UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 29-40

Metáforas conceptuales de las relaciones lineales que manejan los estudiantes de economía

Claudia Margarida Acuña Soto, Elizabeth Hernández Arredondo,

Vicente Liern Carrión

Fecha de recepción: 07/02/2016
Fecha de aceptación: 15/05/2017

Resumen	El uso de relaciones lineales en el trabajo de los economistas permite modelar e interpretar fenómenos, al menos de manera aproximada, y esto resulta fundamental para la toma de decisiones. Comprobamos que la construcción de metáforas conceptuales posibilita la proyección del dominio de la economía al matemático, pero encontramos que el proceso inverso resulta difícil de recorrer sin construir nuevas metáforas conceptuales. **Palabras clave**: Relaciones lineales, economía, matrices y vectores, metáforas
Abstract	Economists' use of linear relations allows for the interpretation and creation of models based on phenomena, which can in turn be later used in decision making, in an approximate way at least. The construction of conceptual metaphors permits the projection of economy's dominion to the mathematician. We have found, however, that the process is difficult to be replicated the other way around without new conceptual metaphors. **Keywords**: Linear relationship, economics, matrix and vectors, metaphors.
Resumo	O uso de relações lineares no trabalho dos economistas permite modelar e interpretar os fenômenos, pelo menos de modo aproximado, o que é essencial para a tomada de decisões. Comprovamos que a construção de metáforas conceituais possibilita a projeção do domínio da economia ao matemático, mas descobrimos que o processo inverso é difícil de recorrer sem que se construa novas metáforas conceituais. **Palavras-chave**: Relações lineares, economia, matrizes e vetores, metáforas

1. Introducción

Desde el punto de vista de la construcción del conocimiento, la comprensión de un dominio conceptual en términos de otro (metáforas conceptuales) constituye una sólida estructura de apoyo para la investigación educativa. Estas metáforas forman una adecuada base epistemológica para el pensamiento, si consideramos que la actividad de la mente tiene raíces en la actividad del cuerpo, pero al mismo tiempo no son deterministas (Johnson, 1991), por lo que su uso no necesariamente llega a una conceptualización adecuada. Por esta razón, en nuestro trabajo estamos interesados en disipar algunas incógnitas asociadas a las metáforas conceptuales (Lakoff y Núñez, 2000) que subyacen al tratamiento e interpretación de los modelos lineales que se usan en economía, como son los vectores, las matrices y los sistemas de ecuaciones, para interpretarlos en contexto.

Lakoff y Núñez (2000) sugieren que la forma en que se construye el pensamiento matemático se basa en el hecho de que las ideas surgen de los procesos cognitivos y corporales de las personas. Además, según Jonhson (1991), para llegar a la conceptualización es necesario utilizar esquemas que derivan de las experiencias. Actualmente se usa el término esquema de imagen (Lakoff, 1990) para referirse a todo aquello que se relaciona con cierta idea general y especialmente matemática que lo engloba como un todo.

Aun aceptando los mecanismos cognitivos y corporales de los individuos como germen de las ideas, se requieren las llamadas metáforas conceptuales para lograr la culminación de la construcción del conocimiento. Es necesaria una proyección conceptual del esquema imagen entre dos dominios, uno de partida y uno de llegada (Acevedo y Font, 2004).

En esta investigación observamos las metáforas llamadas ontológicas como son: (1) La del contenedor, que aparece, por ejemplo, cuando los estudiantes organizan matrices con base en vectores y (2) La del camino, que surge cuando interpretan las fluctuaciones de un espacio generado en economía.

En la Figura 1 presentamos un esquema de la construcción de las metáforas conceptuales (Font y Acevedo, 2003) subyacentes a esta investigación y que vincula los aspectos relevantes con base en la construcción de las metáforas conceptuales.

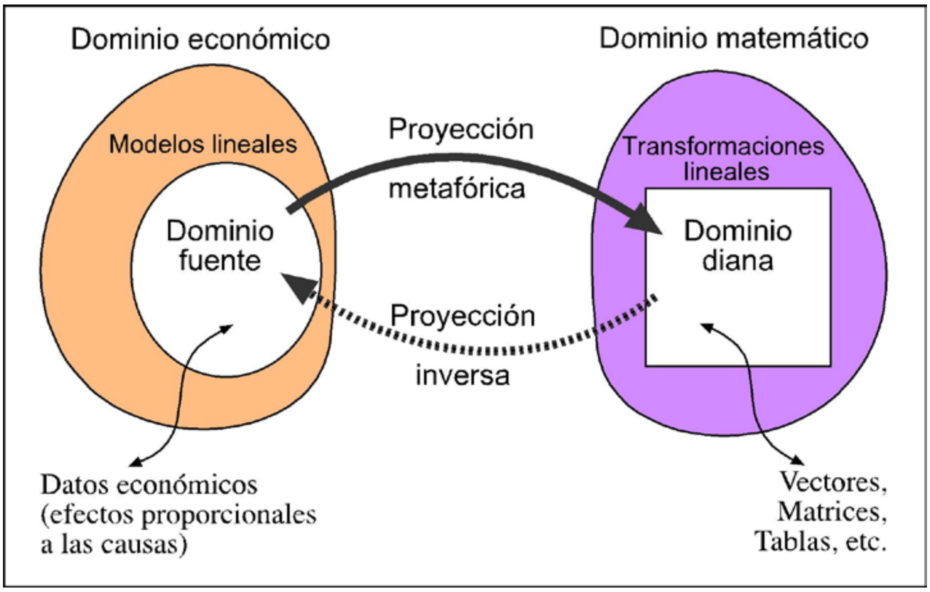


Figura 1. Esquema de la relación metafórica en funcionamiento.
Fuente: Elaboración propia.

En esta investigación nos centraremos en estudiantes de nuevo ingreso a los estudios de Grado en Economía, a quienes se les pide interpretar elementos que surgen de los modelos lineales en un dominio matemático, en un dominio económico o trasladándolos de un dominio a otro. Como se verá, al proyectar entre dominios es cuando surgen las mayores dificultades.

2. Punto de partida

El alumno que accede a titulaciones universitarias relacionadas con la Economía, la Empresa o las Ciencias de Gestión, normalmente ha cursado asignaturas de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, en las que se ha hecho hincapié en los problemas con sentido económico y en los que han tenido que modelar en distintas ocasiones. Sin embargo, la realidad con la que nos encontramos en los primeros cursos universitarios es que el paso del dominio económico al matemático, y viceversa, así como el proceso de formulación de los problemas, les resulta bastante complicado a nuestros estudiantes.

Como en este trabajo nos centramos en los modelos lineales, para fijar mejor nuestro punto de partida vamos a exponerlo a partir de un ejemplo: los sistemas de ecuaciones lineales. Normalmente el alumno resuelve sin dificultad estos sistemas, pero otra cuestión es que sea capaz de plantearlo (proyección metafórica), resolverlo (dominio diana), posteriormente de interpretar los resultados (proyección inversa) o de vislumbrar su enorme utilidad como una estructura capaz de expresar un equilibrio entre los dominios involucrados. Pese a ser el principio de la economía matemática, no siempre resulta fácil transmitir que:

> el concepto de equilibrio es fundamental en economía. Una situación de equilibrio es una situación estable u óptima, porque en ella la empresa opera con el menor coste posible, obtiene el máximo beneficio, la asignación de los recursos económicos es la mejor para la utilidad de un individuo, etc. Todas estas posibilidades tienen en común que se cuenta con varios fenómenos económicos que suceden simultáneamente y se debe determinar el punto o puntos en los que la situación es beneficiosa (Liern 2012, pp. 11).

Con el objetivo de entender la dificultad que provoca en los estudiantes el paso de un dominio a otro, planteamos un sistema de ecuaciones lineales que representa el equilibrio entre tres situaciones económicas, que se dan simultáneamente, pero del que no se conoce el origen de las circunstancias modeladas. Si recurrimos al esquema que aparece en la Figura 1, estamos partiendo de un objeto que se encuentra directamente en el dominio diana, dentro del dominio matemático. Aunque el sistema de ecuaciones no proporcione al estudiante información suficiente para que la *proyección inversa* sea unívoca, lo cierto es que hay varias posibilidades que debería ser capaz de descartar. Veámoslo más claramente con el ejemplo que aparece en la Tabla 1.

Enunciado	Objetivo y dominio
Consideramos el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\left\{\begin{array}{r} 2x+3y+2z=36 \\ 4x+2y+z=35 \\ 3x+3y+2z=40 \end{array}\right.$ A) Calcula la solución del sistema x*, y*, z*. B) Razona si x*, y*, z* puede ser solución en alguno de los escenarios económicos siguientes: B.1 Precios de equilibrio en un mercado. B.2 Incremento de precios en un mercado. B.3 Producción de una empresa. B.4 Incremento en la producción de una empresa.	Obtener la solución de un sistema y asociar la solución a una situación económica. **Dominios:** Matemático → Económico.

B.5 Beneficios de una empresa. B.6 Incremento en los beneficios de una empresa.	

Tabla 1. Ejemplo de proyección desde el dominio matemático al económico.
Fuente: Elaboración propia.

Como la solución del sistema es x* = 4, y* = 10, z* = - 1, el alumno debería saber que ésta no puede representar ni precios de equilibrio ni producción, puesto que, en estos casos, los valores negativos no tienen sentido y sólo en circunstancias muy especiales y por un breve periodo de tiempo (campaña de promoción en la que hay un obsequio, remodelación parcial de la empresa, etc.) podrían tenerlo las soluciones nulas. Esto significa que la solución podría pertenecer a los escenarios B.2, B.4, B.5 y B.6, pero no a los restantes.

Quizás en el ejemplo anterior pudiese parecer que la elección de los escenarios resultaba muy obvia, pero un cambio en el enunciado puede modificar completamente la respuesta de algunos alumnos. Supongamos que el problema se planteaba en dos fases:

Enunciado	Objetivo y dominio
Fase 1: Consideramos el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $(A) = \begin{cases} 2x+3y+2z = 35 \\ 4x+2y+z = 35 \\ 3x+3y+2z = 40 \end{cases}$ Resuelve el sistema. **Fase 2:** Tras un periodo de tiempo, se comprueba que la primera ecuación de (A) debería ser 2x+3y+2z=36, en lugar de la que aparece en el sistema. Calcula la solución x*, y*, z* del nuevo sistema: $(B) = \begin{cases} 2x+3y+2z = 36 \\ 4x+2y+z = 35 \\ 3x+3y+2z = 40 \end{cases}$ Razona si x*, y*, z* es solución válida en alguno de los escenarios económicos siguientes: B.1 Precios de equilibrio en un mercado. B.2 Incremento de precios en un mercado. B.3 Producción de una empresa. B.4 Incremento en la producción de una empresa. B.5 Beneficios de una empresa. B.6 Incremento en los beneficios de una empresa.	Obtener la solución de un sistema y asociar la solución a una situación económica. **Dominios:** Matemático → Económico.

Tabla 2. Modificación de un ejemplo de proyección desde el dominio matemático al económico.
Fuente: Elaboración propia.

El sistema (A) de la Tabla 2 tiene como soluciones x = y = z = 5, mientras que las soluciones de (B) ya hemos visto en el ejemplo de la Tabla 1 que son x = 4, y = 10, z = - 1. Por supuesto, la respuesta debería ser la misma que en el ejemplo anterior. Sin embargo, la metáfora del camino que viene inducida por "*Tras un periodo, se comprueba que la primera ecuación debería…*" hace que algunos alumnos tengan dificultades para ver que (A) y (B) son dos sistemas distintos y erróneamente relacionan las soluciones cuando ven que alguna de ellas presenta resultados inesperados. Así, algunos alumnos argumentan ideas equivocadas como que la solución es la suma de las dos, es decir x=5+4=9, y=5+10=15, z=5-1=4, con lo cual las soluciones de (B) servirían para cualquiera de los escenarios presentados.

Por otra parte, creemos conveniente aclarar que todos los estudiantes han recibido instrucción sobre planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales, matrices, y los vectores se les han presentado como filas o columnas de una matriz. Precisamente esta última circunstancia desarrolla de forma implícita una *metáfora del contenedor* (Font, Acevedo, 2003; Saslaw, 1996) al concebir, metafóricamente hablando, a las matrices como *estanterías* cuyas filas o columnas están formadas por vectores. Como veremos más adelante, con estas estrategias, no resulta inmediato poder desprenderse de la asociación con el contenedor para utilizar o interpretar parte de sus elementos, en este caso los vectores (ver Figura 2).

Es significativo que, al menos desde los años ochenta, los manuales cásicos de Matemáticas para la Economía, como puede ser *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (Chiang, 1984), viesen la necesidad de introducir al alumno a la interpretación económica de cada "parte" del “contenedor” que son las matrices (en la Figura 3 puede verse un ejemplo de esto). Se trata de facilitarles la labor, tender un puente para recuperar el significado de cada porción de contenedor, o lo que D. Kahneman denomina: potenciar la *heurística de la disponibilidad* (Kahneman, 2012), aspectos cuyo dominio compete a la interpretación y no a los procedimientos matemáticos asociados.

124 STATIC (OR EQUILIBRIUM) ANALYSIS

4 Given the input matrix and the final-demand vector

$$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

(*a*) Explain the economic meaning of the elements 0.33, 0, and 200.
(*b*) Explain the economic meaning (if any) of the third-column sum.
(*c*) Explain the economic meaning (if any) of the third-row sum.
(*d*) Write out the specific input-output matrix equation for this model.

5 Find the solution output levels of the three industries in the preceding problem by Cramer's rule. (Round off answers to two decimal places.)

Figura 2. Ejemplo de interpretación de los elementos contenidos en una matriz.
Fuente: Fragmento de la página 124 de Chiang (1984).

Conscientes de la dificultad que supone para nuestros alumnos transitar de un dominio a otro y de la relación entre el enunciado y la resolución exitosa de este, nos hemos planteado realizar un experimento que nos permita extraer conclusiones acerca de las metáforas cognitivas que utilizan nuestros estudiantes. Además, intentaremos que el estudio nos proporcione información de cuándo las metáforas resultan beneficiosas o cuándo producen un “efecto ancla” (Kahneman, 2012) del que el alumno no está en capacidad de desprenderse.

3. Puesta en marcha

Hemos llevado a cabo un estudio con 147 estudiantes de primer semestre de Grado en Economía de la Universidad de Oviedo (UO) y de la Universitat de València (UV). Sus edades están entre 18 y 19 años y reciben las clases en distintas lenguas: 44 en español, 38 en inglés y 65 en valenciano. Consideraremos que los alumnos forman una sola población porque, una vez efectuado un contraste de igualdad de medias de las respuestas correctas realizadas por estudiantes de la UO y de la UV, no presentan una diferencia significativa entre ellas para un nivel de significación alto ($\alpha = 0.05$).

Para lograr nuestros objetivos, centraremos nuestro análisis en dos cuestiones:

a) Identificar las dificultades de los estudiantes en la resolución y/o interpretación de los problemas.

b) Reconocer la forma en la que fueron usadas las metáforas y analizar sus aplicaciones a la matemática y a la economía.

Los estudiantes contestaron a un cuestionario, basado en propuestas como las hechas en Liern (2013) en donde se presentaban situaciones de la vida cotidiana que les eran matematicamente accesibles y de interés. Este consistió en siete problemas que resolvieron en setenta minutos y que aparecen expresados en las tablas siguientes. Con el objeto de detectar las metáforas conceptuales en economía, en primer lugar usamos problemas que manejan un solo dominio (Tabla 2) y después otros que requieren el paso de un dominio a otro (Tabla 3). Los datos que manejaremos se extrajeron de las respuestas al cuestionario y de las notas de campo de la sesión de trabajo.

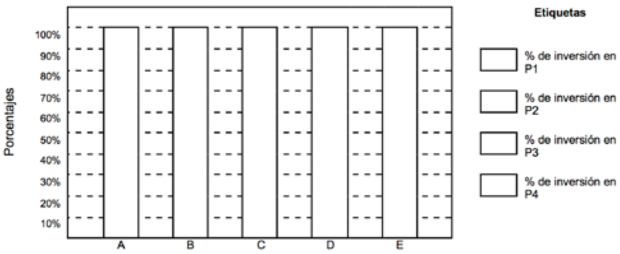
Enunciado	Objetivo y dominio
PROBLEMA 1. De las siguientes ecuaciones lineales, marca con una ***X*** las que sean homogéneas: $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$ $x - y = (\text{sen } 4)\, z$ $2x+3y-z=5$	Identificar un sistema de ecuaciones homogéneas. **Dominio matemático**.
PROBLEMA 2. Escribe un sistema lineal partiendo de la matriz aumentada $B=\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$. Comprueba que $x_1 = -10$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ es una solución particular del sistema anterior.	Transformar una matriz aumentada en un sistema de ecuaciones lineales. **Dominio matemático**.
PROBLEMA 4. Calcula ½ v_1-3v_2 con los vectores $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.	Determinar una combinación lineal de dos vectores. **Dominio matemático**.
PROBLEMA 5. Escribe el sistema $\begin{cases} x-5y=1 \\ -x+6y=3 \end{cases}$ como una ecuación vectorial y como un sistema matricial. Una vez se tienen los valores de *x* e *y* que son la solución del sistema, explica qué representan en los casos: a) Ecuación vectorial b) Sistema matricial.	Transformar un sistema de ecuaciones lineales en una ecuación vectorial y en una ecuación matricial. **Dominio matemático**.

Tabla 3. Problemas del cuestionario que pertenecen al dominio matemático.
Fuente: Elaboración propia.

Enunciado	Objetivo y dominio
PROBLEMA 3. Consideramos una economía con tres sectores: 1) combustibles y energía, 2) manufactura y 3) servicios. Combustibles y energía venden el 80% de su producción a manufactura, el 10% a servicios, y retiene el resto. Manufactura vende el 10% de su	Construir una tabla de intercambio, transformarla

<table>
<tr>
<td>producción a combustibles y energía, el 80% a servicios, y conserva lo restante. Servicios vende un 20% a combustible y energía, el 40% a manufactura, y retiene el resto.
3.1 Escribe el sistema de ecuaciones con el que se obtendrían los precios de equilibrio en ese mercado.
3.2 Construye una tabla de intercambio para esta economía.
3.3 Plantea un sistema de ecuaciones para determinar los precios que igualan los ingresos y gastos de cada sector.
3.4 Encuentra los precios de equilibrio cuando el precio para la producción de servicios es de 100 unidades.
3.5 ¿Cuántos sectores están involucrados en la solución?</td>
<td>en un sistema de ecuaciones y calcular la solución.

Dominios: Económico → Matemático.</td>
</tr>
<tr>
<td>PROBLEMA 6. Una empresa fabrica dos productos. Para obtener $1.00 del producto B, la empresa gasta $0.45 en materiales, $0.25 en mano de obra y $0.15 por concepto de costos indirectos. Para obtener $1.00 del producto C, la empresa gasta $0.40 en materiales, $0.30 en mano de obra y $0.15 en costos indirectos. Consideramos
$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0.45\\0.25\\0.15\end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{c}=\begin{bmatrix}0.40\\0.30\\0.15\end{bmatrix},$$
es decir, que b y c representan los “costes por dólar de ingreso” para los dos productos.
6.1 ¿Qué interpretación económica puede darse al vector 100b?
6.2 Construye una tabla de intercambio para esta economía.
6.3 Plantea un sistema de ecuaciones para determinar los precios que igualen los ingresos y gastos de cada sector.
6.4 Encuentra los precios de equilibrio cuando el precio para la producción de servicios es de 100 unidades.</td>
<td>Aplicar operaciones vectoriales en Economía.

Dominios: Económico → Matemático → Económico.</td>
</tr>
<tr>
<td>PROBLEMA 7. Un banco gestiona 5 carteras A, B, C, D y E, cuyo capital se distribuye en cuatro compañías P1, P2, P3 y P4 en la proporción que se indica en la tabla siguiente:
<table>
<tr><th>Compañías</th><th colspan="5">Carteras</th></tr>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr>
<tr><td>P1</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>0.25</td><td>0.3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>0</td><td>0.5</td><td>0.25</td><td>0.3</td><td>0.2</td></tr>
<tr><td>P3</td><td>0.2</td><td>0.1</td><td>0.25</td><td>0.1</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>P4</td><td>0.6</td><td>0.1</td><td>0.25</td><td>0.3</td><td>0.3</td></tr>
</table>
7.1 El banco desea ampliar el capital de sus carteras. Expresa el conjunto de todas las posibilidades que tiene el banco sin que se creen excedentes de capital.
7.2 Con la tabla anterior elabora un gráfico de barras que represente los vectores de las carteras.


7.3 Explica la relación que crees que existe entre las dos representaciones de un vector propuestas en los puntos 7.1 y 7.2.</td>
<td>Explorar representaciones de un espacio generado en Economía.

Dominios: Económico → Matemático → Económico.</td>
</tr>
</table>

Tabla 4. Problemas del cuestionario que requieren el paso de un dominio a otro.
Fuente: Elaboración propia.

4. Identificación de errores

Los porcentajes de estudiantes que contestaron a cada problema y de aciertos respecto del total se presentan en la Figura 3. Como puede apreciarse, la mayoría de alumnos tuvieron dificultades con los problemas 3, 6 y 7 que contienen una aplicación de los vectores en Economía (menos de un 20% responden a estas preguntas). Responderlas bien implicaba, por un lado, interpretar las relaciones matemáticas y los eventos específicos a tratar, pero además, el éxito dependía de que fuesen capaces de establecer adecuadamente las proyecciones del domino económico al matemático y viceversa.

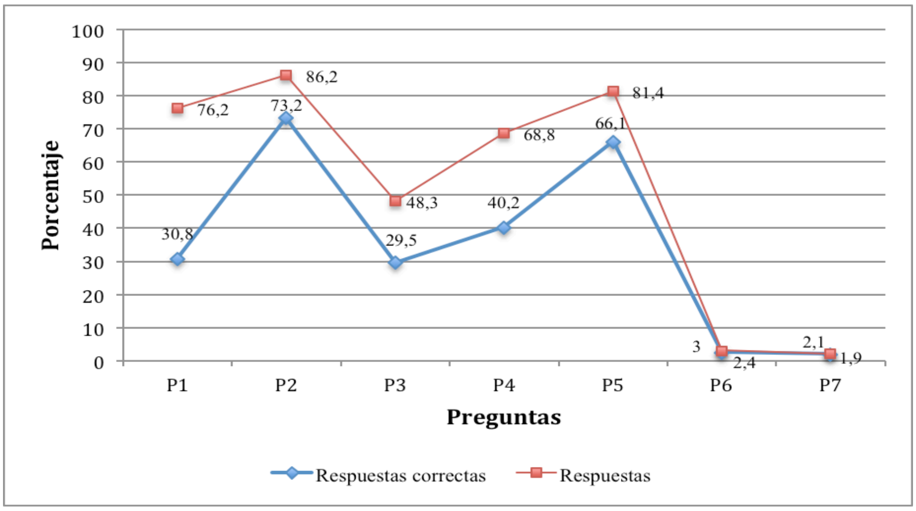


Figura 3. Porcentajes (respecto del total) de respuestas y de aciertos a las preguntas planteadas. Fuente: Elaboración propia.

En el resto de preguntas, en las que se piden operaciones conocidas o en los que la relación economía-matemáticas es más clara (porque la proyección de un dominio a otro no es necesaria o porque la proporciona el propio problema), los estudiantes recurren, sin demasiada dificultad, a diversas estrategias (ver Figura 4), como son los diagramas, las tablas o la formalización algebraica.

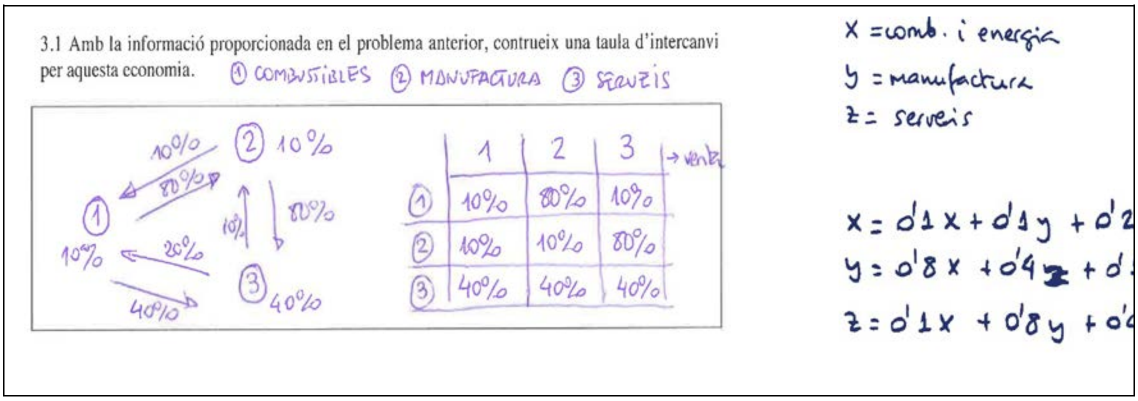


Figura 4. Ejemplos de algunas estrategias empleadas. Fuente: Respuestas al cuestionario.

Son de destacar algunos errores de procedimiento que se deben, generalmente a aspectos formales, de cálculo o de interpretación matemática (como puede verse en el ejemplo de la Figura 5) y en los que los mecanismos de visualización incorrecta de las matemáticas (Acuña, 2012) juega un papel importante.

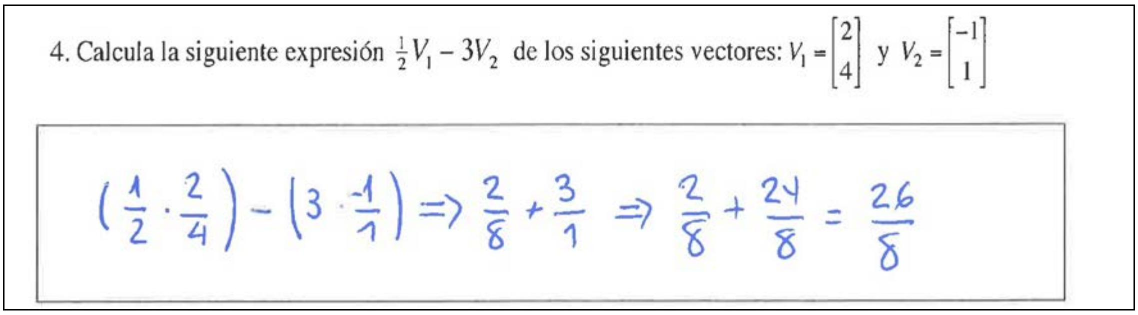


Figura 5. Ejemplo de un error por la disposición vertical de los vectores.
Fuente: Respuestas al cuestionario.

En la Tabla 5 presentamos un resumen de las clases de errores que aparecen en las soluciones y de los porcentajes sobre el total de los que los cometen. Los hemos agrupado en cinco tipos (desconocimiento, procedimentales, interpretativos, de estrategia y de sintaxis) y hemos calculado los porcentajes de cada uno de ellos respecto del total de estudiantes que han participado en la experiencia.

Tipo de error	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Desconocimiento del concepto	23.8	21.7	63.2	32.4	23.2	94.1	95.2
Procedimentales	12.1	7.5	2.8	21.2	15.2	1.2	1.1
Interpretativos	19.2	7.8	9.2	11.2	7.5	1.1	2.1
Elección de estrategia inadecuada	2.5	2.1	2.1	1.5	6.9	1.2	1.3
Confusión de la sintaxis	3.2	1.9	9.1	4.2	8.9	1.3	1.1

Tabla 5. Porcentaje de errores clasificados por tipos en cada pregunta.

Observamos que los porcentajes de error más grandes se refieren al desconocimiento de los conceptos, pero detectamos un importante problema de interpretación (relación vector-matriz-vector) y de procedimiento. El primero de ellos, que podría relacionarse con la construcción de la metáfora, es lo que se advierte en Chiang (1984) cuando propone recuperar la interpretación de cada elemento de una matriz (ver Figura 2). En cuanto a las deficiencias procedimentales, sin particularizar a cada estudiante, resulta más difícil saber si están relacionadas con la construcción de la metáfora.

5. Uso de metáforas

Para analizar las metáforas presentes en la solución de los problemas planteados, así como en el uso de los recursos operativos y de procedimiento, las hemos clasificado en dos grupos, de acuerdo a la imagen de esquema que usan: la metáfora del camino y la metáfora del contenedor, que antes hemos mencionado.

La metáfora del camino aparece en las respuestas a los problemas 3, 6 y 7, en los que tratan de dar sentido al contexto económico del problema. Aquí el esquema imagen presente es el del recorrido que da la experiencia sensorio-motriz conocida (véase Figura 6).

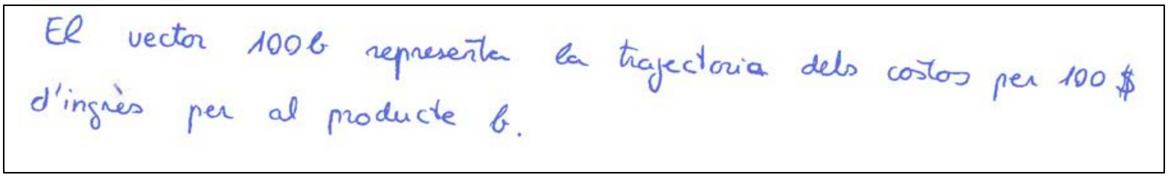


Figura 6. Ejemplo de expresión que alude a un camino usada por los estudiantes.
Fuente: Respuestas al cuestionario.

En cuanto a la metáfora del contenedor, que alude a elementos y propiedades que forman un contenedor, se encuentra presente en la mayoría de soluciones a los problemas (ver Figura 7).

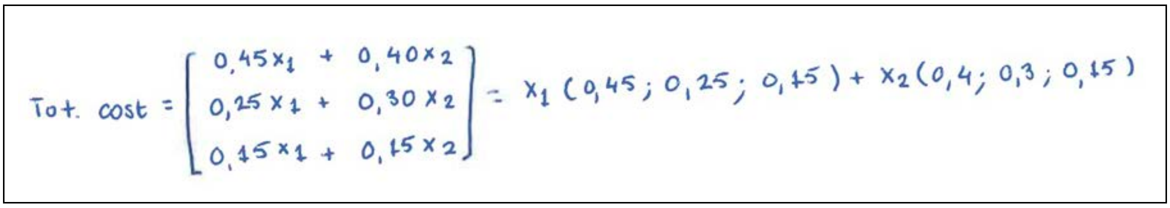


Figura 7. Una de las expresiones que aluden a un contenedor.
Fuente: Respuestas al cuestionario.

La proyección metafórica que ha permitido ver la matriz como un "contenedor" de la información, ha facilitado la relación economía-matemáticas, pero ha dificultado el análisis de las partes. Con los datos de nuestros cuestionarios, sólo alrededor del 4% utilizó adecuadamente la proyección inversa (ver Figura 1) para descifrar el significado económico de cada elemento de la solución matemática.

Encontramos que sólo con el conocimiento y los procedimientos cuantitativos sobre los modelos lineales los estudiantes no pueden hacer uso de las metáforas conceptuales mencionadas, aquellas que les permitirían separar y recomponer los a vectores en función de la interpretación económica. En ese caso se deben apoyar en las definiciones de los componentes matemáticos usados, esto es, recuperar las partes una vez conformado el todo, lo que los lleva a considerar la relación sintáctica de los signos expresados algebraicamente.

Revisando la construcción de las metáforas en ambos sentidos, observamos que interpretar las matrices como un todo y como la unión de las partes se relaciona también con el proceso de visualización (Acuña, 2012) que requiere tanto de los significados asociados (definición, operaciones, datos entre otros), como del aspecto que los vectores y matrices presentan, lo que crea dos relaciones identificadas pictóricamente: vectores de datos-matriz y matriz transformada-vectores transformados en cuyo caso, ambas debían ser interpretadas metafóricamente de forma equivalente. En nuestra opinión, para aumentar las posibilidades de éxito no sólo debemos observar la proyección metafórica, sino las relaciones sintácticas y espaciales que estructuran los elementos mencionados.

6. Discusión

Los estudiantes presentan dificultades para manejar relaciones lineales que se plasman en el desconocimiento de algunos conceptos o de la incapacidad para interpretar un vector como parte de una matriz. Esencialmente, esto se debe a la incertidumbre sobre los efectos de las transformaciones lineales sobre las matrices y sobre cada vector, lo que descontextualiza la información y ya no responde al tipo de información original, dificultando el uso de la metáfora del contenedor de manera inversa, puesto que no la reconocen.

El papel de las metáforas usadas depende mucho de factores de interpretación, ya que pese a estar disponibles y activadas, los estudiantes, en general, no supieron hacer uso de ellas para inferir la información y apoyarse en una para llegar a la otra. A este fenómeno hay que añadir la ambigüedad subyacente a la nomenclatura. Por ejemplo, el hecho de que tanto los puntos como los vectores se designen como una secuencia ordenada de n elementos, reduce las posibilidades de manejar bien los conceptos si no se hace hincapié en la contextualización.

Por último, queremos destacar la necesidad de que el docente sea capaz de transmitir un equilibrio entre el uso de las metáforas, el formalismo y la visualización de los objetos, tanto matemáticos como económicos que, aun siendo transformados, continúan dando información contextualizada. Somos conscientes de la dificultad que entraña conseguir esta armonía, pero creemos que el esfuerzo vale la pena e implica abordar un diseño de actividades que incorpore todos estos elementos.

Bibliografía

Acevedo, J. I.; Font, V. (2004). *Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* [en línea]. Recuperado el 23 de julio de 2015 de http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/48279/01120112000091.pdf?sequence=1

Acuña Soto, C. M. (2012): *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*, Gedisa, S. A., Barcelona. España.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education,* Taylor & Francis, New York. USA.

Chiang, A. C. (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics (Third Edition),* McGraw-Hill, New York. USA.

Font, V.; Acevedo, J. I. (2003). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 405-418.

Johnson, M. (1991). *El cuerpo en la mente*. Debate, Madrid. España.

Kahneman, D. (2012). *Pensar rápido, pensar despacio.* Ediciones Debolsillo, Barcelona. España.

Lakoff, G. (1990). *The Invariance Hypothesis: is abstract reason based on image-schemas?*, *Cognitive Linguistics*, 1(1), 39-74.

Lakoff, G. (1993). *The contemporary theory of metaphor.* En *Metaphor and Thought* (202-251), Ed. A. Ortony, Cambridge University Press, Cambridge. Reino Unido.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). Metáforas de la vida cotidiana, Ediciones Cátedra, Madrid. España.

Lakoff, G.; Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*, Basic Books, New York. USA.

Liern, V. (2012). Matemáticas y economía. Ventajas de la cooperación. Manual del XIII Día Escolar de las Matemáticas. Recuperado el 23 de julio de 2015 de www.fespm.es/IMG/pdf/dem2012_-_matematicas_y_economia_ventajas_de_la _cooperacion.pdf.

Liern, V (2013). *¿Qué desarrollar en el área de matemáticas en la economía?. Revista Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 62, 11-20.

Saslaw, J. (1996). *Forces, containers and Paths: the role of the body derived image schematas in the conceptualization of Music. Journal of Music Theory* 40(2), 217-243.

Acuña Soto, Claudia Margarita. Es Doctora en Ciencias Pedagógicas del Instituto Superior E.J. Varona de la Habana Cuba, Maestro en Ciencias en Matemática Educativa en el Cinvestav-IPN, México y Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNAM, México, Miembro del Sistema Nacional de Investigadores y Profesor Titular de Matemática Educativa del Cinvestav, México. claudiamargarita_as@hotmail.com

Hernández Arredondo, Elizabeth. Es Licenciada en Física y Matemáticas por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, México; Maestra en Ciencia y estudiante de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Cinvestav-IPN, México. eli_visual@hotmail.com

Liern Carrión, Vicente. Es licenciado en Matemáticas y doctor en Física Teórica por la Universitat de València (España), catedrático de Economía Financiera y Académico numerario de la Royal European Academy of Doctors y de la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras. Fue coordinador de la sección *Musymáticas* de la revista SUMA y es editor de las revistas Rect@ y Anales de ASEPUMA. vicente.liern@uv.es