más que el anunciante de un resultado, 5.) Considerar las letras como variables o como *cantidades dadas*, 6.) Traducir problemas de palabras a ecuaciones, 7.) Ver la estructura escondida de las ecuaciones y 8.) Usar el álgebra como herramienta para probar relaciones numéricas. Los estudiantes pretenden compensar un poco su debilidad, memorizando procedimientos y reglas, pues consideran que el Álgebra se limita sólo a esta actividad mecánica, no la conciben como la rama de las matemáticas que trata sobre la simbolización de relaciones numéricas generales, estructuras matemáticas y las operaciones con esas estructuras.

Ampliando un poco sobre estas concepciones estructural y operacional, es oportuno tener en cuenta que el pensamiento estructural dota a un concepto de "un tipo de fisonomía", el cual le permite a una persona "pensar en él como una cosa única, por más complicado que pueda ser, así como vemos un rostro de un hombre" (Hadamard, 1949, p.65). En contraste, interpretar una noción como un proceso implica considerarla como una entidad potencial más que como entidad real, la cual llega a existir bajo el cumplimiento de una secuencia de acciones. Así, mientras la concepción estructural es estática, instantánea e integrada, la concepción operacional es dinámica, secuencial y detallada.

Por otro lado, varias tendencias en Didáctica de las matemáticas (tales como: el Análisis didáctico (Rico, 1997, pp. 52-53), la Teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007, p. 11), la Propuesta Fenomenológica (Freudenthal, 1983, pp. 432-460), la Educación Matemática Realista de Freudenthal (Freudenthal, 1991, p.34) reconocen la importancia del contexto para construir significado y potenciar la articulación entre esa naturaleza dual de los conceptos matemáticos (como proceso y como estructura), sin embargo la escuela aún no está atendiendo estas demandas, pues la forma como tradicionalmente se imparte la educación en el aula, no considera el contexto sociocultural e institucional en el cual se desarrolla la actividad matemática particularmente en el campo algebraico. La educación matemática es un proceso de hacer matemáticas que conduzcan a un resultado, matemáticas como un producto. En la educación matemática tradicional, el resultado de la actividad matemática de otros es tomada como punto de partida de la enseñanza, y Freudenthal (1973, p. 134) caracteriza a esto como una inversión anti-didáctica. Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma

Al respecto, Freudenthal, referenciado por Puig (1997), establece que el principal objetivo de la acción educativa es la construcción de objetos mentales y en segundo lugar la adquisición de conceptos. Es así como la actividad matemática estaría determinada por la imagen mental que el alumno elabora sobre la naturaleza de las matemáticas por tanto, cuando se inicia el proceso por los conceptos y no por las situaciones problémicas que son las que dan sentido al aprendizaje, como generalmente se hace, sólo ocurre la enseñanza de unas matemáticas descontextualizadas, que no articula las situaciones de la vida cotidiana con los contenidos escolares, de modo que no es significativa, ni útil y tampoco favorece el aprendizaje.

Sfard enfatiza en el papel de lo procedimental como un aspecto que da sentido a la formación de los conceptos matemáticos siempre y cuando este precede al aspecto estructural (Sfard, 1991, p. 9); en relación con esta propuesta, se consideraron las características de la institución educativa en tanto que promueve los proyectos que están contextualizados o aluden a un proyecto específico y el contexto de los estudiantes en el sentido de que ellos hubieran participado en los Proyectos Productivos Agroindustriales para así propiciar la naturaleza procedimental y conceptual de los objetos matemáticos. Puesto que en la institución educativa Policarpa Salavarrieta también se reconoce que a pesar de la riqueza de su contexto estos no se articulan con lo matemático y los estudiantes también tienen dificultad en la manipulación de los objetos algebraicos, como las expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones, en este sentido se adelantó entre el 2012 y 2013 un proyecto que permitió caracterizar la articulación de situaciones problémicas de proyectos productivos agroindustriales y las funciones lineal y afín, mediante la propuesta de Análisis didáctico y de esta forma se contribuyó con la integración de los estudiantes en el siguiente nivel de enseñanza media, además de potenciar su aprendizaje y promover su capacidad emprendedora en beneficio de su comunidad. Se tomó una muestra de 10 estudiantes del grado 9º, cuyas edades oscilaban entre 15 y 18 años (60% con 16 años, 20% con 15 años, 10% con 17 y el otro 10% con 18 años), aprovechando su entusiasmo y motivación frente a las actividades relacionadas con la unidad productiva, para plantear el siguiente interrogante:

¿Cómo caracterizar la articulación de situaciones problémicas de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal y afín, mediante una propuesta de Unidad didáctica para el grado 9° de la IE Policarpa Salavarrieta?

En este sentido, este trabajo está inscrito en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, que según (Rico, 1997, p. 55), es una disciplina científica que se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como de los planes para la preparación profesional de los educadores matemáticos; tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático y propone actuaciones para sus transformación basadas en sus propios fundamentos teóricos. En este sentido desarrolla una Unidad didáctica fundamentada en una propuesta metodológica de Análisis didáctico que consta de 5 situaciones problémicas que parten de la variación y el cambio hasta la conceptualización de la función lineal y afín; estas cinco situaciones son: Preparación de la mezcla para pandebonos[3] y la relación uno a uno entre magnitudes, Preparación de la mezcla para pandebonos y expresiones algebraicas, Comercializando pandebonos y la función lineal, Costos fijos y la función afín y Reconociendo el modelo de función constante.

2. Algunos referentes teóricos desde el Análisis didáctico

Este trabajo se inscribe dentro de la propuesta del grupo de investigación denominado Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA)[4] que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos y algebraicos en el sistema educativo y en el medio social; estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas y algebraicas; de este referente se toma la propuesta de Análisis didáctico como marco teórico y metodológico que guió este proyecto.

En este marco de referencia se asume que el conocimiento producido al interior de la Didáctica de las Matemáticas, denominado Conocimiento didáctico, proporciona los elementos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas; estos elementos son reconocidos como Organizadores del currículo de matemáticas y según Rico (1997, p. 44) son aquellos conocimientos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas.

[3] Pandebono o pan de bono es un panecillo característico en la región del Valle del Cauca en Colombia, elaborado con harina de maíz, almidón de yuca fermentado, queso y huevo, que se amasa, se forma en pequeñas porciones usualmente achatadas y posteriormente se hornean. https://es.wikipedia.org/wiki/Pandebono

[4] PNA es un Grupo de Investigación de la línea Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (España) que coordina la revista del mismo nombre donde se tratan investigaciones en esta disciplina. Este grupo se constituyó como tal por la multiplicidad de vínculos entre los conocimientos numérico y algebraico, enfatizando que los problemas derivados de la enseñanza y el aprendizaje de estos dos campos son similares y que las bases teóricas y metodológicas para su estudio tienen componentes comunes ((Socas, 1999, p. 143-148).

La articulación y concreción de estos conocimientos didácticos conforman el Análisis didáctico que es un proceso cíclico para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas e identificar las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto.

En este sentido, el Análisis didáctico se basa en cuatro análisis: el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación. El Análisis de contenido es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares, el Análisis cognitivo es una reflexión e indagación acerca de por qué, cómo y cuáles dificultades, obstáculos y errores se presentan con mayor frecuencia en el aprendizaje de los estudiantes al abordar el estudio de un contenido matemático particular, a su vez el Análisis de instrucción se refiere a una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que orientan la enseñanza, el aprendizaje de las matemáticas y los procesos de evaluación y por último el Análisis de actuación que le permite al profesor determinar las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

El análisis de contenido es considerado por (Gómez, 2002, pp. 262-285), como el eje central del análisis didáctico por cuanto constituye el análisis matemático, es decir, la descripción detallada de la estructura matemática del contenido matemático que le permite al profesor dar cuenta de las relaciones existentes entre tres elementos: hechos, conceptos y estructuras conceptuales. Este estudio, da especial preponderancia a el Análisis de contenido, reconociéndolo como el procedimiento que le permite al profesor establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las matemáticas escolares atendiendo a tres dimensiones que (Gómez, 2007, pp. 36-55) denomina *Estructura conceptual*, *Sistemas de representación* y *Fenomenología*.

La *Estructura conceptual* se refiere al análisis de la estructura matemática de la temática a estudiar considerando los conceptos y procedimientos involucrados y sus relaciones; los *Sistemas de representación* describen las diferentes maneras de representar esos conceptos y procedimientos señalando como se relacionan dichos sistemas de representación y la *Fenomenología* que va de la mano con la *Modelación matemática*, permite identificar familias de fenómenos en diferentes contextos y la forma cómo estos fenómenos son modelados por alguna subestructura de la estructura matemática original; estos aspectos son determinantes para una modelación matemática que esquematiza la relación de estas características con elementos y propiedades de la estructura matemática en uno o más sistemas de representación.

Para el caso de este trabajo, el Análisis de contenido se centró en el contenido escolar de la función lineal y afín, por tanto realizar el análisis fenomenológico implicó identificar como fenómenos: variaciones entre la cantidad en gramos de los elementos utilizados como materia prima, entre los ingresos totales, entre los costos de producción y entre la ganancia obtenida y el número de pandebonos, para continuar con la modelación a partir de las situaciones de variación y cambio que admitían ser modeladas mediante la función lineal, articulando así los diferentes conceptos y procedimientos.

A propósito de la Modelación, es conveniente precisar que este proceso consiste en identificar esquemas o comportamientos que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y/o matemáticas para reconstruirlas mentalmente; en una situación problémica, la modelación permite identificar la relación entre variables y proponer un modelo que represente esta relación de modo que se pueda establecer una proyección de la variable establecida como dependiente en términos de la variable independiente. Este proceso favorece el desarrollo de procesos de pensamiento, la contextualización y en lugar preponderante los impactos de la nueva tecnología pues de esta forma se puede hacer pronósticos más ajustados a la realidad, validarlos y ajustarlos. Uno de los objetivos de este proyecto fue modelar la función lineal a partir de situaciones problémicas diseñadas considerando el contexto institucional de los Proyectos Productivos Agroindustriales particularmente la producción de pandebonos, incorporando el software Excel.2010 en algunos momentos.

2.1. Algunos aspectos sobre la Experimentación

Este estudio considera la perspectiva de Modelación de la Educación Matemática Realista, desde la postura de (Freudenthal, 1991, p. 32) denominada Matematización progresiva, que se refiere al proceso mediante el cual los estudiantes deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego cambiar a analizar su propia actividad matemática, permitiendo identificar dos categorías de Matematización. *Matematización Horizontal*: que se refiere a ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos, es decir convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva. Mediante este proceso matemático, los estudiantes (con ayuda del docente) logran hacer una modelación particular de la situación problema, trasladando el problema de su contexto a algún tipo de matemáticas, mediante métodos informales o pre-formales a diferentes niveles de abstracción y la *Matematización Vertical*: que significa moverse dentro del mundo de los símbolos, dentro de la matemática misma, lo cual promueve estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática. En otros términos se refiere a la elevación del pensamiento abstracto, propiciando la reorganización de las ideas (alcanzadas en el nivel anterior) dentro del mismo sistema matemático.

El Análisis didáctico culmina con la elaboración de una Unidad didáctica que es una propuesta de aula donde el profesor concreta los objetivos, contenidos, tareas, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y orientaciones metodológicas que son objeto de trabajo en clase con los alumnos, en un período determinado de tiempo y que, a juicio del profesor, mantienen unidad según criterios principalmente conceptuales; esta Unidad didáctica debe estar dirigida a un grupo concreto de alumnos y referirse a un contenido matemático específico y está enmarcada en un contexto sociocultural determinado. Esta propuesta se complementa con el Análisis del contexto curricular en el cual se propone el trabajo de aula.

Después de realizar una descripción de cada uno de los componentes del Análisis didáctico, se identificaron para cada uno de los Análisis considerados en el proyecto (el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación), cuáles elementos ejercían mayor influencia para el diseño de la Unidad didáctica, lo que permitió precisar lo siguiente:

El Análisis de contenido se realizó a partir del proceso de producción de pandebonos, del cual se seleccionaron fenómenos de variación y cambio que admitían ser modelados mediante la función lineal describiendo comportamientos que denotaban dependencia entre magnitudes (materias primas vs número de pandebonos, costos de producción vs número de pandebonos, ganancia vs número de pandebonos) y podrían representarse por diversos lenguajes: verbal, tabular, gráfico o algebraico.

A partir del Análisis cognitivo se identificaron principalmente las dificultades en que incurrieron los estudiantes durante el proceso de implementación de la Unidad didáctica, el Análisis de instrucción determinó el propósito de cada una de las Situaciones que conformaron la Unidad didáctica, considerando el contenido matemático y el contexto; el Análisis de actuación que se realizó después del proceso de implementación permitió al profesor, validar el diseño de la Unidad didáctica mediante la observación y registro que hizo de lo que sucedió en su interacción con los estudiantes en términos de sus logros y deficiencias. Finalmente el Contexto curricular articuló los Lineamientos Curriculares (LCM) con los Estándares Básicos de Competencia (EBC) y permitió identificar la Modelación y el Pensamiento Variacional como los procesos determinantes en este proyecto en el marco de los Proyectos Productivos Agroindustriales (PPA).

3. La función lineal y los Proyectos Productivos Agroindustriales

Para efectos de esta comunicación se presentará la estructura general de la Unidad didáctica y se analizará sólo la primera situación, las demás se describirán brevemente.

Se diseñó una Unidad didáctica considerando que la función lineal puede ser modelada mediante la articulación de los conceptos matemáticos involucrados con los proyectos productivos agroindustriales, para ello se analizaron las características de la relación entre las variables involucradas en las situaciones propuestas y el tipo de variación determinada por dicho modelo funcional.

Esta Unidad didáctica, consta de cinco situaciones, cada una conformada por tareas y cada tarea por una serie de preguntas; cada situación tiene un nombre particular relacionado con las tareas a realizar y plantea unos objetivos en términos de propósitos y las habilidades a desarrollar en los estudiantes y una descripción de la situación a resolver.

Es importante aclarar que según el Ministerio de Educación Nacional (2006, p. 72), situación es equivalente a situación problemática, que para efectos práctico del proyecto se redujo el nombre, y corresponde al conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento aportan al aprendizaje de los estudiantes; se entiende por tareas al conjunto de actividades generadas a partir de una situación problema que movilizan un saber determinado y se entiende por preguntas a aquellos interrogantes estructurados a raíz de una tarea específica y pueden ser de dos clases: cognitivos que implican la realización de un procedimiento explícito para obtener un resultado y metacognitivos que se refieren a aquellas tareas que impulsan al estudiante a realizar asociaciones, inferencias, visualizar patrones y regularidades antes de expresar sus respuestas.

En la Tabla 1 se aprecia la estructura general de esta Unidad didáctica donde se relaciona cada situación de la Unidad didáctica con su nombre, sus respectivas tareas y el número de preguntas para cada tarea.

Nº	Situación Nombre	Tareas	Número de preguntas
1	Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes	Tarea 1: Comprendiendo la situación	5
		Tarea 2: Relación entre magnitudes	7
		Tarea3:Validando la relación entre magnitudes	5
2	Preparación de la mezcla para el pandebono y expresiones algebraicas	Tarea 1: Expresiones algebraicas	5
		Tarea 2: Representación Gráfica	4
		Tarea 3: Variaciones lineales con el Programa Excel	3
		Tarea 4: Afianzar manejo del Programa Excel con variaciones lineales	6
3	Comercializando pandebonos y la función lineal	Tarea 1: Relación entre representación tabular y expresiones algebraicas	10
		Tarea 2: Lectura e interpretación de representaciones gráficas	11
		Tarea 3: Relaciones lineales de tendencia decreciente	6
4	Costos fijos y la función afín	Tarea 1: Relación, gráficas y expresiones algebraicas	6
		Tarea 2: Gráficas y Relaciones lineales mediante Excel	5
		Tarea 3: Lectura e interpretación de gráficas cartesianas de Excel	5
		Tarea 4: Construyendo modelos funcionales	5
5	Reconociendo el modelo de función constante	Tarea 1: Comprendiendo la situación	5
		Tarea 2: Afianzando el modelo funcional constante	6
		Tarea 3: Afianzando el modelo funcional	5

Tabla 1. Esquema general de la Unidad didáctica

Además, se tuvo en cuenta la experiencia y conocimientos que desarrollaron los estudiantes del grado 9°1 de la IE Policarpa Salavarrieta sobre la producción de pandebono al trabajar en pro de la Unidad productiva conformada desde el año lectivo 2011. Este proceso implicó para ellos realizar actividades según las etapas de: preventa, preparación del laboratorio (asepsia), alistamiento, producción y comercialización.

Una Unidad productiva es la gestión de cada una de los grados de la IE Policarpa Salavarrieta desde Transición hasta grado Noveno, para concretizar el propósito del proyecto pedagógico productivo *La Tienda Agroindustrial las delicias de Pola de* comercializar los productos transformados por los estudiantes de los grados Décimo y Once (mediante el proyecto pedagógico productivo Gestionando futuro con la agroindustria), para incentivar en ellos su espíritu emprendedor y motivarlos a la conformación de microempresas agroindustriales

Una descripción de la actividad matemática que movilizan las tareas de la situación se presenta a continuación:

3.1. Situación 1 (S1): Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes

Los estudiantes del grado 9°1 de la IE Policarpa Salavarrieta han gestionado la producción de pandebono en pro de la Unidad Productiva conformada desde el año lectivo 2011. La gestión de este proceso ha consistido en realizar actividades según las etapas de: preventa, preparación del laboratorio (asepsia), alistamiento, producción y comercialización. En la etapa de producción de pandebonos se parten porciones de masa de 60 g y con ellas se forman pandebonos del mismo tamaño y forma; dicha masa se prepara conforme a la siguiente relación de materias primas:

Tabla 2. Relación materias primas fabricación pandebonos

Materia Prima	Cantidad en gramos
Queso costeño	4.000
Almidón agrio	5.000
Areparina	1.000
Azúcar	1.000
Mantequilla	2.000
Leche en polvo	1.000
Total de materia prima	14.000

Para esta relación de materias primas, el número aproximado de pandebonos producidos es de 250 unidades.

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta las cantidades relacionadas en la tabla anterior, realice o responda lo siguiente:

1. Si se utilizan 8.000 gramos de queso costeño y se ajustan las cantidades necesarias de los otros ingredientes para producir pandebonos considerando la misma receta, ¿cuántos pandebonos se pueden producir? Indique cómo lo calculó.
2. Calcule la cantidad de gramos de queso costeño requerido para fabricar 50, 100, 150, 200, 350, 600 y 1.000 pandebonos. Explique cómo obtuvo los resultados solicitados.

3. Realice una tabla donde se muestre el número de pandebonos y los gramos de queso requeridos según los datos del punto 2.
4. Si se utilizan 2.000 gramos de queso costeño y se ajustan las cantidades necesarias de los otros ingredientes para producir pandebonos sin alterar la receta, ¿cuántos pandebonos se pueden producir? Indique cómo lo calculó.
5. Calcule la cantidad de gramos de areparina requeridos para fabricar 50, 100, 150, 200, 350, 600 y 1.000 pandebonos.

Tarea 2: Relación entre magnitudes

A partir de los resultados de la actividad anterior, realice lo indicado o responda las siguientes preguntas:

1. Calcule el número de pandebonos que sin alterar la receta se pueden producir con 240 g. de queso costeño, con 560 g., con 6.000 g. y con 4.800 g, teniendo los gramos necesarios de los otros ingredientes.
2. Complete la siguiente tabla:

Tabla 3. Relación gramos de queso costeño vs número de pandebonos

Gramos de queso costeño				7.200	8.000		12.800	13.600
Número de pandebonos	1	100	400			700		

3. Explique cómo obtuvo los resultados de la tabla anterior.
4. Determine las magnitudes y cantidades que intervienen en la situación y sus unidades de medición.
5. Escriba de qué depende la cantidad de queso utilizado en cada caso. Explique su respuesta.
6. Escriba cuánto queso se requiere para producir un pandebono, para 2, para 10.
7. Escriba una expresión que permita calcular la cantidad de gramos de queso necesarios para producir una cantidad cualquiera de pandebonos.

Tarea 3: Validando la relación entre magnitudes

A partir de los resultados del numeral 5 de la Tarea 1, realice lo indicado y responda las siguientes preguntas:

1. Complete la siguiente tabla para el caso de la cantidad de areparina necesaria para producir pandebonos:

Tabla 4. Relación gramos de areparina vs número de pandebonos

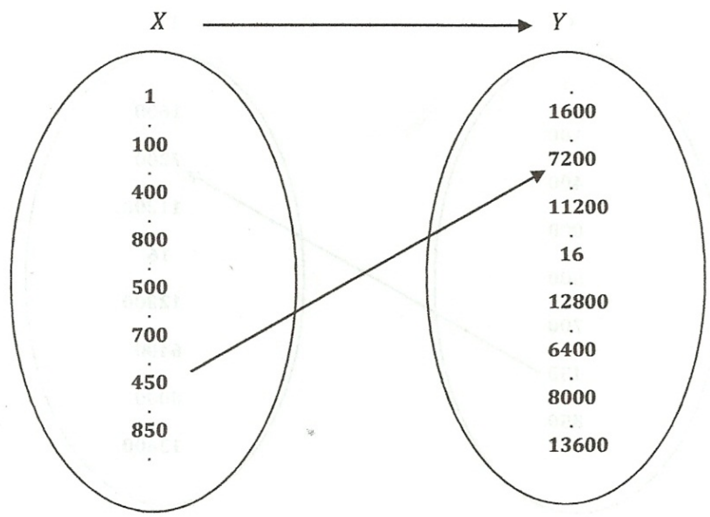
Gramos de areparina				7.200	8.000		12.800	13.600
Número de pandebonos	1	100	400			700		

2. Escriba una expresión que permita calcular los gramos de areparina requeridos para fabricar una cantidad cualquiera de pandebonos.
3. Explique la validez de las siguientes afirmaciones:

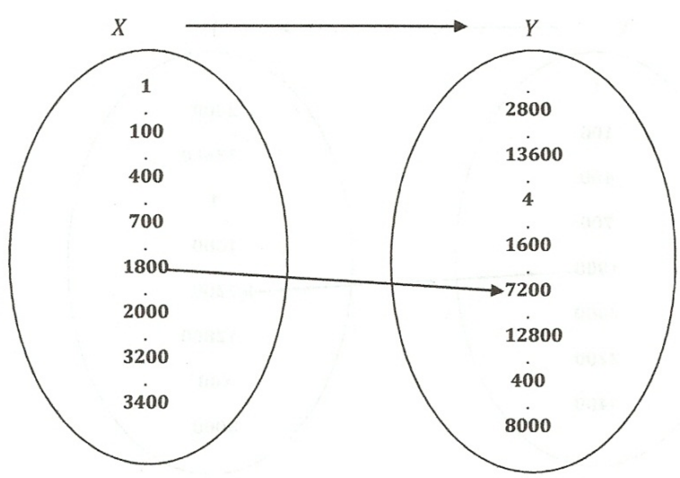
"Para un número determinado de pandebonos a producir, existe una única cantidad gramos de queso necesario para esta producción"

"Para un número determinado de pandebonos a producir, existe una única cantidad de gramos de Areparina necesaria para esta producción"

4. Complete los siguientes diagramas que relacionan:
a. Número de pandebonos (X) Cantidad de gramos de queso (Y)



b. Número de pandebonos (X) Cantidad de gramos de areparina (Y)



5. Plantee por lo menos dos situaciones, en contextos diferentes a la producción de pandebonos, en las cuales se presenten relación entre cantidades o magnitudes.

Esta situación consta de 3 tareas, cada una con un propósito específico; la Tarea 1 (Comprendiendo la situación) pretende que los estudiantes comprendan la situación, identificando el concepto de magnitud y reconociendo estos elementos en la situación dada; con la Tarea 2 (Relación entre magnitudes), los estudiantes deben identificar la relación entre las magnitudes dadas en la situación y con la Tarea 3 (Validando la relación entre magnitudes) se hace una validación de la relación entre las magnitudes identificadas con otra materia prima.

3.2. Situación 2 (S2): Preparación de la mezcla para el pandebono y expresiones algebraicas

Esta Situación consta de 4 tareas; la Tarea 1 (Expresiones algebraicas) consiste en hacer que los estudiantes reconozcan y manipulen tantos los términos variantes como los invariantes en una expresión algebraica, mediante la comprensión del significado práctico del coeficiente de la variable x, en una expresión de la forma: $y = mx$ también que manipulen una expresión algebraica para pronosticar valores de la variable dependiente a partir de valores conocidos de la variable independiente y viceversa; con la Tarea 2 (Representación gráfica) se pretende que los estudiantes pasen de un lenguaje verbal a un lenguaje tabular, identifiquen magnitudes dependientes e independientes e indistintamente calculen una magnitud a partir de otra, posteriormente pasen a una representación gráfica, reflexionen sobre la interpretación de la ubicación de un punto en el plano cartesiano; reconozcan de forma práctica el concepto de razón de cambio y su interpretación contextual; la Tarea 3 (Variaciones lineales con el programa Excel 1) busca una articulación con las TIC, haciendo que los estudiantes realicen una representación tabular y gráfica utilizando el software Excel, verificar los resultados con los obtenidos manualmente y reflexionar sobre el procedimiento técnico del software para obtener los resultados; la Tarea 4 (Variaciones lineales con el programa Excel 2), está orientada a que los estudiantes aprovechen la facilidad del recurso tecnológico, realicen una serie de representaciones tabulares que les permita analizar el efecto de aumentar o disminuir la razón de cambio y posteriormente visualicen este comportamiento a través de sus correspondientes representaciones gráficas. Para realizar estas actividades se tiene en cuenta la misma relación de materias primas de la Situación 1 que aparece en la Tabla 2.

3.3. Situación 3 (S3): Comercializando pandebonos y la función lineal

Esta Situación consta de 3 tareas relacionadas con la función lineal; la Tarea 1 (Relación entre representación tabular y expresiones algebraicas), consiste en los estudiantes deben establecer una relación entre una representación tabular y las expresiones algebraicas, a partir de considerar términos económicos como son los costos de producción y la ganancia, en términos del número de pandebonos producidos, identificar relaciones de proporcionalidad directa y una reflexión respecto a la continuidad; la Tarea 2 (Lectura e interpretación de representaciones gráficas) permite a los estudiantes realizar una lectura e interpretación de una representación gráfica de forma contextualizada, afianzar el concepto de razón de cambio y el procedimiento para su cálculo, manipular indistintamente el cálculo de una magnitud a partir de otra; la Tarea 3 (Relaciones lineales de tendencia decreciente) afianza el manejo del plano cartesiano para la construcción de gráficos a partir de una representación tabular, avanza en la interpretación de los gráficos al observar su tendencia, reflexión sobre la continuidad, calculo e interpretación de razón de cambio y reconocimiento de relaciones de tendencia decreciente y finalmente el paso a una expresión algébrica.

Para desarrollar estas actividades esta Situación suministró la siguiente información; el costo de producción de 350 pandebonos ($ 108.500) que incluye el costo de las materias primas, el de transporte y de las bolsas para empaques; el precio de venta de cada pandebono ($500); además la Tarea 2 presentó dos gráficas, la de Costo de producción vs número de pandebonos y la de Ganancia vs número de pandebonos.

3.4. Situación 4 (S4): Costos fijos y la función afín

Esta situación consta de 4 tareas relacionadas con la función afín; la Tarea 1 (Relación, gráficas y expresiones algebraicas) está diseñada para que los estudiantes manipulen diferentes sistemas de representación, a partir de un lenguaje verbal pasar a un lenguaje tabular, reconociendo cantidades variantes e invariantes mediante la identificación de costos que tienen que ver con la producción de pandebonos (costos fijos y costos variables) y finalmente pasar a una expresión algebraica y utilizar esta expresión para pronosticar magnitudes. En la Tarea 2 (Gráficas y relaciones lineales mediante Excel) se afianza la construcción de tablas en Excel, dando énfasis a la interpretación del proceso instruccional para calcular la variable dependiente en este caso el costo total de producción y comparar con el proceso realizado manualmente; esta tarea implica también hacer la representación gráfica y a partir de esta hallar la razón de cambio y el punto de corte con el eje dándoles una interpretación en contexto. Con la Tarea 3 (Lectura e interpretación de gráficas cartesianas de Excel) se reafirma la construcción de tablas y gráficos en Excel para analizar su comportamiento conforme a las siguientes modificaciones propuestas: cambia el costo fijo y la razón de cambio permanece constante y viceversa, es decir el costo fijo permanece constante y la razón de cambio si varía, adicionalmente se debe escribir la expresión algebraica para cada situación. Corresponde además hacer la interpretación en contexto de los parámetros de la ecuación afín (razón de cambio y corte con el eje y). Finamente la Tarea 4 (Construyendo modelos funcionales) plantea 5 expresiones algebraicas, 2 correspondientes a la función lineal y 3 correspondientes a la afín para que los estudiantes escribieran una situación en cualquier contexto, que respondiera a la expresión dada.

Para realizar esta Situación se entrega la siguiente información; el costo total de producción de cierta número de pandebonos incluye costos fijos (generados por el mantenimiento de la infraestructura); los costos variables (generados por la materia prima y otros insumos); un costo básico estimado de $ 15.000 para cualquier producción que se realice en el laboratorio para garantizar el mantenimiento de la infraestructura; se tiene en cuenta además la información de la Situación 3 sobre los costos variables para 350 pandebonos.

3.5. Situación 5 (S5): Reconociendo el modelo de función constante

Esta Situación consta de 3 tareas relacionadas con la función constante; la Tarea 1 (Comprendiendo la situación) consiste en construir una tabla que relaciona dos magnitudes una de las cuales permanece constante (masa unitaria en gramos) mientras que la otra si varía (número de pandebonos) dando explicación de cómo se obtienen los resultados; se deben presentar los resultados en un diagrama Sagital y en el plano cartesiano, comentar sobre lo observado y proponer una expresión algebraica para este modelo funcional; la Tarea 2 (Afianzando el modelo funcional constante) toma en cuenta la siguiente propuesta: a Daniel se le ocurre una situación en la cual los pandebonos podrían ser de 60 g, 65 g, 85 g, 90, 100 g, 110 g y siempre se deben fabricar 200 pandebonos. Con la información dada se debe construir una tabla que relaciona las mismas magnitudes de la Tarea 1 pero en condiciones contrarias, es decir, el número de pandebonos permanece constante y la masa unitaria en gramos, varía. También se deben mostrar los resultados en un diagrama Sagital y hacer la representación gráfica en el plano cartesiano, comentar sobre lo observado y proponer una expresión algebraica que describa el modelo funcional; la Tarea 3 (Afianzando el modelo funcional) presenta 5 representaciones gráficas correspondientes a: una función lineal, dos a funciones afines, una creciente y otra decreciente, una función constante respecto a Y, y otra constante respecto a X, al estudiante se le solicita escribir la interpretación de lo que representa cada gráfica y proponer una expresión algebraica correspondiente.

Para esta Situación se parte de la información dada en la Situación 1 de que en la etapa de producción de pandebonos se parten porciones de masa de 60 gramos y con ellas se forman pandebonos del mismo tamaño y forma.

4. Discusión de resultados y algunas conclusiones

A continuación se presentan los aspectos más significativos alcanzados por los estudiantes participantes en el estudio de la implementación de la Unidad didáctica sobre la Función lineal y afín y la producción de pandebonos, con relación a la Situación 1:

Se observa, en términos generales, que los estudiantes determinan las magnitudes involucradas en la situación (número de pandebonos y cantidad en gramos ya sea de queso costeño o areparina), los estudiantes explican las relaciones entre estas magnitudes al reconocer que al aumentar o disminuir el número de pandebonos también aumenta o disminuye la cantidad de gramos de queso costeño o areparina, es decir están explicitando una relación de dependencia entre dos magnitudes que varían, de modo que cambios en una de ellas genera cambios en la otra; construyen y completan el registro tabular solicitado, completan el diagrama sagital y argumentan respuestas asociadas con la correspondencia entre magnitudes.

Además se puede inferir que los anteriores elementos corresponden al nivel situacional de Matematización horizontal pues reflejan una comprensión de la situación desde el contexto de producción de pandebonos. Otros elementos que también corresponde a este nivel son: el hecho de utilizar diversos procedimientos para obtener la respuesta, en tanto los estudiantes utilizan diferentes puntos de vista para visualizar el problema; de igual manera la representación de la relación de correspondencia en un diagrama sagital o una expresión algebraica, pues muestran diferentes formas para esquematizar el problema. Adicionalmente se visualiza una tendencia a ascender a otros niveles, es decir iniciar un proceso de Matematización progresiva, lo que se observa cuando los estudiantes escriben una expresión algebraica para expresar la relación, indicando con ello la identificación de una relación que se puede esquematizar y describir mediante un lenguaje algebraico.

Otro aspecto relevante de esta implementación, es que los estudiantes muestran un acercamiento a los estándares que guían esta situación, en el sentido de estar diseñada en el marco de una situación cotidiana para los estudiantes (la producción de pandebonos), condicionada por fenómenos de variación que implican dependencia entre variables y por tanto admite ser modelada matemáticamente en este caso por la función lineal.

4.1 Resultados generales y en relación a las otras Situaciones

En primer lugar la mayoría de los estudiantes determinaron las magnitudes involucradas en las situaciones (número de pandebonos y cantidad en gramos ya sea de queso costeño o areparina), explicaron las relaciones entre estas magnitudes al reconocer que al aumentar o disminuir el número de pandebonos también aumentaba o disminuía la cantidad de gramos de queso costeño o areparina, es decir explicitaron una relación de dependencia entre dos magnitudes que varían, de modo que cambios en una de ellas genera cambios en la otra; construyendo y completando el registro tabular solicitado, completando el diagrama sagital y argumentando respuestas asociadas con la correspondencia entre magnitudes.

De igual forma un alto porcentaje de estudiantes (90%) lograron: (a) la identificación de la cantidad de gramos de queso costeño y de almidón agrio requeridos para fabricar un pandebono, lo cual permite la identificación de la razón de cambio como un valor constante que representa la variación de una variable respecto a la otra, (b) el reconocimiento e interpretación de este valor dentro de una expresión algebraica, apropiación del procedimiento para calcularlo, manipulación de este valor para determinar el valor de una variable o de otra dependiendo de unos valores conocidos. Estos aspectos aparte de afianzar el reconocimiento de la relación funcional, muestran el desarrollo del pensamiento variacional, que se manifiesta cuando los estudiantes detectan las variables que cambian y el comportamiento de este cambio, es decir la variación involucrada dentro de una situación que luego representan a través de expresiones algebraicas y (c) la expresión de la relación funcional mediante diferentes sistemas de representación: tabular, gráfico y algebraico y la transformación de un sistema de representación en otro; a propósito se reconoce el tabular como un sistema clave en tanto favorece la visualización de las magnitudes en juego y su comportamiento, sea que estas varíen o alguna de ellas permanezca constante; esto se presentó en las situaciones, cuando fue preciso construir una tabla y en otros donde se requería completarla.

Respecto a las gráficas, los estudiantes tuvieron oportunidad de construirlas, leerlas e interpretarlas y en cada una de estos casos se expresa la dependencia entre dos variables mediante la correspondencia punto a punto y se construye la idea de variación de una función la cual se manifiesta en conceptos relacionados con la función lineal, tales como la razón de cambio. Es preciso aclarar que hacer lectura de la gráfica, implica identificar las variables que se representan en cada uno de los ejes e identificar una coordenada de un punto (desconocida) a partir de la otra coordenada (conocida), es decir hallar el valor de una variable a partir de un valor conocido de la otra variable por ejemplo; mientras que la interpretación de la gráfica está asociada a describir la función representada de una manera global, considerando las características generales, tales como su forma, su comportamiento y sus variaciones (Azcárate & Deulofeu, 1996, p. 69).

Se logró que los estudiantes realizaran la construcción de tablas y los gráficos lineales mediante el software Excel y la confrontación ante las dificultades técnicas que presenta esta herramienta para las lecturas precisas de las coordenadas de un punto.

Es conveniente resaltar el manejo que demostraron la mayoría de los estudiantes de los diferentes sistemas de representación y la transformación de un sistema en otro, lo que afianza la conceptualización sobre la relación funcional ya que cada uno de los sistemas de representación permite expresar aspectos particulares un fenómeno de variación o una dependencia entre variables; un ejemplo de la visualización de este enfoque se presenta cuando los estudiantes logran completar una tabla pues con ello muestran el reconocimiento de una regularidad, de un patrón de comportamiento que en forma intuitiva no es más que la identificación de un modelo y el manejo implícito de una expresión algebraica, y al argumentar sus procedimientos para obtener la respuesta están potencializando procesos de pensamiento tales como el razonamiento y la comunicación, de igual manera se promueven procesos de pensamientos numéricos y en especial el variacional que se desarrolla mediante la identificación de fenómenos de variación y sobre el razonamiento algebraico.

En esta dirección de la discusión, sobresale el reconocimiento por parte de los estudiantes, del modelo que subyace a la variación, equivalente a abstraer la regla de dependencia entre las dos variables, especialmente si pasan a una expresión algebraica, lo cual implica un conocimiento del lenguaje algebraico y del hecho que una fórmula de dos variables representa una función (Azcárate & Deulofeu, 1996, p. 81).

Desde la perspectiva de modelación se evidenció una movilización de elementos desde el nivel situacional de Matematización horizontal hacia la Matematización vertical, es decir se visualiza una tendencia a iniciar un proceso de Matematización progresiva que se caracteriza porque no hay ruptura entre un nivel y otro por el contrario es una división casi imperceptible y no se puede establecer con precisión los elementos exclusivos de un nivel y de otro, ratificando que un estudiante puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido ((Bressan & Gallego, 2011, p. 7); en este sentido se observa que comportamientos tales como la identificación de una relación entre magnitudes, la interpretación de una descripción verbal, la traducción a una representación tabular, la diferenciación de cantidades que varían y que no varían pertenecen al nivel situacional de Matematización horizontal por cuanto evidencian la comprensión de una situación y su visualización desde diferentes puntos de vista, de aquí en adelante se inicia un proceso de Matematización progresiva que conduce a la Matematización vertical caracterizada por la identificación de relaciones y regularidad entre magnitudes (nivel referencial) dado que permite la identificación del modelo que representa una determinada relación, y la utilización de diferentes lenguajes de representación (nivel general) ya que dan cuenta del reconocimiento de características similares y la conexión con situaciones anteriores.

Resulta significativo admitir además elementos implícitos dentro del hecho de que un estudiante realice el paso de una gráfica a una expresión algebraica, tales como la realización de una lectura de las coordenadas de los puntos, la identificación de las variables asignadas a cada eje, la interpretación de la escala de medición utilizada en cada caso, la interpretación de un punto de la gráfica en términos de sus coordenadas y reafirmar el procedimiento para calcular la razón de cambio e interpretarlo en términos de la tendencia de la gráfica. Solamente estos dos lenguajes, gráfico y algebraico, como lo expresan (Azcárate & Deulofeu, 1996, pp. 91-98), son potentes pues facilitan la caracterización de un modelo funcional lineal y afín, ya que la gráfica permite visualizar variaciones e intervalos constantes, crecimiento y continuidad y la expresión algebraica que permite determinar valores de ambas variables con precisión.

Otro aspecto que marca este proceso de implementación lo dejan ver los estudiantes cuando presentan la falta de una tendencia definida respecto a la continuidad o no de los puntos de una gráfica cartesiana, que es una de las dificultades que se presentan con más frecuencia en estudiantes de este nivel; otro más es la tendencia de los estudiantes a permanecer en el contexto de pandebonos que al parecer les da seguridad pues en este contexto con mayor facilidad identifican un modelo, proceso que se les dificulta en contextos diferentes; en pocos casos se presenta un acercamiento incipiente hacia otro contexto. En este sentido y respecto a la lectura e interpretación de gráficos, algunos estudiantes presentaron dificultades en el manejo de los signos de las coordenadas de los puntos utilizados para calcular la razón de cambio especialmente con coordenadas negativas y en cuanto a la expresión algebraica de la función constante, algunos estudiantes presentaron la dificultad de expresar la función en términos de X.

4.2 Visiones futuras

Estos resultados constituyen un punto de partida para diseñar otros modelos funcionales partir de las situaciones problémicas que surgen a la luz de los proyectos productivos agroindustriales, en este sentido se podrían considerar la función cuadrática, la función inversa y la función compuesta; para nuevos trabajos diseñados que tomen este como referencia, es conveniente realizar algunos ajustes en cuanto al diseño de la estructura, hacerlo más conciso eliminando preguntas que resultaron repetidas y un poco confusas.

Bibliografía

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Síntesis. Madrid.

Bressan, A., & Gallego, M. (s.f.). *La Educación Matemática Realista: Bases teóricas*. Recuperado el 2 de octubre de 2012, de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/emr_bases_teoricas.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Editorial Zorzal .Traducción de: FREGONA, Dilma. Buenos Aires.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publishing Co. Holanda.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer.* Dordrecht, Reidel Publishing Co. Holanda.

Gómez, P. (2002). *Análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas*. Bogotá: Revista EMA.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada. Granada.

Hadamard, J. (1949). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press. New York

Kieran, C. (1992). *The Learning and Teaching of School Algebra*. Universidad de los Andes. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticos*. MEN. Bogotá.

Pandebono, (s.f.). En Wikipedia. Recuperado el 17 de abril de 2016, de https://es.wikipedia.org/wiki/Pandebono

Puig, L. (1997). *Análisis Fenomenológico*. Horsori. Barcelona.

Rico, L. (1997). *Los organizadores del Currículo en Matemáticas*. Horsori. Barcelona.

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different side of the same coin*. Kluwer Academic Pubisher. Jerusalen.

Socas, M. (1999). *Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Valladolid.

Autores:

Torres Rengifo Ligia Amparo: Profesora del Área de Educación Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali (Colombia S.A). ligia.torres@correounivalle.edu.co

Angulo Vallejo Ofelia: ofeliava@gmail.com, carrera 48 Nº 12B-60 apto 302B Plazuela I, barrio Panamericano, Santiago de Cali (Valle del Cauca), Colombia S.A.
Ingeniera Química (Universidad del Valle (UV), 1987), Magíster en Administración de Empresas (UV, 1996), Magíster en Educación énfasis en Educación Matemática (UV, 2014). Tel: 3216407072.