UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 27-47

Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria

Gustavo Barallobres

Fecha de recepción:31/12/2016
Fecha de aceptación: 14/09/2017

Resumen	Ciertas dificultades de los alumnos en el contexto de transición de la aritmética al álgebra son interpretadas como dificultades de abstracción, en función de las características específicas del dominio algebraico. Ellas son habitualmente atribuidas a problemas cognitivos de los alumnos, minimizando el rol de otros factores, como las prácticas de enseñanza asociadas, las concepciones de abstracción y de aprendizaje, la naturaleza misma de los objetos de saber, etc. En este artículo, analizaremos las propuestas de enseñanza de ciertos manuales escolares y describiremos algunos fenómenos didácticos ligados a las interpretaciones cognitivas de las dificultades de aprendizaje, en particular ciertos modos de reducción de la complejidad de los objetos matemáticos mediante procesos didácticos basados en la manipulación de objetos materiales que pueden tener un impacto sobre la conceptualización. **Palabras clave:** algebra, dificultades de aprendizaje, abstracción
Abstract	Certain difficulties of the students in the context of transition of the arithmetic to the algebra are interpreted as being difficulties of abstraction, depending on the specific characteristics of the algebraic domain. These difficulties are usually attributed to students' cognitive problems, minimizing the role of other factors, such as associated teaching practices, abstraction and learning conceptions, or even the very nature of the knowledge objects, and so on. In this article, we will analyze the teaching proposals of some textbooks and describe some didactic phenomena related to the cognitive interpretations of learning difficulties, in particular certain ways of reducing the complexity of mathematical objects through didactic processes based on the manipulation of material objects that can have consequences on the conceptualization. **Keywords**: algebra, learning disability, abstraction
Resumo	Certas dificuldades dos estudantes no contexto de transição da aritmética para a álgebra são interpretadas como dificuldades de abstração, em função das características específicas do domínio

algébrico. Elas, habitualmente, são atribuídas a problemas cognitivos dos alunos, minimizando outros fatores, como as práticas pedagógicas associadas, as concepções de abstração e de aprendizagem, a mesma natureza dos objetos de saber, etc. Nesse artigo, nós analisaremos as propostas pedagógicas de certos manuais escolares e descreveremos alguns fenômenos didáticos associados às interpretações cognitivas das dificuldades de aprendizagem, em particular certos modos de redução da complexidade dos objetos matemáticos por meio de processos didáticos fundados na manipulação de objetos materiais que podem ter um impacto no processo de conceptualização.

Palavras-chave: álgebra, dificuldades de aprendizagem, abstração

1. Introducción

Un fenómeno habitual en las clases de matemática, en lo que respecta al trabajo con alumnos que presentan dificultades de aprendizaje en esta disciplina, consiste en reducir el nivel de complejidad de la tarea presentada con la finalidad de permitir el acceso a ciertos saberes (Giroux, 2000; Lemoyne, G y Lessard, G. (2003); DeBlois, L. 2014; Mari, C.y Squalli, H, 2014) y, de este modo, obtener la producción de ciertas respuestas correctas, lo que puede crear la ilusión de que los alumnos han aprendido puesto que pueden responder de manera pertinente a ciertas tareas. Sin embargo, este recorte o simplificación de la tarea presentada se realiza, en muchos casos, sin analizar el impacto que dicha acción pueda tener sobre la naturaleza del saber que desea enseñarse y, por ende, sobre la conceptualización de las nociones matemáticas implicadas (Lemoyne, G y Lessard, G. (2003), Autor, (2009, 2016).

Esta reducción o simplificación de la tarea puede tomar diferentes formas. En el caso particular de la enseñanza de las matemáticas en secundaria, una de estas formas consiste en ¨recortar¨ el saber en micro tareas (Houle, 2007) bajo el supuesto que el acceso a una tarea compleja se efectúa mediante la acumulación de ciertas etapas más simples que la componen. Otra de las formas que caracteriza la reducción antes mencionada, consiste en centrar la enseñanza en tareas rutinarias u operatorias, promoviendo de este modo a una algoritmización de los saberes a enseñar (Autor, 2009).

En el caso particular del pasaje de la aritmética al álgebra, existe un juego delicado entre el tratamiento de casos particulares (de ejemplos, de problemas, etc.) y los procesos de generalización y abstracción constitutivos del pensamiento algebraico. Sin embargo, como explica Sierpinska (2012), la generalización en álgebra requiere una experiencia en la resolución de problemas permitiendo abstraer y generalizar métodos particulares con el objetivo de tratar clases de problemas, experiencia que es difícil de adquirir en la escuela secundaria tanto por los limites de los conocimientos limitados que disponen los alumnos que por el tiempo de enseñanza impuesto por la institución escolar.

Cuando se trabajo con alumnos con dificultades en matemática, es frecuente afirmar que éstos alumnos tienen dificultades de abstracción y de generalización (Autor, 2016; Bergeron, L., 2017), es decir, se asocia la dificultad que tienen a características cognitivas específicas de los alumnos; sin embargo, el análisis de Sierpinska (2012) muestra claramente la complejidad que implica el acceso a un dominio de saber como el álgebra y, por ende, lo importante que es tener en cuenta las dimensiones epistemológicas y didácticas en la interpretación de dichas dificultades.

En este contexto de transición de la aritmética al álgebra, un fenómeno asociado al problema de la simplificación de tareas que hemos evocado precedentemente se manifiesta de la siguiente manera: partiendo de la hipótesis de que ésta transición está marcada por problemas de abstracción (puesto que el álgebra es un dominio de saber abstracto), se intentan “concretizar” los objetos de saber para que sean más accesibles a los alumnos. En este artículo, describiremos algunas formas que adquiere esta concretización, en particular en el contexto de la enseñanza del álgebra y el impacto que puede tener sobre la conceptualización de esta disciplina; por otro lado, indagaremos la manera en la que la concepción habitual de la abstracción condiciona el análisis de las dificultades de los alumnos minimizando el rol que las interpretaciones hechas por los alumnos tienen en el seno de la interacción didáctica.

2. Generalización, abstracción y álgebra

Piaget (Fundación Jean Piaget, 2000) distingue los procesos de abstracción simples o empíricos de aquellos que el autor llama procesos de abstracción reflexiva. Los primeros son relativos a experiencias implicando objetos materiales y determinan observables sobre la acción comprendida como proceso material (un movimiento, una posición, etc.) permitiendo extraer propiedades o informaciones propias a un cierto nivel de conocimiento. Sin embargo, Piaget remarca, evitando una asociación directa con el empirismo, que lo que es identificado en un cierto plano de conocimiento como objeto de reflexión para ser elevado a un plano superior no es el simple reflejo de las propiedades del mundo exterior sino que proviene de las acciones del sujeto. La noción de ¨forma¨, por ejemplo, no es concebida como un aspecto intrínseco a los objetos sino que implica, para Piaget, una cierta forma de interacción con los objetos materiales, es decir determinadas acciones específicas.

Los procesos de abstracción reflexiva están también vinculados con las interacciones del sujeto pero las inferencias asociadas a estos procesos refieren a coordinaciones de acciones efectuadas sobre los objetos. Se trata de un proceso de reconstrucción reflexiva, en un sentido cognitivo, sobre el plano de la representación, a través del cual el sujeto se esfuerza por construir una comprensión conceptual de lo que percibe o cree percibir. Este tipo de abstracción puede permanecer sobre un plano inconsciente o manifestarse de manera consciente (por ejemplo, el análisis comparativo de dos procedimientos); es en éste ultimo caso que Piaget habla de abstracción reflexiva.

Los procesos de abstracción son acompañados de procesos de generalización; en el caso de la abstracción empírica, las generalizaciones son frecuentemente inductivas, es decir, producidas mediante validación empírica o verificaciones de las relaciones establecidas en la interacción con los objetos materiales, sin intentar buscar ¨razones¨ que irían más allá de lo observable. Por otro lado, las generalizaciones extensivas y comprensivas que emergen de relaciones establecidas entre las acciones realizadas sobre los objetos, conducen a la producción de nuevos contenidos (es decir, más allá de lo «observado») y se asocian a validaciones que superan la verificación empírica, lo que hace posible la conceptualización. Se trata, para Piaget, de generalizaciones constructivas vinculadas a la abstracción reflexiva que implican nuevas representaciones y permiten aportar diferentes explicaciones para una misma situación ; al mismo tiempo, estas generalizaciones posibilitan nuevas construcciones.

En el caso específico del álgebra, las experiencias constitutivas de este dominio de saber no refieren a objetos materiales sino a acciones que se ejercen sobre ellos y a coordinaciones más generales de estas acciones. Para Gonseth (1936), la abstracción matemática es la «forma» de la experimentación: la construcción de la noción de recta, por ejemplo, requiere conocimientos preliminares de ciertas realizaciones más o menos groseras, tales como el borde de una regla, la línea que esta regla permite trazar, etc., pero la reflexión sobre las acciones efectivas y sus coordinaciones conduce a la creación de representaciones esquemáticas abstractas que dan forma al objeto matemático (en construcción permanente, según los niveles de abstracción implicados). Los objetos algebraicos son esquematizaciones que permiten expresar relaciones (ligadas a situaciones específicas) que se desean retener. Al mismo tiempo, cada esquematización puede tornarse ella misma como un objeto de estudio y así sucesivamente, obteniendo diferentes «capas» o niveles de abstracción vinculados a los objetos. El dominio de referencia sobre el cual se constituye el pensamiento algebraico no es material sino matemático; las actividades y las acciones refieren a objetos matemáticos ya constituidos y permiten elaborar nuevos objetos. Las preguntas que orientan las relaciones a establecer (o las relaciones que se desean retener) son específicas e internas a las prácticas matemáticas. Otte (1992) afirma que las fórmulas algebraicas representan un estado de una forma de generalización (nunca acabada), un estado provisorio de un proceso de interacciones entre lo particular y lo general. Los modos de representación no son únicos, diferentes formulaciones pueden expresar características diferentes de un mismo objeto. Las relaciones entre lo particular y lo general, vinculando objetos, conceptos y signos se elaboran contextualmente y son susceptibles de generalización en función de su eficacidad hipotética en la resolución de actividades propias a la práctica matemática.

En el trabajo específicamente escolar, los dos tipos de generalizaciones mencionadas están presentes, por ejemplo, en actividades vinculadas a la identificación de regularidades obtenidas mediante el análisis de casos particulares (procesos inductivos), pero también mediante el uso de inferencias que conducen a un conjunto de relaciones organizadas deductivamente (procesos constructivos, validaciones universales).

Los análisis epistemológicos permiten identificar otro proceso de abstracción y generalización que caracteriza el desarrollo de las matemáticas y en el cual el simbolismo ha jugado un rol fundamental: se trata de la invención de objetos matemáticos mediante la manipulación de símbolos y en el cual se realiza una suspensión local de las significaciones provenientes de otros registros. Serfati (2005) explica que los trabajos anteriores a Leibniz (1646-1716) se sitúan en el registro de las significaciones: los únicos movimientos del pensamiento que eran reconocidos como legítimos se dirigían desde el registro de las representaciones al registro simbólico; ni Descartes ni Cardan consideraban que el registro estrictamente simbólico pudiera proporcionar sugestiones o informaciones (Serfati 2005, p.6). La creación de formas «sin significación» (Serfati, 2005), inconcebibles en el contexto de la escritura retórica, fue también resistida por muchos matemáticos y filósofos que rechazaban el hecho de que las matemáticas pudieran evitar de plantearse ciertos problemas ontológicos. En su texto «Funciones y conceptos», Frege (1848-1925) afirmaba:

> «La aritmética tiene por objeto los números enteros; de este modo, las letras «a» y «b» que aparecen en la expresión «a+b» solo pueden representar números enteros y basta con definir el uso del signo «+» ubicado entre los dos números enteros. Cualquier extensión del campo de objetos asignados a “a” y a “b” exige una nueva definición del signo «+». Prestar atención a que toda expresión tenga una denotación, a nunca calcular suponiendo que se lo hace sobre signos vacíos, creyendo operar sobre objetos; es esto lo que exige el rigor científico (…)»
>
> (Fonctions et concepts , Frege 1879, p. 92-93 , citado por Serfati, p.348).

Serfati (2005) muestra claramente que esta etapa es dominada por una concepción idealista de los objetos matemáticos en la cual la escritura simbólica estaba solamente al servicio de la representación de dichos objetos. Leibniz propone un cambio fundamental de la función del simbolismo: el sistema simbólico, además de representar objetos ideales, se transforma en un medio de invención de nuevos objetos. En este contexto, nuevas formas de abstracción y generalización emergen basadas en la preservación de conceptos y de formas simbólicas previamente definidas (por ejemplo, la invención de nuevos números preservando las propiedades de los campos numéricos ya conocidos). Si bien esta manera de producir objetos matemáticos ha enfrentado grandes dificultades, en particular referidas a los fundamentos de las matemáticas, no se puede negar que al interior de ciertos límites, ha sido y es una forma de producción en matemáticas que, desde un punto de vista didáctico, plantea ciertos obstáculos (Brousseau, 1998).

3. Metodología

La metodología adoptada en este trabajo es de tipo cualitativa, centrándose en el análisis del sentido y las significaciones de los discursos que emergen de ciertas propuestas pedagógicas (L'Écuyer, 1987; R.Mucchielli, 1988; Paillé, P et A.Mucchielli, 2012), y sobre el estudio didáctico de protocolos de observación del desarrollo de situaciones (Brun, J. et Conne, F, 1990). Hemos elegido ciertas actividades extraídas de los manuales escolares utilizados en Quebec, tanto en primaria como en secundaria, que ponen en evidencia los fenómenos didácticos mencionados precedentemente.

Los episodios didácticos elegidos provienen de una clase de primer año de secundaria de una escuela de alumnos que tienen dos años de retraso en relación al desarrollo curricular regular. La identificación de estos alumnos se realiza mediante el uso de los resultados de las evaluaciones nacionales que permiten asegurar el pasaje de un curso al siguiente. En Quebec, la denominación «alumnos con dificultad de aprendizaje» cubre diferentes categorías (dificultad de comportamiento, dificultad de adaptación, dificultades de lenguaje, etc.). En nuestro caso, se trata de una escuela que recibe a alumnos con un retraso escolar importante pero que no tienen problemas de comportamiento.

4. Lo concreto y lo abstracto en la aritmética y el álgebra: ciertas formas de concretización

Ciertas propuestas pedagógicas referidas a la enseñanza de las matemáticas, y en particular a la enseñanza de la aritmética y el álgebra, parten de un presupuesto raramente justificado y que pareciera ser independiente de la especificad del contenido en cuestión y de las condiciones específicas de producción de conocimientos: «debido al carácter abstracto de los objetos matemáticos, la enseñanza debe partir de algo más simple, en particular mediante la manipulación de material concreto». Bajo el supuesto que los alumnos tienen características cognitivas específicas, por ejemplo, algunos son más «visuales» o «táctiles», ciertas propuestas de enseñanza proponen utilizar dibujos para ayudar a los alumnos a «visualizar» los objetos matemáticos o utilizar material concreto elaborado a tales fines para favorecer la «manipulación». Desde un punto de vista del aprendizaje, este tipo de propuestas presuponen un cierto empirismo que lleva a considerar que los objetos matemáticos están presentes en los dibujos o en el material concreto y que la acción fundamental de los alumnos es de «ver» en ellos lo que la propuesta didáctica supone que es visible.

Analicemos el siguiente ejemplo de un manual escolar de Quebec (Canadá):

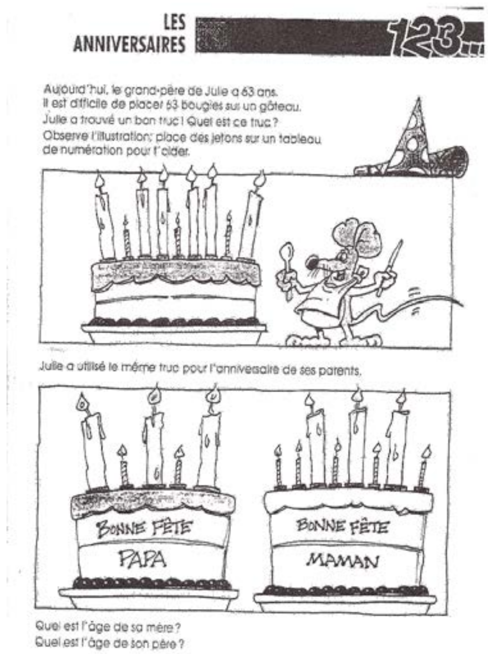


Imagen 1

Manuel Climaths, 2011

La consigna del problema explica que el abuelo de Julia tiene 63 años y que como es difícil poner tantas velitas en la torta, se ha inventado un «truco» para que todas las velitas entren. La consigna propone explícitamente "observar la ilustración" para obtener la respuesta y ayudarse ubicando fichas sobre una tabla de numeración. A continuación se presentan otras dos tortas con velas y se afirma que se usó el mismo «truco» que en la primera torta para ubicar las velitas. La tarea de los alumnos consiste en determinar la edad del padre y de la madre. Analizaremos cómo los alumnos comprenden el « truco » al cual hace referencia la consigna.

El autor de la actividad presupone que el alumno «observará», en la primera torta (imagen 1), 6 velas grandes y 3 pequeñas y que atribuirá 10 años a cada una de las velas grandes y 1 año a cada vela pequeña. De esta manera, el papá debería tener, para el autor del manual, 32 años y la mamá 35 años.

Sin embargo, un alumno ha propuesto la siguiente respuesta:

En la primera torta hay 9 velitas , entonces: 9 x 7 = 63… cada velita vale 7.

Entonces, el papá tiene entonces 35 años y la mamá 56.

La respuesta del alumno es absolutamente correcta, puesto que ninguna de las condiciones de la actividad exige atribuir valores diferentes a las velas de distinto tamaño. Sin embargo, esta respuesta no es considerada correcta por el autor del manual (ni por el maestro) quien espera que el alumno «observe» en el problema presentado el conocimiento matemático que él presupone está «contenido» en el dibujo (la respuesta esperada está enunciada en la guía para le docente). Sin embargo, el ejemplo revela que éste conocimiento no está contenido en el dibujo y que, por lo tanto, no es accesible por «observación»; el conocimiento que se desea elaborar es producto de la interacción del alumno con el problema específico y, de esta manera, depende de las condiciones propias de la situación didáctica (siendo el problema matemático una parte importante de esta situación).

Otro ejemplo, también extraído de un manual escolar de Quebec, muestra la utilización de material concreto para explicar la sustracción de números negativos:

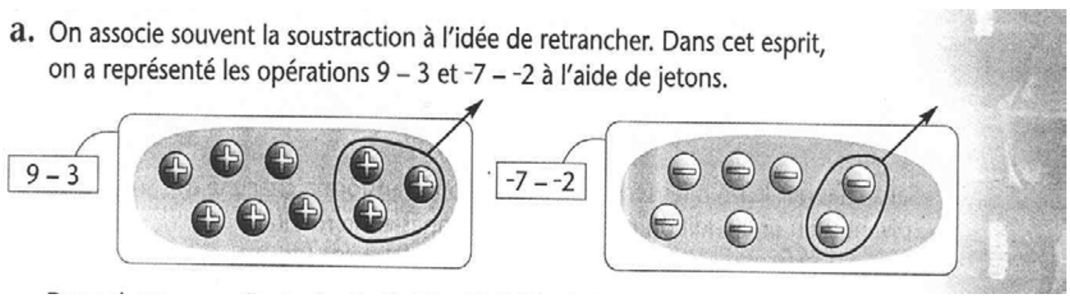


Imagen 2

Manuel Panoramath, 2013

El autor afirma que habitualmente se asocia la sustracción a la idea de «extraer» y que, para preservar este sentido, se han representado dos cálculos, 9-3 y -7-(-2) mediante la ayuda de fichas. En el primer ejemplo, hay 9 fichas con signo + (representando el número « 9 ») y se extraen 3 de estas fichas. Este esquema representa la operación 9-3.

En el segundo ejemplo, se dispone de 7 fichas en las que se han dibujado signos negativos y se extraen dos de estas fichas, representando así el cálculo -7-(-2). Sin entrar en los detalles de la complejidad a la cual conduce esta propuesta en el momento de explicar las operaciones combinando números positivos y negativos, la materialización de los cálculos que se presentan en este pasaje es suficiente para mostrar sus límites en el contexto mismo de la sustracción de dos números negativos: el cálculo -2- (-7) no puede ser representado con este sistema puesto que no es posible “extraer” 7 objetos de 2 objetos.

En esta propuesta didáctica, los números enteros son tratados como números naturales y son asociados a la representación de magnitudes (-2 representa «dos» fichas); la sustracción es interpretada de la misma manera que en le contexto de los números naturales (como una extracción). Sin embargo, la naturaleza específica de los números negativos muestra rápidamente los limites de estas interpretaciones: todo intento de reducción de los números enteros a la representación de magnitudes (como un medio de reducir el nivel de abstracción) produce una serie de contradicciones que se manifiestan rápidamente. Vemos que en este caso, cómo la decisión didáctica de utilizar un material concreto para introducir ciertos objetos matemáticos tiene un impacto sobre la naturaleza de dichos objetos y por ende, sobre la conceptualización del nuevo campo numérico.

En la guía destinada al profesor, el autor del manual afirma que las situaciones de enseñanza deben proponer contextos reales, apoyadas sobre la realidad cotidiana de los alumnos:

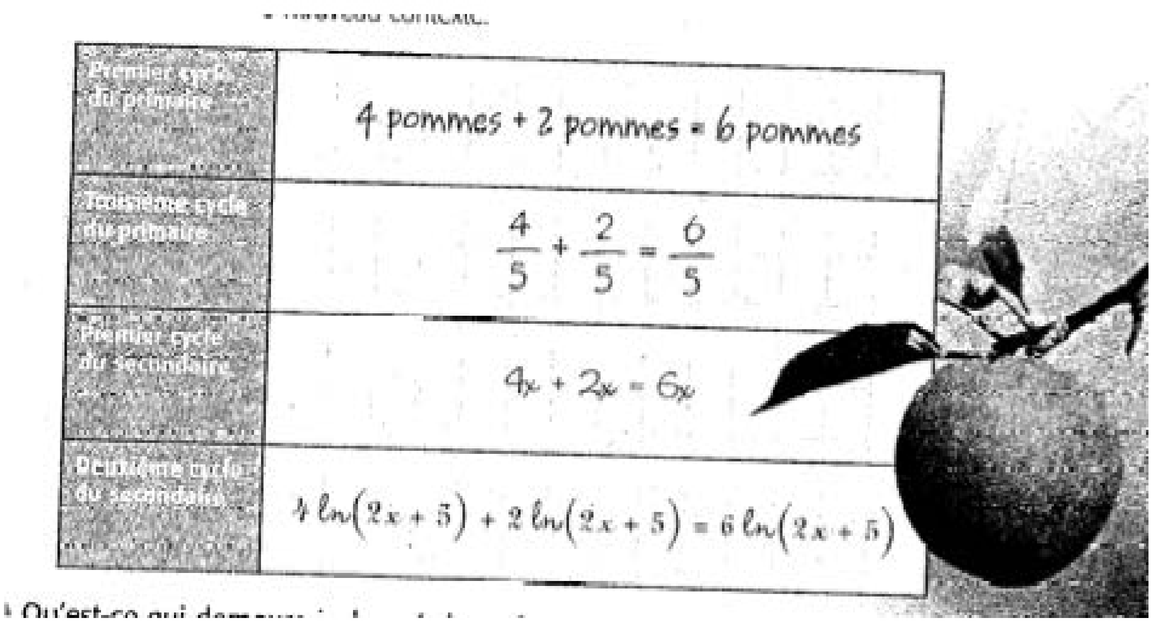
> «Observar, interpretar, interactuar con el mundo mediante la ayuda de las matemáticas, tal es la idea principal retenida para sensibilizar a los alumnos de la omnipresencia de las matemáticas en su entorno» (Manuel Panoramaths, guía del profesor, Introducción, p.3).

Una confusión se desliza entre la modelización matemática y el recurso a objetos materiales (como el caso de las fichas) utilizados para ilustrar el funcionamiento de ciertos saberes matemáticos (en nuestro caso, los números enteros).

De este modo, las propuestas que adoptan principios genéricos tales como «ir de lo concreto a lo abstracto», «favorecer la utilización de material concreto», «volver a lo concreto cuando hay problemas de comprensión», «usar ejemplos para ilustrar objetos abstractos», etc., deben analizarse considerando la especificidad de los saberes implicados: una vigilancia epistemológica es necesaria, en particular, en lo que respecta a la preservación de los objetos de enseñanza. Un implícito guía estas propuestas pedagógicas: el acceso a los objetos matemáticos se realiza, en general, mediante inducciones empíricas. Sin embargo, la naturaleza de estos objetos resiste a este empirismo, ya que diferentes formas de abstracción y generalización son específicas de la constitución de objetos matemáticas y no pueden ser ignoradas ni al pensar las propuestas de enseñanza ni al interpretar las dificultades de los alumnos en matemática.

En el caso particular del álgebra, el rol de la aritmética como «dominio de experiencia posible» (Chevallard, 1989) a partir del cual elaborar el pensamiento algebraico es marcado por una concepción limitada del álgebra en tanto que lenguaje: en el ámbito escolar, el lenguaje algebraico es usado para simbolizar las propiedades conocidas de la aritmética. Estas propiedades no son consideradas como saberes sobre los cuales apoyarse para efectuar cálculos con expresiones algebraicas y para validar dichos cálculos (Broin, D. 2002).

Analicemos un ejemplo de un manual escolar utilizado en Quebec (Manuel «À vos maths !») , en el cual se trata a las variables que figuran en las expresiones algebraicas como objetos materiales, reduciendo implícitamente una de las funciones fundamentales de estas expresiones, la de expresar una generalidad:



Premier cycle du primaire	4 pommes + 2 pommes = 6 pommes
Troisième cycle du primaire	$\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$
Premier cycle du secondaire	$4x + 2x = 6x$
Deuxième cycle du secondaire	$4\ln(2x+5) + 2\ln(2x+5) = 6\ln(2x+5)$

Imagen 3

Manuel à vos maths, 2014

En la expresión 4 x + 2 x = 6x, se asocia la letra x al objeto «manzana» (“ponme” en francés) y el cálculo se justifica haciendo referencia a este contexto material:

4 manzanas + 2 manzanas = 6 manzanas.

Esta asociación de las variables a objetos concretos lleva a postular ciertas reglas de acción que pueden generar ciertos obstáculos didácticos. El autor afirma que en la adición o la sustracción de términos semejantes, las cantidades deben ser «de la misma naturaleza», es decir que no es posible efectuar 2 a + 2 b ya que no se pueden sumar “manzanas” con “peras”.

Sin embargo, sabemos bien que cuando se trata de probar que la suma de dos números pares es un numero par, debemos operar con la expresión 2 a + 2 b para poner en evidencia el factor 2 (2 (a+b)). En el contexto escolar, esta operación se la vincula con la “factorización”, agregando de esta manera diferentes tipos de nombres para diferentes tipos de tareas. En el caso de 2 a + 2 a = 4 a, se habla de suma de términos semejantes y no de factorización; sin embargo, 2 a + 2 a = 2 a (1+1) = 4 a.

De esta manera, se establece una confusión ya que, para cierto tipo de tareas se afirma la imposibilidad de transformar la expresión 2 a + 2 b y para otras se propone la factorización. Este confusión aparece puesto que se evita tratar el problema del cálculo algebraico en el dominio estrictamente matemático.

En un pasaje posterior, el autor remarca que la interpretación de la multiplicación como “adición reiterada” es útil para adicionar términos semejantes:

5x + 3x

x+x+x+x+x+x+x+x

8x

A partir de la proposición de varios ejemplos similares con coeficientes naturales, el autor produce una generalización inductiva (del tipo a x + b x = (a+b) x), afirmando que sólo los coeficientes influencian el resultado de la adición o de la sustracción de términos semejantes y que, además, los coeficientes no tienen porque ser solamente números naturales: 2,3 y – 6,4 y = -4,1 y.

De este modo, se construye por inducción, una regla de acción destinada a operar con términos semejantes, en continuidad con la idea de asociar las variables a objetos materiales. Efectivamente, la inducción es necesaria puesto que la adición reiterada (primer modo de validación) no permite justificar la adición de términos semejantes con coeficientes no naturales.

La representación de las variables mediante el uso de objetos materiales (con el objetivo de reducir el nivel de complejidad o el nivel de abstracción implicado en los cálculos algebraicos) conduce a una aritmetización de las operaciones algebraicas: en particular, el signo de igualdad es utilizado como sinónimo de «resultado de» y no como una equivalencia. La propiedad distributiva de la multiplicación, que fundamenta el cálculo a x + b x = (a + b) x, no es ni siquiera mencionada. Esta propiedad aparece cuando se trata de transformar 3 (x+5) = 3x + 15 pero no es utilizada cuando se trata de efectuar 9x + 2x = (9+2) x. Una vez más, el signo de la igualdad pareciera no ser interpretado como una equivalencia; recordemos, además, que en este último ejemplo, al autor afirma que se ha «factorizado» la expresión y nunca menciona que se ha usado la propiedad distributiva.

Esta concepción empirista-sensualista del conocimiento propone una construcción de la teoría algebraica por abstracción y generalización inductiva, a partir de la «observación» de ejemplos particulares de la aritmética; la aritmética no es usada aquí como un medio para producir una semántica para los enunciados algebraicos (Chevallard, 1989).

5. Dominios de experiencia y enseñanza del algebra

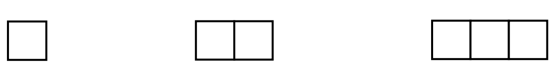
Desde un punto de vista histórico, el álgebra se desarrolla en interacción con los dominios numéricos y geométricos, interacción que va más allá de producción de generalizaciones y abstracciones inductivas y que se caracteriza por una idea de unificación y de búsqueda de métodos generales permitiendo resolver clases de problemas. Se trata de una relación dialéctica entre los dominios de referencia (“una realidad posible”) y el saber emergente que constituye el pensamiento algebraico (Chevallard, 1989): por un lado, los sistemas de números, por ejemplo, funcionan como dominio de cálculo sobre la base del cual se elabora el pensamiento algebraico y, por otro lado, el cálculo algebraico es un útil fundamental para la construcción de los dominios numéricos sucesivos. Es en el contexto de esta dialéctica que el carácter operatorio del útil algebraico adquiere significación y permite revelar aspectos no conocidos del dominio de referencia:

> “…el pasaje de la expresión (2p – 1) + (2p+1) a la expresión 4p, mediante simplificación, pone en evidencia que (2p-1) + (2p+1) designa un múltiplo de 4; el pasaje de 4p a $(p+1)^2 - (p-1)^2$ permite poner en evidencia que (2p – 1) + (2p + 1) es una diferencia de dos cuadrados…” (Chevallard, 1989, p 75).

Otte (2006) expresa también, de otra manera, este carácter «revelador» del álgebra: apoyándose sobre Peirce, el autor interpreta el álgebra como siendo una especie de diagrama que ayuda a comprender el estado de las cosas experimentadas o imaginadas. El álgebra permite mostrar algo diferente del hecho en sí mismo, ella permite un desplazamiento de un tipo de pensamiento centrado sobre objetos hacia un pensamiento centrado sobre relaciones, rindiendo cuenta de esta manera de la actividad misma. Aún si el diagrama algebraico (la fórmula) no tiene semejanza con el objeto al que refiere, el diagrama permite acceder a verdades relativas a dicho objeto, diferentes de aquellas que determinan su construcción. La utilidad de las formulas algebraicas consiste precisamente en esta capacidad de revelar verdades inesperadas (Otte, 2006).

Desde el punto de vista de la enseñanza, las relaciones susceptibles de generalización y, por ende, el carácter revelador del pensamiento algebraico al cual se refiere Otte están estrechamente ligadas con la intencionalidad didáctica de la situación propuesta (no se trata de inventar nuevos objetos matemáticos sino de buscar condiciones de apropiación de una práctica preexistente).

Analicemos los siguientes ejemplos extraídos del manual “À vos maths!” (premier año de la escuela secundaria) que ha sido utilizado en la clase en la cual hemos recogido las experimentaciones . En el primer caso, se propone construir con fósforos dibujos como los siguientes agregando en cada paso un cuadrado:



Paso 1 Paso 2 Paso 3

a) ¿Cuántos fósforos se necesitan para construir la figura correspondiente al paso 59?

b) ¿Cuántos fósforos se necesitan para construir la figura correspondiente al paso 657?

Este problema y los que presentaremos a continuación han sido trabajados en una clase de alumnos con dificultades en matemática, siendo el objetivo la introducción de ciertas expresiones algebraicas simples. En un primer tiempo, se propone la actividad precedente sin pedir la elaboración de una fórmula algebraica. En las actividades posteriores, la introducción de letras y la expresión del término general mediante una fórmula algebraica aparecen como objetivos didácticos.

Durante la puesta en común en la que se analizan diferentes maneras de contar, el profesor discute una de las proposiciones de los alumnos (que le conviene a sus fines didácticos):

Paso 1 4
Paso 2 4 + 3 = 7
Paso 3 7 + 3 = 10
Paso 4 10 + 3 = 13
Para el paso 59, un alumno afirma:
A1: Necesitamos conocer cuantos fósforos se utilizaron en el paso anterior para poder agregar 3.
Profesor: ¿Y cuántos fósforos tienen en el paso 58?
A2: No sabemos…
Profesor: ¿Y pueden calcularlo?
…..silencio…..
A1: Bueno, necesitaríamos saber cuántos fósforos se usaron en el paso 57 ….
Profesor: ¿Y entonces?
A1 No sé, … es largo…
Profesor: Les voy a mostrar una manera de escribir los cálculos, a ver si esto los ayuda.
Paso 1 4
Paso 2 4 + 3 = 7
Paso 3 4 + 3 + 3 = 10
(El profesor acompaña la escritura con explicaciones orales, mostrando que en lugar de escribir el resultado 7, escribe la manera en que este resultado ha sido calculado.)
Paso 4 4 + 3 + 3 + 3 = 13
(Este paso también es acompañado de una explicación oral del mismo tipo que la precedente.)
Paso 5 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16
¿Cuántas veces sumamos 3?

A1: 4 veces
Profesor: Entonces, ¿están de acuerdo que para hacer más rápido puedo escribir, para el paso 5, 4 + 4 x 3?
A2: Sí
Profesor:
Paso 6 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3
¿Podemos hacer 4 + 5x 3?
A2: si
Profesor: ¿Y si queremos calcular el paso 40?
A2: Ah… se puede hacer 4 + 39 x 3
Profesor: Bien, entonces ahora pueden calcular para el paso 59…
A1: Sería…. 4 + 58 x 3….
Profesor: Bien.. ¿y para 657?
A2: 4 + 656 x 3
…………

A continuación, el profesor propone la siguiente actividad, que él mismo ha elaborado :

Se desea decorar un piso con baldosas y alrededor de cada baldosa gris se ponen baldosas blancas como se muestra en el dibujo.

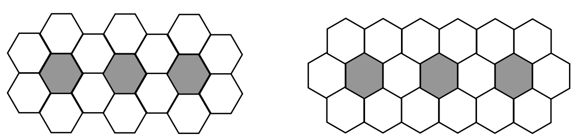


Image 4

a) ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan si el dibujo contiene 35 baldosas grises? ¿Y si contiene 679 baldosas grises?
b) Encontrar una fórmula que permita calcular el número de baldosas blancas necesarias para un número cualquiera de baldosas grises. Justificar.

El mismo grupo de alumnos (A1 y A2) tiene dificultad para interpretar y resolver el nuevo problema. Luego de diversos intentos, el profesor interviene:

…
Profesor: ¿Recuerdan lo que hicimos en la actividad anterior?
Silencio….

Profesor: Buscamos una manera de calcular para ir más rápido…
A2: Ah sí, cierto…
Profesor: ¿Pueden hacer un razonamiento similar para calcular rápidamente, como hicimos antes?
A2: Ah sí…

Paso 1	4 …	4+ 2
Paso 2	4 + 3 +…	4+ 3 + 2
Paso 3	4 + 3 + 3 …	4+ 3 + 3 + 1

……
A2: No se puede, no tenemos siempre 3….

Este pasaje muestra que la expresión «un razonamiento similar» usada por el profesor es interpretada de manera específica por el alumno: éste no "ve" en la estrategia propuesta en el primer problema la regularidad que el profesor espera sea reconocida (es decir, aquella que consiste en partir del primer término que es 6 y agregar siempre 4). Según Sadovsky et al. (2001), no es sorprendente que los alumnos no observen lo que el profesor espera, y que retengan aspectos que no son aquellos vinculados a la intencionalidad didáctica. Para el profesor, el ejemplo presentado a los alumnos en el primer problema es un ejemplo de «algo ya elaborado»: este ejemplo representa la particularidad de una generalidad preexistente que vincula finalidad y objetivo didáctico. La generalidad que el alumno debe reconocer está en principio contextualizada por el objetivo didáctico de producir una expresión algebraica. Un doble proceso de adaptación y de aculturación caracteriza los procesos de generalización de conocimientos matemáticos escolares. Efectivamente, por un lado, los alumnos adaptan o modifican sus conocimientos para encontrar una solución al problema presentado y, por otro, esta actividad específica debe insertarse en un proceso de institucionalización que la ubica al interior de un conjunto de saberes preestablecidos que el alumno debe apropiarse.

En el primer problema presentado, la relación entre el número de veces que se adiciona 3 y el paso no es identificada explícitamente por el profesor y, sin embargo, este implícito es un elemento esencial para el reconocimiento de la relación de generalidad buscada.

Vemos bien que el rol de los ejemplos (lo singular) en la producción de la generalidad depende de las decisiones específicas tomadas por el profesor (implícitas y explícitas) y de la actividad realizada con los mismos.

Dos niveles de abstracción (Orit Hazzan et Rina Zazkis, 2005) están presentes en los ejemplos presentados. En primer lugar, un nivel que pone en juego relaciones entre objetos (los que hacen parte del «medio» de la situación) y sujetos (conocimientos del sujeto), relaciones que se ponen en evidencia mediante la identificación de regularidades que no eran esperadas por el profesor (regularidades que no son inherentes a los objetos sino que emergen de la interacción sujeto-objeto, es decir, a partir de la interpretación que hace el alumno de la situación en la cual se encuentra, a partir de un conjunto de conocimientos y de experiencias disponibles) y que implican también la construcción de esquematizaciones (en el sentido de Gonseth). En segundo lugar, un nivel (dirigido por la acción del profesor) que exige una reflexión sobre la relación proceso-objeto (centrado sobre las acciones), vinculando la producción de una formula y su representación simbólica mediante la producción de una expresión algebraica.

El acceso a niveles de abstracción más elaborados, centrados sobre «las acciones» o sobre «acciones hechas sobre acciones», etc. , está íntimamente ligado con la variedad y con la riqueza de las situaciones didácticas presentadas, puesto que éstas favorecen la elaboración de relaciones de naturaleza diversa.

La tradición empirista de la enseñanza presupone que los procesos de abstracción emergen a partir de la identificación de ciertos «rasgos comunes» al análisis de experiencias particulares y que estos rasgos son posteriormente aplicables a una variedad de experiencias nuevas, asociando de esta manera la generalización y la descontextualización. Estos rasgos identificados serían independientes de la intencionalidad didáctica y del contexto de producción (según esta tradición, estos rasgos están «contenidos» en las experiencias y el sujeto no tiene más que «descubrirlos»).

Nuestro trabajo muestra que si bien la abstracción implica un cierto proceso de descontextualización, este proceso está más bien ligado, en el ámbito del aprendizaje, a la variabilidad de los contextos de producción y a la intencionalidad didáctica inherente a la construcción de dichos contextos. Esta intencionalidad no está organizada en función de particularidades de los alumnos sino que se desarrolla al interior de prácticas específicas de una comunidad (de manera colectiva), en nuestro caso, las prácticas de enseñanza de las matemáticas. La naturaleza de las situaciones propuestas y la acción del profesor, en tanto que representante de una comunidad encargada de transmitir saberes matemáticos preexistentes, son elementos esenciales de dicha organización.

Nuestras observaciones muestran que las intervenciones de los profesores, relativas a alumnos con dificultad de aprendizaje, se centran en la reducción del nivel de complejidad de las tareas, a tal punto que se desnaturaliza el objeto matemático en cuestión y se obstaculiza el acceso a diferentes niveles de abstracción y generalización propios a la constitución del pensamiento algebraico. La atribución de las dificultades de abstracción a las características cognitivas de los alumnos debe analizarse a la luz de estos resultados.

Orit Hazzan y Rina Zazkis (2005) afirman que los alumnos priorizan estrategias de reducción de niveles de abstracción durante la resolución de actividades matemáticas («Reducing abstraction»). Nuestras investigaciones sugieren que esta afirmación debe interpretarse en el seno de una cultura escolar que favorece dicha reducción y que considera que el acceso a lo abstracto se realiza mediante la manipulación de «lo concreto», independientemente de la naturaleza de los saberes en cuestión.

El ejemplo que hemos analizado muestra que el sistema de referencia sobre el cual se construye el pensamiento algebraico en el ámbito escolar puede contener objetos matemáticos (y no necesariamente objetos materiales) y que la posibilidad de funcionar como medio de acción sobre el cual operar para construir nuevos objetos está vinculada con la familiaridad que el alumno adquiere con este sistema (es decir con los conocimientos implicados y no con el hecho de ser un medio formado por objetos materiales). Sin embargo, los alumnos interactúan con situaciones organizadas en función de diferentes niveles de abstracción y generalización, pero «lo abstracto» se torna «concreto», no mediante una reducción de los objetos de pensamiento a objetos materiales, sino en función de la frecuentación de los alumnos con situaciones didácticas variadas que permitan mostrar la utilidad de dichos objetos.

6. Conclusión

Hemos intentado poner en evidencia que ciertas proposiciones pedagógicas sugieren la manipulación de objetos concretos como medio para construir objetos algebraicos sin considerar el impacto que estas proposiciones puedan tener sobre la naturaleza de la conceptualización elaborada. No se trata de ninguna manera de descartar las manipulaciones materiales como parte de una experiencia didáctica sino de considerarlas en función de las condiciones didácticas que hacen posible el desarrollo del objetivo de enseñanza y de los niveles de conceptualizar a alcanzar.

El análisis de ciertas propuestas pedagógicas nos ha permitido ilustrar ciertas formas particulares de “concretización” de los objetos matemáticos, en particular aquellos que asocian los objetos matemáticos a objetos materiales, y que presuponen que las características de los primeros se construyen mediante la manipulación de los segundos. Se han también identificado ciertos obstáculos didácticos con el objetivo de contextualizar las interpretaciones estrictamente cognitivistas de las dificultades de abstracción en el aprendizaje de las matemáticas.

Lo que es importante en la construcción del pensamiento matemático es la naturaleza de las interacciones entre los alumnos y un medio didáctico organizado por el profesor (medio que puede contener o no objetos materiales) y no la manipulación en sí misma de objetos materiales (Brousseau, 1990). El contexto juega un rol fundamental; en el contexto incluimos la finalidad de la situación, las interpretaciones producidas por los alumnos de la situación en la cual se encuentran y la acción del profesor que refleja ciertos modos culturales de la actividad matemática (Brousseau, 1990; Radford, 2016, 2015; Radford & al. 2009).

Los procesos de generalización y abstracción implicados en el aprendizaje de las matemáticas no son independientes de la naturaleza de las situaciones propuestas y de la acción del profesor en tanto que representante de la cultura matemática escolar (Radfird & al. 2009) y requieren actividades de reorganización de conocimientos, el establecimiento de nuevas relaciones, la integración de conocimientos vinculados a una objeto y el desarrollo de una práctica matemática sostenida formando parte de una práctica social preestablecida (Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T.,2001).

Una tensión caracteriza los procesos de enseñanza y aprendizaje, en lo que respecta a la abstracción en matemáticas: por un lado, los alumnos priorizan estrategias de reducción de los niveles de abstracción («Reducing abstraction», Orit Hazzan & Rina Zazkis) (posiblemente la cultura escolar favorece esta priorización) y, por otro lado, la especificidad de los objetos de saber provoca un movimiento inverso.

La interpretación de la producción de los alumnos y el análisis de las dificultades de aprendizaje deben realizarse en el contexto de esta tensión. Ciertas interpretaciones, en particular las realizadas por la psicología cognitiva (Autor, 2016), minimizan el rol que juegan las condiciones didácticas en la producción de saberes y atribuyen las dificultades de abstracción a deficiencias en los mecanismos cognitivos del sujeto.

Bibliografía

Barallobres, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. Petit x. Num. 80. p. 55-76.

Barallobres, G. (2016). Difficultés en mathématiques, difficultés d’abstraction: des liens nécessaires entre enseignement et apprentissage. *Bulletins AMQ*, Vol 56, No.4 35-51.

Barallobres. G. (2016). De légendes pédagogiques à légendes psychologiques : analyse des critiques de N. Baillargeon et didactique des mathématiques. McGill Journal of Education. Volume 51, No.2, Sping, 917-933.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). Approaches to algebra : Perspectives for Research and Teaching. Dotdrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bergeron, L. (2017). Difficultés d’abstaction en mathématiques: certains fondements théoriques et idéologiques du discours noospérien de l’adaptation scolaire. Mémoire de maîtrise. Université de Québec à Montréal.

Bessot, A. (2011). L’ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations, in: C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F., Vandebrouck, F. Wozniak (éds.) En amont et en aval des ingénieries didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage. 33-43.

Brousseau, G. (1998). Théorie de situations didactiques. La Pensée sauvage, Grenoble, France.

Brun, J. et Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, *90*(3), 261-285.

Cai, J., Knuth, E. (2011). Early Algebraization. Springer. Coulange, L., Drouhard, J.P. (eds.) (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des mathématiques, 66-79.

Coulange L., Drouhard J-P. (Eds) (2012), Enseignement de l'algèbre, Bilan et perspectives, Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble, France.

DeBlois, L. (2014). Les tensions et les questions soulevées dans les rapports enseignement/apprentissage des mathématiques liées aux élèves dits en difficulté. In Recherche sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, regard didactique. Presses de l'Université de Québec. 35-56.

Delaunay, A. «Abstraction», Encyclopædia Universalis [en ligne], consulté le 19 avril 2016. URL : http://www.universalis.fr/encyclopedie/abstraction/

Fondation Jean Piaget (2000), Abstraction réfléchissante et généralisation constructrice (en linea). http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=124&IDMODULE=22

Giroux, J. (2000). Le plaisir de faire des mathématiques, de les enseigner et de les apprendre. http://www.adaptationscolaire.net/themes/JacintheGiroux.pdf.

Giroux, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire**.** Revue des sciences de l'éducation (302-325).

Gonseth, F. (1936) Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique. Felix Alcan, Paris.

Hazzan, O., Zazkis, R. (2005) Reducing Abstraction: The case of school mathematics. Educational Studies in Mathematics 58: 101–119.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T. (2001) Abstraction in context : Epistemic actions. Journal for Research in Mathematics Education. 34-49.

Houle, V. (2007) La calculette comme outil pour enseigner et apprendre la numération de position dans une classe d'élèves en difficulté d'apprentissage. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.

Laporte, J. (1940). Le problème de l'abstraction. Presse Universitaires de France. Legendre, M-F, Piaget et l'épistémologie. Fondation Jean Piaget (en ligne), http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=309&IDMODULE=72

L'Écuyer, R. (1987). L'analyse de contenu : notion et étapes. Dans Deslauriers, J.-P. (Éd.), Les Méthodes de la recherche qualitative (pp. 49-65). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Lemoyne, G; Lessard, G. (2003). Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants. Éducation et francophonie. Volume XXXI, (2), 67-79.

Mary, C., Squalli, H. (2014). L'activité de generalization et justification chez les élèves en difficulté. In Recherche sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, regard didactique. Presses de l'Université de Québe. 123-145.

Mucchielli, R. (1988). L'analyse de contenu des documents et des communications. (6e éd.). (Coll. « Formation permanente en sciences humaines »). Paris : les éditions ESF.

Otte, M. (1992). Constructivism and Objects of Mathematical Theory. In Javier Echeverria, Andoni Ibarra & Thomas Mormann (eds.), The Space of Mathematics. De Gruyter 296—313.

Paillè, P. et Muchielli, A. (2012). L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales. Collection U, Armand Collin.

Radford, L. (2016). The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. International Journal for Research in Mathematics Education (RIPEM), 6(2), 187-206.

Radford L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 334-345. Alger: 10-14.

Radford, L., Miranda, I., & Demers, S. (2009). Processus d'abstraction en mathématiques. Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Sadovsky, et al. (2001). Actualizacion curricular 7mo grado. Direccion de curricula. Gobierno de la ciudad de Buenos Aires.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. Petit x,12. Irem de Grenoble.

Serfati, M. (2005) La révolution symbolique: La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Paris: Éditions Pétra.

Sierpinska, A. (2012). L'arbre banyan de l'expérience d'un formateur. In J. Proulx, C. Corriveau & H. Squalli (Eds.), Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques. Pratiques, orientations, recherches. (pp. 91-98). Montréal, QC : Presses de l'Université du Québec.

Autor: **Gustavo Barallobres.** Profesor en la facultad de ciencias de la educación de la Universidad de Quebec en Montreal, miembro del grupo de estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en adaptación escolar (GEMAS), investigador asociado al laboratorio «Cultulra y difusión de saberes», de la Universidad Victor Segain, Bordeaux 2, Francia.

Dirección electrónica: barallobres.gustavo@uqam.ca

Dirección postal : 4313 Messier apt 3, Montréal, Québec, H2H2H6

Tel : 1-514 527-1503