UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 69-82

El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas

María Florencia Cruz, Ana María Mantica

Fecha de recepción: 06/04/2017
Fecha de aceptación: 26/09/2017

Resumen	Se presenta el análisis de una tarea realizada por dos alumnos del profesorado en matemática de la Universidad Nacional del Litoral. Se pretende analizar el lugar que ocupa el software de geometría dinámica (SGD), Cabri 3D, como una herramienta en la resolución de un problema geométrico, en particular, en la formulación y validación de conjeturas. El estudio que se realiza es cualitativo, en particular, un estudio de caso. El registro de la información se obtiene a través de audios, artefactos escritos y los archivos de trabajo del SGD. La tarea se implementa en la asignatura geometría euclídea espacial en el marco de un taller obligatorio. **Palabras clave**: Conjeturar, Validar ,Software de Geometría Dinámica, Futuros Profesores.
Abstract	In this work we show the analysis of a task realized by two students of the mathematic's professor career from the Universidad Nacional del Litoral. Our main objective was to analyze the role that the dynamic geometry software Cabri 3D takes place in the resolution of a geometric problem, particularly in conjecture formulation and validation. We performed was qualitative study, particularly, a case study. The information was obtained from audios, written artifacts and program files from the SGD. This assignment was implemented in the euclidean space geometry class as a compulsory workshop. **Key words:** Conjecture, Validation, Dynamic Geometry Software (SGD), Future professor
Resumo	Se apresenta a análise de uma tarefa feita por alunos do bacharelado de Matemática da Universidade Nacional do Litoral. Se procura em analisar o espaço que ocupa o software de geometria dinâmica, Cabri 3D, como ferramenta para a resolução de um problema geométrico, em particular, na formulação e na validação das conjecturas. O estudo é qualitativo, em particular, um estudo de caso. O registro da informação se obtém mediante áudios, artefatos escritos e os arquivos de trabalho do SGD. A tarefa foi implementada na aula de geometria euclidiana espacial no espaço de uma oficina obrigatória. **Palavras-chave:** Conjecturar, Validar, Software de Geometria Dinâmica (SGD), Futuros professores

1- Introducción

Considerando la importancia del trabajo con tecnologías digitales en la formación de futuros profesores, se realiza una propuesta en la asignatura geometría euclídea espacial (GEE) del tercer año del plan de estudio del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Los actores objeto de estudio son dos alumnos que cursan la asignatura mencionada. Se pretende analizar el lugar que ocupa el software de geometría dinámica como una herramienta en la resolución de un problema geométrico, en particular, en la formulación y validación de conjeturas.

La preocupación por el uso de tecnologías en situaciones de enseñanza y aprendizaje en la formación de profesores en matemática se manifiesta en los diseños curriculares vigentes. En particular, el diseño curricular de la provincia de Santa Fe para Profesorado de Educación Secundaria de Matemática (Resolución ministerial 2090/15-anexo VII) expresa que las instituciones educativas manifiestan la necesidad de un nuevo diseño curricular que contemple contenidos transversales que apunten a la adquisición de "saberes que colaboren en la apropiación de las nuevas tecnologías orientados a la alfabetización digital, alfabetización académica…." (p.16). En el plan de estudio del Profesorado en Matemática vigente, aprobado por el Consejo Superior de la Universidad Nacional del Litoral en el año 2000 se establece que el egresado debe lograr la "capacidad para producir material educativo mediante la utilización de diferentes tecnologías".

Se destaca que la importancia de que futuros profesores conjeturen y validen propiedades y afirmaciones también se plasma en los diseños curriculares mencionados:

> "habilitar un ambiente de trabajo en el que los/las estudiantes puedan crear y recrear estrategias y modelos, elaborar conjeturas a partir de la exploración y la simulación de la situación utilizando software, generalizar relaciones a partir del análisis de invariancias, validarlas produciendo argumentos razonados, producir pruebas deductivas y avanzar en la elaboración de demostraciones formales" (p.19)

Atendiendo a la necesidad de una formación sólida para los futuros profesores, en relación con actividades propias del quehacer matemático, como son, conjeturar y validar utilizando las potencialidades de nuevas tecnologías, se diseña una tarea en la que se solicita que su resolución se realice utilizando el software de geometría dinámica (SGD) Cabri 3D. Dicho SGD se encuentra disponible en las netbook con las que cuenta el departamento de matemática y que se utilizan en la asignatura GEE. Los estudiantes durante el cursado de la materia trabajan con dicho software, por lo cual, lo conocen y están habituados a su uso. La propuesta se lleva a cabo con los dos estudiantes reunidos en un grupo. Se implementa en una clase de la asignatura, en particular, como parte de un taller obligatorio para obtener la regularidad, se desarrolla durante la última semana de cursado. Se destaca que, al ser una etapa de evaluación, la labor del docente en el momento de implementación de la propuesta se reduce a pequeñas intervenciones solicitadas por los estudiantes.

A partir de la resolución de la tarea se espera que los estudiantes pongan en juego conocimientos geométricos disponibles utilizando las ventajas que brinda este software de geometría dinámica. Se pretende que utilicen diferentes truncamientos de poliedros regulares convexos, que logren conjeturar la posición de los planos que permite obtener el poliedro semirregular solicitado y que validen la conjetura establecida.

2-Marco de referencia

El trabajo con tecnologías digitales en el aula de matemática es tema de preocupación de diversos investigadores, entre otros, González López (2001) menciona diversos factores que condicionan su gestión por parte del profesor. Los factores que expone son debidos, al cambio en las condiciones de trabajo; al tipo de interacción con el sistema; a los modos de proceder en la resolución de las tareas propuestas y al tipo de actividades que se proponen.

Drijvers (2013) presenta el análisis de distintos casos en los que considera el tema matemático abordado, la herramienta digital utilizada, el uso que se hace de ella y una reflexión sobre los factores que pueden explicar el éxito o el fracaso del funcionamiento o no de la tecnología utilizada tanto para el estudiante como para el maestro. Encuentra que son tres los factores que influyen en el éxito o no de la tarea con el uso de alguna tecnología digital: el diseño de la propuesta teniendo en cuenta no sólo propiedades de la tecnología especifica utilizada, sino las consideraciones pedagógico didácticas del tema a tratar; el rol del profesor quien tiene un papel fundamental en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, mediante la síntesis de los resultados de las actividades realizadas, destacando las herramientas y técnicas fructíferas, además de relacionar las experiencias dentro del entorno tecnológico con las habilidades matemáticas empleadas en un entorno de papel y lápiz; y el contexto educativo de modo que el trabajo con la tecnología propuesta se integre de manera natural.

Novembre, Nicodemo y Coll (2015) plantean que no es necesario proponer problemas diferentes a los trabajados habitualmente en clases de matemática con lápiz y papel, lo interesante es analizar cómo se resuelven estas situaciones con la incorporación de las tecnologías digitales. Por lo mencionado destacan la importancia de la reflexión por parte de docentes acerca de las modificaciones que produce la incorporación de las tecnologías en el aula de matemática, cuales son los aportes de la misma en la producción de conocimientos y qué conocimientos matemáticos y tecnológicos son necesarios durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sostienen que con las herramientas tecnológicas se producen dos transformaciones positivas, en primera instancia se permite abordar problemas que serían imposibles sin las mismas y en segunda se puede adoptar un enfoque experimental de la Matemática que cambia la naturaleza de su aprendizaje. Los autores plantean que las investigaciones muestran que el uso regular con software permite a los alumnos desarrollar conocimientos matemáticos e informáticos (vinculados al uso del software) y articularlos. Proponen que se tengan en cuenta en la planificación de las actividades ya que esto ayudará a la construcción conjunta de los dos tipos de conocimientos.

Arcavi (2008) plantea varias razones por las cuales el modelado de situaciones geométricas a partir de gráficas dinámicas es un camino potente para el aprendizaje de conceptos matemáticos. El autor remarca la necesidad de crear situaciones en las cuales el resultado de la actividad es inesperado o en algunos casos contra intuitivo, de forma que, entre lo conjeturado por el estudiante y lo devuelto por el software se propicie la necesidad de demostrar o probar sus conjeturas utilizando argumentos matemáticos que van más allá del software.

Arcavi y Hadas (2000) presentan características del trabajo con ambientes dinámicos, tales como, la visualización, la experimentación, la sorpresa, la retroalimentación. Respecto a la *visualización*, sostienen que estos ambientes permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades, visualizarlas y transformar construcciones en tiempo real, lo que contribuye a establecer bases intuitivas para dar justificaciones formales de conjeturas y proposiciones matemáticas. Con la *experimentación* pueden realizar observaciones, medir, comparar, cambiar o distorsionar las figuras y hacer construcciones auxiliares fácilmente; esta experimentación puede ser un paso previo a la enunciación de generalizaciones y conjeturas. La *sorpresa* es la diferencia entre las predicciones enunciadas y lo devuelto por el software y genera, en los estudiantes, un desconcierto que los estimula a analizar sus conocimientos y predicciones. Esta diferencia entre lo conjeturado y lo devuelto por el ambiente dinámico crea una *retroalimentación* que es proporcionada por el ambiente mismo, el cual reacciona a medida que es requerido.

Los autores mencionados anteriormente sostienen que la retroalimentación directa es más efectiva que la proporcionada por un profesor, no solamente porque es carente de juicio de valor, sino también motiva a los estudiantes a verificar, revisar la predicción y a realizar una demostración. A través de esas actividades que producen una sorpresa, los estudiantes pueden plantearse preguntas acerca de por qué sucede eso y hasta requerir una prueba podría provenir de las observaciones y las revisiones del proceso de experimentación en sí mismo. En otros términos, el ciclo de experimentación-retroalimentación-reflexión debe suministrar las semillas de la argumentación que ayude a explicar y a demostrar una declaración. De esta manera el ambiente dinámico apoya realmente a “cerrar el ciclo”. Remarcan la importancia del diseño de tareas que provoquen estas “sorpresas” ya que la herramienta tecnológica en sí misma es de poco valor si no se acompaña de las tareas que le den un uso significativo (Arcavi y Hadas, 2000).

Gutiérrez y Jaime (2015) realizan un estudio con un alumno de segundo curso de educación secundaria obligatoria en España, considerado un estudiante avanzado dado que muestra talento superior a la media. Diseñan actividades que involucran contenidos de Geometría tridimensional, para ser resueltas con el software de geometría dinámica Cabrí 3D. Las tareas propuestas pretenden aportar información sobre los procesos de aprendizaje de conceptos de geometría espacial e información sobre la viabilidad de los entornos de enseñanza de geometría espacial basado únicamente en el uso de programas de geometría dinámica 3-dimensional. El estudio realizado pone de relieve que el uso de Cabri 3d de manera sistemática influye positivamente en el desarrollo de la imagen conceptual de los objetos espaciales estudiados (rectas y planos) y de los conceptos relativos al paralelismo. Las manipulaciones con el programa de geometría dinámica 3-dimensional pueden ayudar al estudiante a eliminar las falsas imágenes que tenía al principio, a mejorar sus dibujos en papel de las estructuras 3-dimensionales y a crear una imagen conceptual mucho más rica y completa que la que tenía inicialmente.

Gutiérrez (2005) sostiene que diversas investigaciones destacan la necesidad de explorar las posibilidades del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría y de experimentar las diferentes formas de enseñanza. Manifiesta que una línea importante es la que se ocupa de analizar los procesos de aprendizaje de la demostración matemática con el uso de un software de geometría dinámica. Con el SGD se hace explicita con mayor detalle la actividad empírica de los estudiantes no que no ocurre en contextos no informáticos, en estos últimos la actividad transcurre mayormente en su mente.

El análisis que presentamos refiere a la relación de los estudiantes con las características de estos ambientes de geometría dinámica al resolver la tarea propuesta por sobre las características de la misma. En este caso es una tarea que en otros momentos resolvían con lápiz y papel. Actualmente se apunta al trabajo con la misma situación involucrando nuevas herramientas, con el foco en la formulación y validación de conjeturas. No se pretende analizar en profundidad la intervención del docente en el desarrollo de la misma.

3-Metodología y diseño de tareas.

Se realiza una investigación cualitativa, en la misma se pretende un trabajo intensivo, teniendo en cuenta que si bien se pierde la posibilidad de generalizar, es posible mostrar algunas cuestiones sobre la sociedad a la que pertenecen los sujetos, por lo cual, posiblemente los resultados se pueden ampliar al contexto al que pertenecen los sujetos (Kornblit, 2007). El trabajo corresponde a un estudio de casos, dado que, se espera conocer en profundidad la particularidad y complejidad de un caso singular (Stake, 1998).

El trabajo se realiza con dos estudiantes que cursan la asignatura GEE, la resolución de la actividad es obligatoria para obtener la regularidad de la materia. Según Kazez (2009) la muestra seleccionada para el estudio de casos que se lleva a cabo es no probabilística e intencional, dado que los actores son productos de una selección de acuerdo con el criterio de los investigadores, quienes seleccionan algunos casos que resultan ser “típicos”.

Para el desarrollo del taller se diseña la siguiente tarea y se dan 3 horas reloj a los estudiantes para la resolución:

Tarea 1

a) Construye un poliedro *semirregular* con las siguientes condiciones:
- ✓ Se obtiene del hexaedro regular o cubo por truncamiento de sus ángulos poliedros.
- ✓ Sus caras son cuadriláteros y triángulos.

b) Explica como determinaron los planos con los cuales seccionaron al hexaedro regular para obtener al poliedro semirregular.

c) Justifica por qué el poliedro obtenido con los planos determinados en b) es semirregular.

Dado que en la asignatura GEE no se define el concepto “poliedro semirregular”, en el momento de presentar las tareas se incluye el mismo:

Se define poliedro regular al poliedro convexo que cumple las siguientes condiciones: • sus caras son polígonos regulares (1) • sus caras son polígonos iguales (2) • sus ángulos poliedros son iguales (3) *A los poliedros convexos que cumplen sólo las condiciones (1) y (3) de la definición de poliedro regular los denominaremos poliedros semirregulares.*

Tabla 1: Definición de poliedro semirregular

En el taller en el que se presenta la propuesta es obligatorio el uso del SGD, por tanto, se considera que no es necesario explicitarlo en la tarea. A los estudiantes se les brinda una netbook en la que se encuentra instalado el SGD Cabri 3D. La importancia del uso del SGD se debe, por un lado, a que en el transcurso de la asignatura GEE se utiliza el software como complemento para la formulación y validación de conjeturas y propiedades, y por el otro, a que se considera que, en la realización de construcciones, los estudiantes deben poner en juego conceptos y propiedades geométricas conocidas.

Durante la implementación de la propuesta el docente sólo realiza intervenciones cuando los estudiantes lo requieren explícitamente. Estas intervenciones tienen como finalidad devolver la responsabilidad matemática a los estudiantes, con el fin de que, se hagan cargo de su problemática. En la investigación realiza se tiene como fin analizar el lugar que ocupa el SGD en la formulación y validación de conjeturas. Se pone especial énfasis en las interacciones entre estudiantes en igualdad de condiciones respecto a su conocimiento.

Durante la implementación de la propuesta se registra la información a través de artefactos escritos, grabaciones en audio y los protocolos del software de geometría dinámica, con el fin de estimar la fiabilidad del estudio, a partir de los datos obtenidos se realiza el análisis detallado de las actuaciones de los estudiantes (Cohen y Manion, 1990). Se destaca que el software Cabri 3D cuenta con la herramienta *descripción* que permite la reconstrucción de la totalidad del procedimiento realizado para obtener la construcción presentada, por lo cual, se puede conocer “paso a paso” el proceso de resolución puesto en juego por los estudiantes.

4-Análisis del trabajo realizado por los estudiantes.

Se presenta el análisis detallado del grupo que denominamos Grupo **C-S**, constituido por los alumnos **C** y **S**. Se destaca que se presentan en letra cursiva las expresiones textuales de obtenidas a través de los registros en audio.

En el audio se aprecia que la primera conjetura que establece el binomio es: “*El poliedro buscado es una pirámide de base cuadrada*”. Afirman que la base de la misma necesariamente debe ser una de las caras del cubo y sus caras laterales triángulos que por definición de poliedro semirregular deben ser equiláteros. El vértice (V) que no pertenece a la base de la pirámide, lo determinan arbitrariamente (en el interior del cubo) verificando a través de la herramienta “longitud” que no es el punto buscado. En este caso utilizan la potencialidad de SGD, tal como plantea Restrepo (2008) para invalidar la conjetura.

S: La pirámide es de base cuadrada. Lo que hay que hacer es que te den los triángulos de la pirámide para que sean regulares.

C: Es que son regulares.

S: Bueno listo, ya está entonces.

C: ¿Y este cuánto mide?

S: Miden todos iguales C.

C: Ah, no… tiene que ser si o si equilátero, ese es el problema, ¿o no?

S: Miden re distinto: 4,1cm y 4,5cm.

Los estudiantes utilizan un arrastre errático para determinar el punto cúspide, es decir, desplazan sin un plan preciso los puntos básicos, tratando de encontrar la figura pretendida. Al verificar que no obtienen un triángulo equilátero intentan una búsqueda sistemática del posible lugar en el que se encuentra la cúspide de la pirámide.

S: Tiene que ser si o si equilátero, ese es el problema, podemos encontrar el centro del cubo con las diagonales.

En el diálogo se advierte que buscan un punto particular del cubo, el punto medio de una de las diagonales, consideran este punto como vértice V. Miden nuevamente y verifican que no determina que las caras laterales sean triángulos equiláteros. Los estudiantes utilizan el software de modo azaroso, no se apoyan en propiedades para predecir el quinto vértice de la pirámide.

S: A menos que no sea una pirámide de esas y estemos pensando mal. No queda otra, es con triángulos y cuadrados.

Se plantean si la pirámide de base cuadrada es solución a la tarea.

S: Para que el cuadrilátero sea regular tiene que ser si o si un cuadrado.

C: ¿Y si haces con los puntos medios de los lados de las caras? ¿Sabes qué me pasa?, no sé si esto es truncamiento del ángulo. Esto ya no es regular, ¿no?

S: Fijate si es regular.

C: Y ahora sí, capaz con el punto medio. Ponele, el punto medio del cubo. El punto medio es el centro del cubo.

S: ¿El centro del cubo?

C: ¡Sí!

Descartan que la base de la pirámide sea una de las caras del cubo. Consideran el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos medios de los lados de una cara del cubo, suponen que es un cuadrado. Toman como cúspide el punto intersección de dos diagonales del cubo, y afirman que las caras laterales son triángulos equiláteros, corroborándolo al medir sus lados utilizando el SGD.

Por el momento la característica utilizada es la visualización, dado que construyen la figura inicial en base a la definición, pero a partir de esto sientan sus fundamentaciones en bases intuitivas para establecer sus conjeturas sin utilizar herramientas formales. Se adjunta la construcción realizada en el SGD.

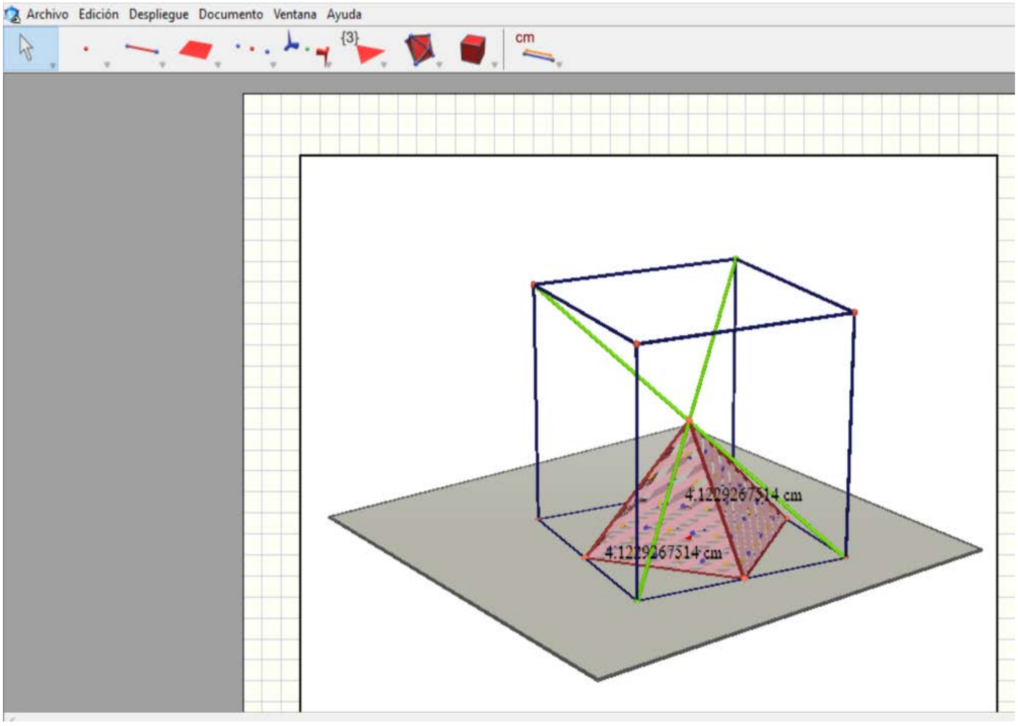


Imagen 1: Construcción de poliedro semirregular presentada por el grupo C-S.

C: Ahora cómo explicamos por qué lo hicimos así, sin adivinarlo. Pensemos.

Los estudiantes son conscientes y explicitan que no realizan la conjetura y la construcción apoyándose en propiedades y definiciones, dado que, expresan la necesidad de encontrar una explicación porque hasta el momento lo hacen "adivinando". Consideran que la construcción y validación realizada con el software no es suficiente para justificar que el poliedro cumple con la condición pedida. En el audio se aprecia que manifiestan la necesidad de realizar una demostración formal para que sus conjeturas sean consideradas como válidas. Suponen que no es suficiente con que el software les devuelva que todas las aristas tienen la misma longitud, para aceptar esta afirmación. No expresan la necesidad de probar la igualdad de ángulos poliedros y ángulos planos.

Recurren al "docente" para que les "de una pista" que les permita probar que los triángulos y el cuadrilátero son polígonos regulares. Consideran que los lados de dichos polígonos deben ser iguales, omitiendo la igualdad de sus ángulos.

C: Este si es un cuadrado porque tiene lados iguales, son las paralelas medias de las diagonales y las diagonales del cuadrado son todas iguales. Entonces los lados de las caras son iguales.

D[1]: Si los lados del cuadrilátero son iguales es un rombo, para saber que es cuadrado tengo que probar que los lados son iguales y al menos un ángulo es recto.

S: Ah…

El docente toma la decisión de explicitar que los elementos que consideran no son suficientes para asegurar que el cuadrilátero es cuadrado. La posibilidad de que se asuman o no ciertas cuestiones como responsabilidad de los estudiantes, depende fundamentalmente del lugar que el docente les otorgue a dichas cuestiones. En este caso la decisión tomada por el docente es explicitar definiciones que los alumnos utilizan en geometría.

En el intento de probar que la base de la pirámide es un cuadrado utilizan propiedades conocidas, afirman que los cuatro lados son iguales y los opuestos están contenidos en rectas paralelas. Para esto, utilizan la herramienta “paralela” validando que los lados opuestos son paralelos (trazando por un vértice una recta paralela a la recta que contienen al lado opuesto y verifican que es coincidente con el lado del cuadrilátero). Desplazando los puntos libres de su construcción intentan validar la conjetura establecida a partir de la observación de invariantes de la misma.

Destacamos que en este caso utilizan una herramienta diferente a “medida” para validar su conjetura, que los lados del cuadrilátero están contenidos en rectas paralelas. La conjetura obtenida no aporta nada nuevo a lo conocido, dado que con lo planteado sólo pueden afirmar que el polígono es rombo.

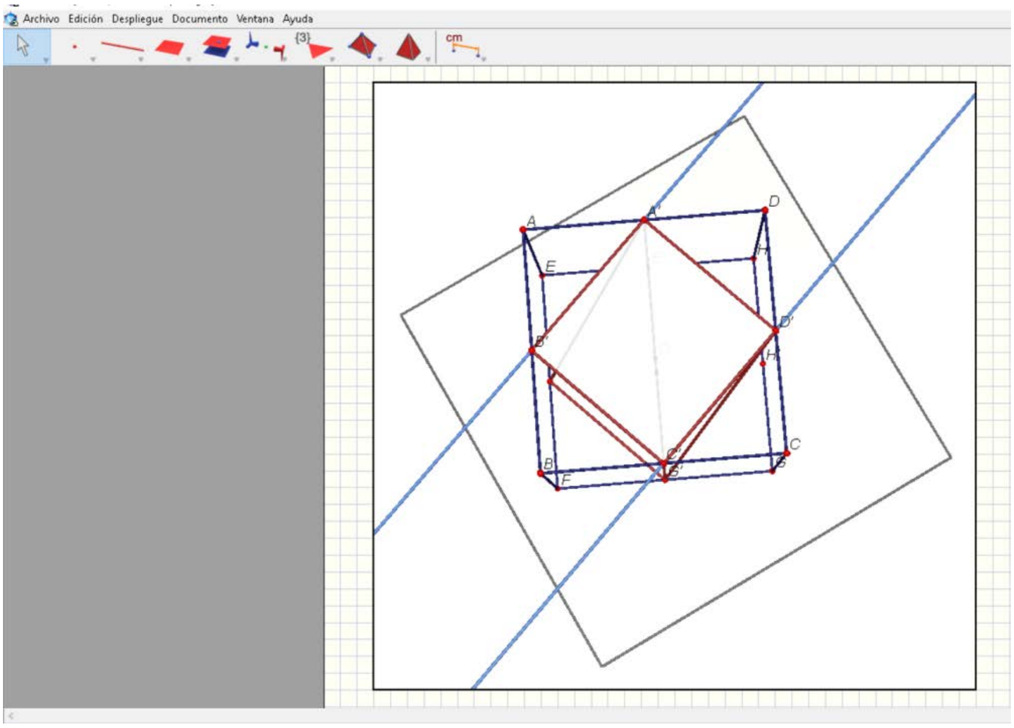


Imagen 2: Validación del paralelismo de los lados del cuadrilátero por C-S.

---

[1] D: Docente

Los estudiantes no logran probar que el cuadrilátero obtenido tiene un ángulo recto. Esta condición puede constatarse con el SGD fácilmente determinando la amplitud del ángulo plano o utilizando la herramienta recta perpendicular.

Cuando inician la respuesta de la tarea tienen en cuenta sólo que las caras que forman el poliedro sean regulares y no sus ángulos poliedros, por lo que se aprecia que no están considerando los ángulos poliedros y los ángulos planos. No utilizan las ventajas de la herramienta manipulación que ofrece el SGD, en particular la función “bola de cristal” que permite visualizar la Zona de Trabajo desde diferentes puntos de vista, ampliar o reducir la escena. Se puede considerar a esta función como un caso particular de arrastre que provoca el movimiento conjunto de todos los objetos que hay en el interfaz. Con esta herramienta al visualizar los ángulos poliedros se puede conjeturar que los mismos no son iguales, pues en cuatro de los vértices concurren 3 aristas y en la cúspide concurren 4. En este caso se puede utilizar el software para invalidar la conjetura.

Llegado a este momento de la resolución de la tarea, se plantean si el poliedro encontrado responde a la consigna solicitada. En particular, lo que refiere a “truncamiento de ángulos poliedros”. Determinan posibles posiciones de los planos de modo que al realizar los cortes se obtenga el poliedro obtenido anteriormente (pirámide base cuadrada). En este momento, por primera vez tienen en cuenta los ángulos poliédricos que forman al poliedro dado, no al obtenido luego de realizar los truncamientos.

Los estudiantes vuelven a leer la consigna con el fin de acordar cómo realizar los cortes de los ángulos poliedros (inciso 2 de la tarea dada). Determinan los planos que pasan por los vértices de las caras laterales de la pirámide de base cuadrada con la que trabajan para establecer la posición de estos planos respecto a la figura original (cubo). Destacan en el diálogo que lograron establecer las posiciones de los planos y que el poliedro es semirregular, dado que demostraron que las caras del mismo son polígonos regulares.

S: Por lo tanto el poliedro es semirregular, ¿será que cumple las dos condiciones?

C: Ah… los ángulos poliedros… nunca lo probamos, y… ¿si no son iguales?

S: Sorry!! Tienen que ser iguales

C: Bueno, ya fue, no importa, ya está…

S: ¿Será que cumple las dos condiciones?

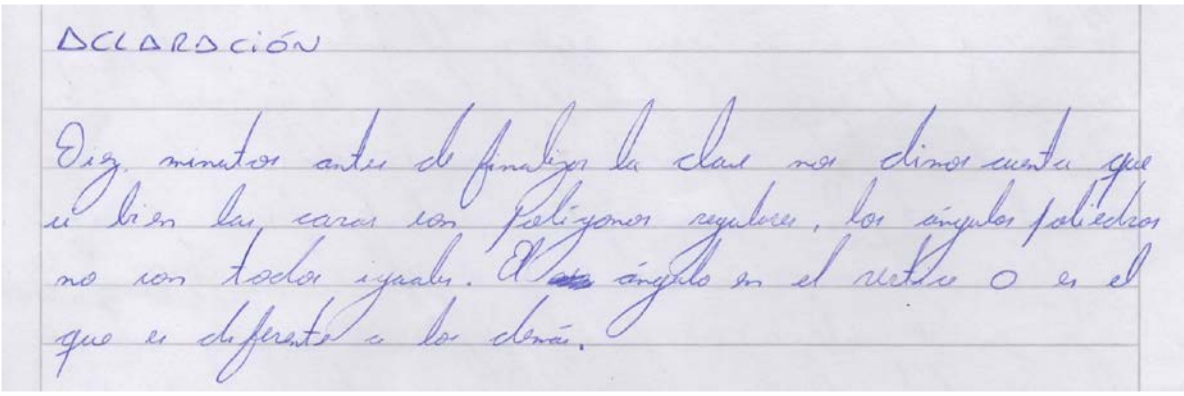
C: ¡Está re mal… Mirá!! Este ángulo poliedro no es igual a este (La afirmación la manifiestan observando la construcción realizada en el SGD, en particular, el ángulo poliédrico con vértice en la cúspide y otro de los ángulos poliédricos)

S: Nunca nos dimos cuenta.

La visualización en el SGD permite que puedan descartar la conjetura de que el poliedro encontrado (pirámide base cuadrada) es semirregular, pues en 4 vértices concurren 3 aristas y en la cúspide 4. Los estudiantes no asumen el papel de un matemático en la resolución de un problema, dado que como plantea Schoenfeld

(2001), se apresuraron a realizar exploraciones sin hacer un análisis cuidadoso de la situación. Además, no realizan una revisión en mitad del proceso que pueden mostrar dificultades del enfoque o alternativas que se podrían considerar en la solución. Cuando los estudiantes creían que la situación estaba resuelta, que la habían explorado por completo, el software les devuelve una imagen que derrumba la conjetura realizada sobre el modo de cortar el poliedro.

Finalizan la tarea presentado por escrito lo siguiente:



ACLARACIÓN

Diez minutos antes de finalizar la clase nos dimos cuenta que si bien las caras son polígonos regulares, los ángulos poliedros no son todos iguales. El ángulo en el vértice O es el que es diferente a los demás.

Imagen 3: Cierre de la tarea presentado por los estudiantes C-S.

5- Reflexiones:

La conclusión de los estudiantes muestra el desconcierto por el resultado obtenido, pues, inesperadamente se dan cuenta de que el poliedro considerado no responde a la tarea. Esta última afirmación genera una diferencia clara con respecto a las predicciones enunciadas explícitamente durante la mayor parte del desarrollo de la tarea. La concientización de que la conjetura establecida inicialmente es invalida surge a partir de la interpretación de la situación representada e identificar propiedades (ángulos poliédricos del poliedro obtenido) anteriormente no consideradas. El trabajo llevó durante todo el tiempo a discusiones de resultados que, en general, no coincidían con lo devuelto por el SGD. Se considera que "esto puede ser el detonador para nutrir la propia necesidad de los estudiantes, para reanalizar su conocimiento y predicciones, estableciendo las oportunidades para un aprendizaje significativo" (Arcavi y Hadas, 2000, p.26).

Los estudiantes en el desarrollo de la tarea en primera instancia tienden a realizar constataciones empíricas por sobre las deducciones basadas en propiedades. La utilización del SGD les permite realizar diversas constataciones empíricas con una única construcción, para validar o invalidar una conjetura, antes de intentar una justificación deductiva. Se destaca que en general utilizan el software para conjeturar y para invalidar conjeturas, no emplean las potencialidades que ofrece para validarlas. Posteriormente intentan realizar demostraciones formales, al responder la consigna en la que se solicita que justifiquen por qué el poliedro obtenido es semirregular. Se considera que se debe a que los estudiantes se encuentran avanzados en la carrera y están habituados a realizar demostraciones utilizando el método deductivo.

En general, se considera que experimentaron con el software, dado que, no realizan sólo observaciones, sino también, miden, comparan. Se destaca que una ventaja del software que no fue aprovechada por los estudiantes es la construcción de figuras no estereotipadas, por el contrario, cuando piensan en el poliedro que resulta al realizar el truncamiento considerando, inmediatamente consideran una figura prototípica, una pirámide de base cuadrada.

Se destaca que el uso de un SGD es importante, dado que, una de las características principales es que las construcciones conservan las propiedades geométricas durante el movimiento. Los estudiantes utilizan muy poco el desplazamiento para validar sus construcciones, pareciera que para ellos es suficiente imponer propiedades geométricas durante la construcción y por tanto no sienten necesidad de desplazarla para validarla. Una de las herramientas que emplean durante el trabajo con el software es la medida, pero afirman que esto no es suficiente para validar la conjetura.

Los resultados obtenidos coinciden con lo que plantean Arcavi y Hadas (2000), el SGD es un medio para estimular las actividades matemáticas de formular y validar conjeturas haciendo estas tareas más significativas. En el caso que se presenta, la indagación con el software favoreció una exploración dinámica de la situación, dado que en principio se buscó el vértice de la pirámide, poliedro conjeturado como solución del problema, por ensayo y error o de forma errática, pero luego se empleó el software para descartar el punto. Esto lo realizan a partir de la herramienta "medida" con lo que pueden cuantificar su conjetura.

Se considera de suma importancia, cuando se trabaja con SGD, presentar a los alumnos problemas que no aseguren la veracidad de las conjeturas, si no que, son ellos los que deben establecer la conjetura y luego validarla. Es decir, comprender que su conjetura es verdadera y esto pueden realizarlo utilizando la potencialidad del software, dado que su dinamismo permite observar varios ejemplos con una única construcción. En muchos casos esto los hace considerar que no es necesaria una validación formal por sobre una constatación empírica. Quizás por esto los estudiantes se sienten más cómodos utilizando el software para invalidar sus conjeturas.

6-Bibliografía

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* [en línea], 5, 25-45. Recuperado el 23 de Julio de 2012, de: https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2014/01/s71-material-de-referencia.pdf

Arcavi, A. (2008). Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics*, 28, 2-10.

Cohen y Manion, (1990). *Métodos de investigación educativa.* La muralla: Madrid. España.

Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA* [en línea], 8(1), 1-20. Recuperado el 17 de Junio de 2015, de: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Drijvers2013PNA8(1)Digital.pdf

González López, M. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Universidad de Granada, Granada. España.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM.* Recuperado el 17 de noviembre de 2011 de: http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut05a.pdf

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA* [en línea], 9(2), 53-83. Recuperado el 15 de Octubre de 2016 de: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gutierrez2015PNA9(2)Analisis.pdf

Kazez, R. (2009). Los estudios de casos y el problema de la selección de la muestra: aportes del sistema de matrices de datos. *Subjetividad y procesos cognitivos* [en línea], 13(1), 71-89. Recuperado el 01 de Febrero de 2017 de: http://dspace.uces.edu.ar:8180/xmlui/handle/123456789/727

Kornblit, A. L. (2007). Historias y relatos de vida: una herramienta clave en metodologías cualitativas. En A. Kornblit (coord.), *Metodologías cualitativas en ciencias sociales. Modelos y procedimientos analíticos.* Biblos, Buenos Aires. Argentina.

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2015). *Diseño Curricular. Profesorado de Educación secundaria en Matemática* (Resolución ministerial 2090/15-anexo VII)

Novembre, A. Nicodemo, M. y Coll, P. (2015). Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza. *CABA* [en línea], ANSES. Recuperado el 03 de Marzo de 2016 de: http://escuelasdeinnovacion.conectarigualdad.gob.ar/mod/page/view.php?id=875

Restrepo, A. (2008). *Genese instrumentale du deplacement en geometrie dynamique chez des eleves de 6eme.* (Tesis doctoral). Universit´e Joseph-Fourier - Grenoble I, Français. Recuperada el 07 de Agosto de 2016 de: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00334253

Schoenfeld, A. (2001). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En Resnik,L. y Klopfer, L. (comp), *Currículo y cognición.* Aique, Buenos Aires. Argentina.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Morata, Madrid. España.

Universidad Nacional del Litoral. (2000). *Plan de estudio del Profesorado en Matemática*. Recuperado el 05 de marzo de 2002 de: http://www.fhuc.unl.edu.ar/pages/ensenanza/carreras-de-grado/matematica.php

Autores:

Cruz María Florencia**:** Profesora en Matemática. Docente en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Becaria doctoral por la UNL. Ha participado como expositora en congresos y jornadas nacionales e internacionales sobre enseñanza de la matemática. Dirección Electrónica: ma.florenciacruz@gmail.com

Mantica Ana María: Profesora en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo. Ha realizado publicaciones sobre la temática en revistas especializadas nacionales e internacionales. Dirección Electrónica: ana.mantica@gmail.com