UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 307-313

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación.

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Jorge fue a la bodega a comprar una o más bolsas de 1 kg de arroz, una o más bolsas de 1 kg azúcar y una o más cajas de 1 litro de leche. Si los precios de cada unidad de estos productos envasados son 3 soles, 2 soles y 2,50 soles respectivamente, ¿qué cantidades de estos productos envasados debería comprar para que el total a pagar sea exactamente 20 soles?

Ciertamente, no hay recetas para crear ni para resolver problemas de matemáticas. La base fundamental es la creatividad y los conocimientos matemáticos; sin embargo, ante la reconocida importancia de la creación de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos, se hace necesario desarrollar pistas y estrategias para crear problemas, sobre todo para los profesores en formación y en ejercicio. Considero que parte fundamental de esas pistas es que quien crea un problema tenga en cuenta los cuatro elementos esenciales de todo problema: *información* (datos cuantitativos, figurales o relacionales)*; requerimiento* (lo que se pide que se encuentre, examine o concluya); *contexto* (intra matemático o extra matemático); *y entorno matemático* (marco matemático global) (Malaspina, *2017)*. Con este enfoque y como parte de un taller desarrollado con profesores en formación, el problema con el que iniciamos este artículo fue creado por un grupo de tres alumnas del primer ciclo de estudios de profesorado en educación inicial, en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

El taller se desarrolló mediante trabajos grupales en una experiencia didáctica con tres bloques de actividades, a partir de un problema propuesto en el marco de un episodio en una clase con alumnos de segundo grado de primaria, usando instrumentos especialmente diseñados.

A continuación, se describen los tres bloques de actividades del taller:

Actividades I.

a) Presentación del episodio en el cual se narra que la profesora Zoila propuso a sus alumnos de segundo grado de primaria el siguiente problema:

> *En la pizarra están escritos los números 43; 96; 14; y 87. Encuentren el número que sea la mayor suma que se puede obtener sumando dos de estos números.*

b) Comprensión y resolución del problema.
c) Creación y resolución de un problema que los alumnos del taller habrían propuesto a sus alumnos, con las ideas que sugiere el problema propuesto por la profesora Zoila.

Actividades II.

a) Reconocimiento de la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático del problema propuesto por la profesora Zoila.
b) Reconocimiento de la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático del problema creado en el bloque de Actividades I.

Actividades III.

a) Creación y resolución de un nuevo problema, modificando uno o más de los elementos del problema propuesto por Zoila.
b) Reconocimiento de la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático del problema creado en la parte (a).

Notar que las Actividades III se desarrollan ya en conocimiento de los cuatro elementos fundamentales de un problema y el reconocimiento de estos, tanto en el problema de la profesora Zoila, como en el problema creado en la parte (c) de las Actividades I,

En general, y también por apreciación propia de los estudiantes participantes en el taller, los problemas que crearon en el tercer bloque de actividades fueron más interesantes o retadores que los problemas que crearon en el primer bloque de actividades, sin el conocimiento e identificación de los elementos de todo problema.

A continuación, se muestra el caso del Grupo 9, conformado por tres alumnas del primer ciclo universitario del profesorado de educación inicial:

- Problema creado en el bloque de Actividades I, pensado para el primer grado de primaria:

> El siguiente ejercicio consiste en escoger cuatro números menores de 20 y para finalizar sumarlos.

Las alumnas identificaron en este problema:

Información:	Los números naturales menores que 20.
Requerimiento:	Escoger cuatro números menores que 20 y sumarlos.
Contexto:	Intra matemático
Entorno matemático:	Números naturales, adición.

- Problema creado en el bloque de Actividades III, pensado para el sexto grado de primaria[1]:

Jaime fue a la Tienda a comprar 1Kg de arroz
a S/3 00, azucar S/2.00 y leche a S/2.50
Si tiene S/20.00 . ¿Qué cantidad de productos
Tendría que comprar para que no reciba
vuelto?

Las alumnas identificaron en este problema:

Información:	Cantidades, precios.
Requerimiento:	Encontrar una cantidad exacta (que se tenga que pagar exactamente 20 soles)
Contexto:	Extra matemático
Entorno matemático:	Operaciones combinadas de multiplicación de cantidades por precios (incluyendo expresiones decimales) y sumas de estas.

Comentarios

1. Este problema tiene muchas potencialidades matemáticas y didácticas:

- No tiene solución única.
  Así, la solución mostrada por las autoras es

S/
1 kg de arroz → 3 00
1 kg de azúcar → 2 00
1 tarro de leche → 2 50

Cant. Azúcar 3 (2kg) + Cant. Arroz 3 (3kg) + cant. Leche 2 (2.50)
6 + 9 + 5 = 20 soles

O sea:

3 kg de azúcar:	6 soles
3 kg de arroz:	9 soles
2 litros de leche:	5 soles

Esta compra, efectivamente, hace un total de 20 soles, pero hay otras soluciones; por ejemplo:

[1] Se presenta la versión original del problema. Ha sido ligeramente modificado en su redacción para su presentación al inicio de este artículo, manteniendo lo esencial y buscando solo mayor claridad y precisión.

1 kg de azúcar:	2 soles
1 kg de arroz:	3 soles
6 litros de leche:	15 soles

El lector queda invitado a encontrar otras soluciones.

Es interesante y muy instructivo proponer problemas como este, que no tengan una respuesta única. Más aún, que el problema haya sido creado por alumnas que están empezando su formación de profesoras de educación inicial. Esto provino de cambiar el contexto intra matemático del problema que crearon en el bloque de Actividades I, con el consiguiente cambio de información; hacer más exigente el requerimiento de la suma (ahora no se trata solo de sumar números, sino de escoger los sumandos adecuadamente para que la suma total sea 20); y ampliar el entorno matemático, considerando operaciones combinadas de multiplicación con adición, y expresiones decimales.

- Una manera formal de resolver este problema, es usar las variables x, y y z para representar las cantidades (enteras positivas) de kilos de azúcar y arroz, y de litros de leche, respectivamente. Así,

  $2x$ representa lo que hay que pagar por x kilos de azúcar, a 2 soles cada kilo;

  $3y$ representa lo que hay que pagar por y kilos de arroz, a 3 soles cada kilo

  $2{,}5z$ representa lo que hay que pagar por z litros de leche, a 2,5 soles cada litro.

  $2x + 3y + 2{,}5z$ representa el pago total por x kilos de azúcar, y kilos de arroz y z litros de leche, a los precios indicados.

La ecuación

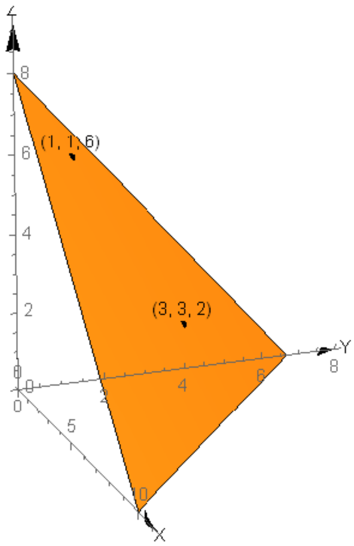
$$2x + 3y + 2{,}5z = 20, \qquad x, y, z \in Z^{+}$$

expresa que 20 es el pago total por la compra de cantidades enteras de bolsas de 1 kg azúcar, bolsas de 1 kg de arroz y cajas de 1 litro de leche.

El problema es ahora encontrar los posibles valores enteros positivos de las variables. Estamos, así, en el campo de las ecuaciones diofánticas y, una vez más, se tiene un caso de avance en conocimientos matemáticos mediante la creación de problemas. Ciertamente, es un campo que no corresponde a la educación primaria, pero una vez planteada la ecuación, se puede ir encontrando soluciones por ensayo y error, que es un recurso interesante, sobre todo cuando se hace mediante un "tanteo inteligente". En este caso, un buen punto de partida es observar que al tener que obtener como resultado el número entero 20, la variable z solo puede tomar los valores 2, 4 o 6 para que las variables x e y puedan tomar valores enteros positivos adecuados.

- El problema se puede enfocar también en el entorno matemático de la geometría analítica tridimensional, considerando la ecuación con las variables en R_0^+ (los números reales no negativos) y tener así una región triangular plana, apoyada en los ejes coordenados de un sistema cartesiano tridimensional. Un requerimiento similar al del problema, en este contexto intra matemático, sería determinar los puntos de coordenadas enteras ubicados en esa región triangular.

  A continuación, se muestra la gráfica, usando el software *Mathematica*. Sobre la región triangular están marcados los puntos (3; 3; 2) y (1; 1; 6), que son los que corresponden a las soluciones mostradas en el comentario 1, en el contexto extra matemático. (Notar que se han usado escalas diferentes en los ejes coordenados para hacer más clara la presentación.)



2. Conocer los elementos de los problemas, identificarlos en problemas concretos y comparar los elementos de unos con los de otros, contribuye a estimular la creatividad para la invención de nuevos problemas mediante la modificación de uno o más de estos elementos. Esto se evidencia en la diferencia en la calidad de los problemas creados en el bloque de Actividades I (sin tomar conciencia de los cuatro elementos de los problemas ni hacer un ejercicio de reconocerlos en problemas concretos) y la calidad de los problemas creados en el bloque de Actividades III (luego de haber desarrollado las Actividades II, en las que se toma conciencia de estos elementos y se les identifica, tanto en el problema del episodio como en el problema creado).

3. Otras ayudas para crear problemas haciendo variaciones a un problema dado, es formularse preguntas, como la ya conocida *¿Qué pasaría si…?* O *¿Qué pasaría si no…?*, destacada por Brown y Walter desde 1983. Así, con el enfoque de identificación de los cuatro elementos básicos de un problema, quien se proponga crear un problema a partir de otro dado, puede apoyarse, específicamente, en preguntas como las siguientes:

¿Qué pasaría si cambio la información? (La reduzco, la amplío o la modifico)

¿Qué pasaría si cambio el requerimiento? (Considero otras operaciones, otras relaciones en la información, gráficos, casos particulares, generalizaciones, demostraciones, etc. Esto está muy relacionado con el contexto y el entorno matemático que se considere para el nuevo problema.

¿Qué pasaría si cambio el contexto? (Paso de intra matemático a extra matemático; o modifico el contexto extra matemático; o paso de extra matemático a intra matemático y como requerimiento considero una generalización o una demostración.)

¿Qué pasaría si cambio el entorno matemático? (Considero un conjunto de números más amplio que el del problema original, considero el uso de otras propiedades o conceptos matemáticos, etc.)

4. Un campo interesante para desarrollar experiencias didácticas, es concretar más pistas para crear problemas, a partir de situaciones dadas o configuradas (problemas por *elaboración*). El camino natural, practicado en algunos talleres que hemos desarrollado, es preguntarse inicialmente sobre la información que se puede seleccionar de la situación (o añadir o modificar la que se percibe) y luego sobre los requerimientos que se pueden hacer con tal información. Teniendo esto como punto de partida, se puede ir construyendo y afinando el problema, precisando el contexto y el entorno matemático.

5. Otra pista para iniciar a los docentes en formación en la creación de problemas, a partir de una situación dada, es acompañar la descripción de la situación con algunas palabras que se les sugiere usar en el problema a crear. A continuación, ilustramos esta pista con un ejemplo muy sencillo, desarrollado en el marco de una clase a futuros profesores de primeros grados de educación básica, al pedirles crear un problema para usarlo con niños de segundo grado de primaria:

Situación: En la pizarra están escritos los números 18 y 7.

Actividad: Crear un problema a partir de esta situación.

Evidentemente, hay problemas muy sencillos, que más bien son ejercicios, como encontrar la suma o la diferencia de tales números.

Se obtuvo resultados interesantes al dar la siguiente lista de palabras que podrían utilizar al crear el problema: *Pedrito, Quique, canicas, más, menos, total*.

Así surgieron los siguientes problemas:

- En una actividad individual:

Pedrito tiene 18 canicas y Quique tiene 7 canicas más que Pedrito. ¿Cuántas canicas tienen en total?

- En una actividad grupal:

Pedrito y Quique jugarán a las canicas. Se sabe que Pedrito tiene 18 canicas, que en el juego Quique le ganó 7 canicas a Pedrito y que ahora ambos tienen la misma cantidad de canicas. ¿Cuántas canicas tenía Quique al comenzar el juego?

6. Las pistas dadas en este artículo son también válidas para la creación de problemas en niveles educativos más avanzados y tenemos experiencias en talleres desarrollados con profesores de secundaria y de universidad. La atención especial a problemas de nivel primario es por la importancia de formar profesores que ganen experiencias en la creación de problemas e integren estas actividades en sus clases desde la educación básica.

7. En los talleres de creación de problemas, sobre todo con profesores en formación o en servicio, todas estas pistas se complementan con las estrategias Episodio, Problema-pre, Problema-pos (EPP); y Situación, Problema-pre, Problema-pos (SPP), ya expuestas en foros internacionales y usadas en varias tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas. Más aún, en Malaspina (2017) y en Torres (2016) se muestran casos en los que estas estrategias han sido ampliadas, considerando una fase de reflexión didáctica, usando herramientas del enfoque ontosemiótico de la instrucción y el conocimiento matemático (EOS).

Referencias:

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. Psychology Press.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.*), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*
Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf

Torres, C. (2016). *Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico.* Tesis de Maestría no publicada. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Pontificia Universidad Católica del Perú.
Disponible en http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7226