ISSN: 1815-0640
Número 52. Abril 2018
Páginas 263-278

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

CONTEXTOS DINÁMICOS DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Silvia Bernardis, Susana Moriena

Fecha de recepción: 09/09/2017
Fecha de aceptación: 24/10/2017

Resumen	En la escuela secundaria se aborda el tema lugares geométricos en el plano desde el primer año (13 años). El desafío que constituye tanto la búsqueda del lugar como su demostración lo convierte en un verdadero problema para los estudiantes.En este artículo se presenta una propuesta para su tratamiento de manera dinámica en diferentes contextos. Las tareas que se incluyen consideramos que interesarán a los estudiantes, despertarán en ellos la incertidumbre y los motivará en la búsqueda de una solución.La secuencia sigue la organización propuesta por Douady (1983) a través de la dialéctica herramienta-objeto. Los problemas que se proponen consisten en situaciones de localización que se plantean en espacios geográficos conocidos por los estudiantes y se abordan utilizando Geogebra y Google Earth **Palabras clave**: Lugar geométrico, Contexto dinámico, Escuela Secundaria.
Abstract	In the secondary school the subject of geometric locus in the plane is approached on the map from the first year, the challenge that constitutes both the search of the place and its demonstration makes it a real problem for the students.This article presents a proposal for its treatment in a dynamic way in different contexts. The tasks that we consider to be of interest to students will awaken uncertainty in them and motivate them in the search for a solution.The sequence follows the organization proposed by Douady (1983) through the tool-object dialectic. The problems consist of different location situations that arise in geographic spaces known to the students and are addressed using Geogebra and Google Earth. **Keywords**: Geometric locus, Dynamic context, Secondary school
Resumo	Na escola secundária aborda-se o tema lugar geométrico no plano desde o primeiro ano (13 anos). O desafio que constitui tanto a busca do lugar como a sua demonstração o converte num verdadeiro problema para os estudantes.Neste artigo apresenta-se uma proposta para o seu tratamento de maneira dinâmica em diferentes contextos. As tarefas que se incluem consideramos que interessarão aos estudantes, acordarão neles a incerteza e motivá-lo-ás na busca de uma solução. A sequência segue a organização proposta por Douady (1983) através da dialética ferramenta-objeto. Os problemas que se apresentam consistem em situações de localização em espaços geográficos conhecidos pelos estudantes e se abordam por médio do software Geogebra e o aplicativo Google Earth. **Palavras-chave:** Lugar geométrico, Contexto dinâmico, Escola Secundária

1. Introducción

En el currículo de la escuela secundaria en Argentina desde el primer año (13 años) se propone el reconocimiento y verificación de las condiciones que cumplen los puntos del plano como lugar geométrico. El desafío que constituye tanto la búsqueda del lugar geométrico como su demostración lo convierte en un verdadero problema para los estudiantes.

En este artículo se presenta una propuesta para abordarlo de manera dinámica en diferentes contextos. Se espera que las tareas diseñadas promuevan el interés de los estudiantes, despierten en ellos la incertidumbre y los motiven en la búsqueda de una solución.

La secuencia se basa en las ideas de Douady (1983) que propone a través de la dialéctica herramienta-objeto hacer aparecer las nociones matemáticas como herramienta para resolver problemas, de manera que los alumnos construyan el sentido de las mismas.

Para resolver cada problema será necesario que los estudiantes realicen una adaptación del concepto geométrico conocido y utilizado para resolverlo (herramienta). Luego construirán su definición como lugar geométrico del plano (objeto).

Los problemas que conforman la secuencia consisten en distintas situaciones de localización que se plantean en espacios geográficos conocidos por los estudiantes. Para ello y como una motivación adicional las resoluciones se realizan utilizando dos recursos tecnológicos: Geogebra y Google Earth.

2. Marco Teórico

Según Douady (1994) en un concepto matemático conviene distinguir entre su carácter herramienta y su carácter objeto.

La autora considera que los conceptos tienen un estatus de herramienta, en tanto sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto. Supone la posibilidad de utilizarlos para analizar, modelar, resolver e interpretar cierto tipo de situaciones problemáticas.

El carácter de objeto supone la consideración del concepto “como objeto cultural que tiene su lugar en una construcción más amplia que es la del conocimiento inteligente en un momento dado, reconocido socialmente” (Douady, 1983). Interesa aquí el modo en que los conceptos se relacionan y constituyen un cuerpo organizado y sistematizado de conocimientos.

En cuanto a la dialéctica herramienta-objeto, aclara Douady, es contraria a una enseñanza tradicional donde aprendo-aplico, donde primero deben enseñarse los algoritmos y definiciones para luego buscar situaciones que permitan aplicar los conceptos trabajados. Por el contrario, Douady, propone que resulta imposible aprender cuando un concepto carece de sentido para el alumno. Para construir una enseñanza diferente, restituyendo el sentido a las herramientas que los alumnos utilizan, asegurando a los objetos correspondientes una presentación institucional, considera la autora que debemos caracterizar otra organización de enseñanza. “En esta organización el enseñante tiene en cuenta oficialmente la construcción del saber de los alumnos por los alumnos mismos. Esta organización está fundada desde el punto de vista cognoscitivo, sobre tres puntos: el juego de marcos, la dialéctica viejo-nuevo y la dialéctica herramienta-objeto (Douady, 1983, p. 5).

El juego de marcos responde a que en la mayoría de los conceptos pueden intervenir distintos dominios, diversos marcos físico, geométrico, numérico, gráfico u otros. Para cada uno de ellos se traduce un concepto en términos de objetos y relaciones que podemos llamar los significados. El juego de marcos proporciona la posibilidad de generar cambios en la interpretación de los problemas que podrían, por un lado, habilitar la evolución de las concepciones de los estudiantes y, por el otro, activar el proceso de aprendizaje. Estos cambios exigen reformulaciones del problema y la puesta en acción de herramientas y técnicas distintas a las iniciales.

En cuanto a la dialéctica viejo-nuevo, Douady propone la puesta en marcha de un objeto conocido como instrumento explícito para iniciar un procedimiento de resolución de un problema o por lo menos de una parte del problema. Es decir, se moviliza lo “antiguo” para resolver parcialmente el problema.

Es a través de la dialéctica herramienta-objeto, sostiene la autora, haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramienta para resolver problemas, como los alumnos construirán el sentido. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas (como objeto). Los requisitos más obvios para que las propiedades y la estructura de una herramienta conceptual pasen a ser objetos es que hayan sido una herramienta.

Para el tratamiento del tema lugar geométrico se diseñó una secuencia que tiene como propósito resignificar algunos conceptos matemáticos conocidos por los estudiantes desde otra mirada, en este caso desde el punto de vista de los lugares geométricos. El abordaje de las tareas se apoya en el trabajo con el software Geogebra[1] e imágenes satelitales a través de Google Earth[2].

Según Caicedo López (2012) la dificultad de materializar la graficación a partir de la descripción sintética del lugar geométrico correspondiente, hace que no se haya aprovechado la oportunidad de articular esta descripción con su representación visual; una forma de aprovechar el dinamismo para enseñar geometría es a partir de la construcción de curvas como lugares geométricos en Geogebra.

---

[1] GeoGebra es un software de matemática que integra geometría, álgebra y cálculo, desarrollado por Markus LLohenwartre en la Universidad de Salzburgo para la enseñanza de matemática escolar.
[2] Google Earth es un programa informático que muestra un globo terráqueo virtual que permite visualizar múltiple cartografía, con base en la fotografía satelital. El programa fue creado bajo el nombre de EarthViewer 3D por la compañía Keyhole Inc.

Corredor Gutiérrez (2011) menciona algunas de las ventajas que la utilización de un software de geometría dinámica (GD) ofrece para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría:

- facilita procesos que en el papel son imposibles o que requieren de muchos dibujos para llegar a una generalización.
- enriquece las tareas de construcción, incorporando una gran variedad de funcionalidades, asociadas a la simplificación de construcciones fundamentales.
- permite invertir la relación entre el saber geométrico y las construcciones. La construcción con regla y compás es consecuencia y aplicación de un saber geométrico, mientras que en GD las construcciones son un método para generar conocimiento geométrico.

3. Propuesta para el aula

La propuesta que se presenta tiene como objetivo principal que los estudiantes construyan el concepto de lugar geométrico y lo utilicen para definir objetos geométricos.

A continuación, se presenta el enunciado del problema. Posteriormente, se describe una propuesta para su resolución. La secuencia se plantea por medio de la organización esquemática propuesta por Douady para la dialéctica herramienta-objeto y se utilizan las distintas fases para abordarla con los estudiantes.

Problema: Puente peatonal. En Colastiné[3] nos encontramos con la vía rápida de la Ruta 1 (ver Figura 1). Dos gremios AMSAFE[4] y STIA[5] que tienen sus respectivos campings situados en un mismo margen de la ruta solicitan la construcción de un puente peatonal sobre dicha ruta. Los ingenieros les han prometido que lo colocarán a la misma distancia de los dos para que ninguno salga perjudicado. ¿Dónde estaría situado?

[3] Colastiné es una localidad cercana a la ciudad de Santa Fe ubicada sobre la Ruta 1.
[4] AMSAFE: Asociación del Magisterio de Santa Fe.
[5] STIA: Sindicato de Trabajadores de la Industria de la Alimentación.

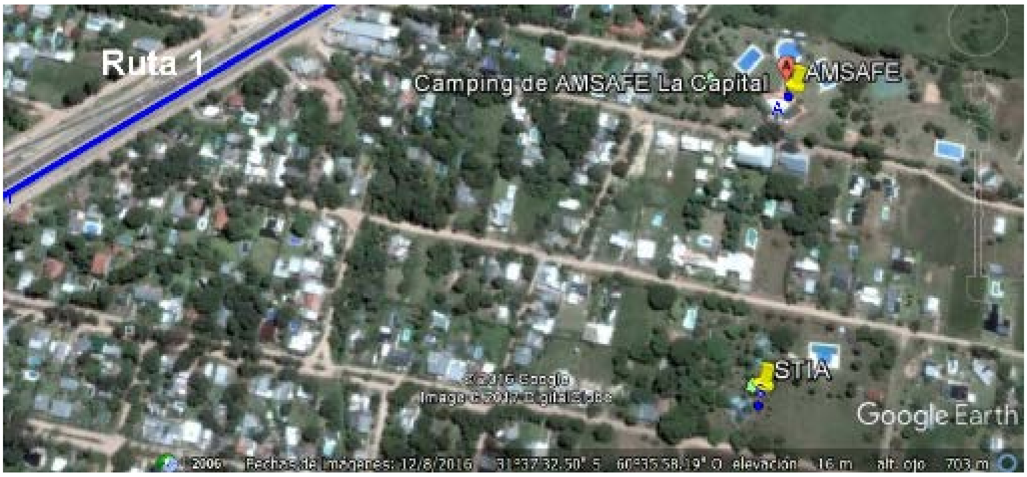

Figura 1. Imagen satelital de la Ruta 1.

3.1. Fase 1: Antiguo

En esta primera etapa se pone en marcha un objeto conocido como instrumento explícito para iniciar un proceso de resolución del problema o por lo menos de una parte del problema. Según Douady (1983), se moviliza lo "antiguo" para resolver parcialmente el problema.

A continuación se presenta una respuesta esperada de los estudiantes a través de la exploración con el software.

Exploración del lugar

Una pregunta que el docente puede realizar para incentivar la exploración por medio del software es la siguiente, ¿cuáles son los puntos que están a igual distancia de ambos campings?

Para hallarlos se sugiere crear por medio de la herramienta *deslizador* el número a (medida del radio). Luego construir las circunferencias de centros A y S, respectivamente, y radio a (utilizando la herramienta *Circunferencia dado su centro y radio*). De esta manera, en la intersección de ambas se obtienen los puntos C y D. Luego se utiliza la herramienta *Rastro* (para ello, ubicar el cursor en el punto y con botón derecho desplegar el menú) tanto para el punto C como para el punto D. Finalmente se modifica el valor del radio a y al mover el deslizador se obtienen muchos puntos más. Es importante resaltar que los puntos obtenidos son algunos de los posibles.

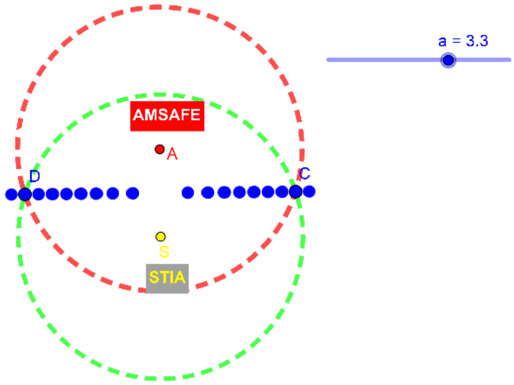

Figura 2. ***Deslizador*** **para el radio y** ***Rastro*** **activado.**

Luego de experimentar con el arrastre es conveniente presentar a los estudiantes la herramienta *Lugar geométrico* que dispone Geogebra. Por medio de esta opción al indicar primero el punto C y después el punto en el deslizador a, se obtiene el lugar geométrico que describe C cuando a varía. Análogamente, indicando el punto D y el punto en el deslizador a, se obtiene el lugar geométrico que describe D cuando a varía. Es decir, los estudiantes tendrán una idea más cercana del lugar geométrico buscado. Nuevamente es importante aclarar que los puntos obtenidos son algunos de los posibles. El docente podrá a esta altura retomar el concepto de Mediatriz del segmento AS y compararlo con el objeto construido por el software.

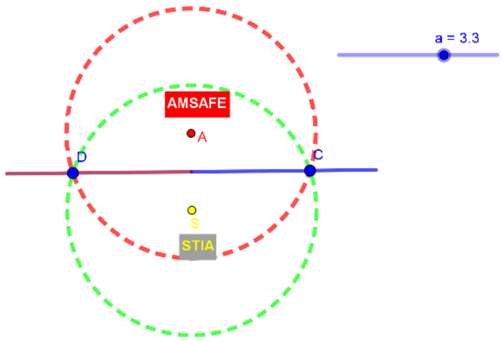

Figura 3. Construcción con ***Lugar geométrico*****.**

3.2. Fase 2: Búsqueda

Según Douady (1983) en esta segunda etapa, el alumno encuentra dificultades para resolver completamente su problema, llama a esta etapa “nuevo implícito”. Desde la óptica de los alumnos, las concepciones en juego, entran en conflicto o en resonancia con las antiguas. Los errores o contradicciones pueden convertirse en las posturas de procesos dialécticos de formulación y validación para resolver los conflictos y asegurar las integraciones necesarias.

Construcción del Lugar Geométrico

Frente a la necesidad de hallar todos los puntos posibles y luego de la exploración realizada los estudiantes hallarán el lugar geométrico buscado y finalmente podrán trazarlo en forma completa mediante la herramienta *Mediatriz*. Para los estudiantes la Mediatriz es un objeto conocido desde la escuela Primaria, en este problema aparece con otra mirada, la del lugar geométrico.

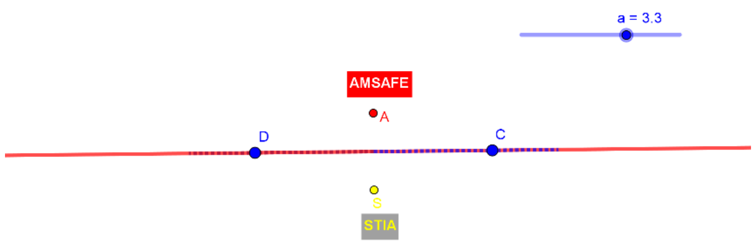

Figura 4. Construcción de la Mediatriz del segmento AB.

Finalmente, al volver al problema se observa que la construcción del puente peatonal se realizará en la intersección de la ruta 1 con la mediatriz del segmento que une Amsafe (A) con Stia (S).

Figura 5. Respuesta al problema.

3.3. Fase 3: Explicitación

En la etapa anterior algunos elementos tuvieron un rol importante, casi decisivo y son susceptibles de ser apropiados para ese momento del aprendizaje. Están formulados en términos de objetos o en términos de prácticas; con su condición de empleo circunstancial. Se trata de “nuevo explícito” susceptible de reempleo y familiarización.

Comprobación de la Definición

Es importante utilizar las herramientas que ofrece el software para comprobar que si un punto E (ubicando punto sobre objeto) está en la mediatriz L cumple la propiedad de estar a la misma distancia de los puntos extremos del segmento y si no está en L no cumple con dicha propiedad.

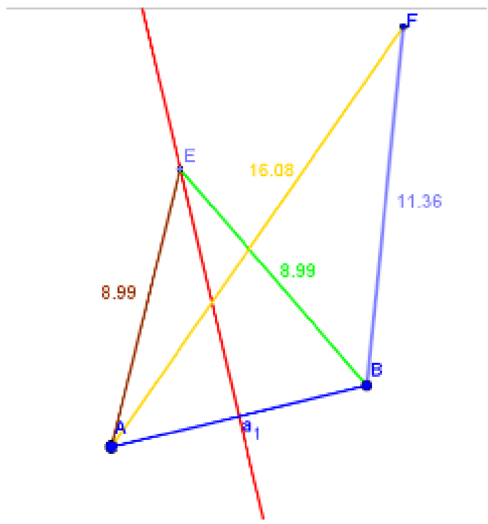

Figura 6. Comprobación del lugar.

3.4. Fase 4: Institucionalización

El docente realiza la institucionalización de lo que es nuevo Comprobación del lugar y retiene con las convenciones en curso, eventualmente definiciones, teoremas y demostraciones. Esto nuevo que se retiene está destinado a funcionar, posteriormente como antiguo.

La definición que adoptamos lugar geométrico es la siguiente:

> En Geometría Plana se da el nombre de lugar geométrico a la figura formada por todos los puntos del plano que gozan de una propiedad común. (Rouché y Camberousse, 1915, p.20)

Las tareas tienen como objetivo poner en acción el método de los lugares geométricos (Rey Pastor y Puig Adam, 1948) que describimos a continuación.

Para afirmar que una figura L es el lugar geométrico de todos los puntos que tienen una cierta propiedad P, es necesario demostrar las dos proposiciones siguientes.

Directa: Todo punto del lugar L tiene esta propiedad P.

Recíproca: Todo punto que tiene la propiedad P pertenece al lugar L. O bien su equivalente la Contraria: Todo punto que no pertenece al lugar L no tiene esta propiedad P.

Son equivalentes las condiciones pertenecer al lugar L y tener la propiedad P.

El punto está en L $\Leftrightarrow$ Tiene la propiedad P

En el problema que se desarrolla, el lugar geométrico buscado es la mediatriz del segmento AB, cuya definición se muestra a continuación.

Se llama mediatriz del segmento AB a la recta que es perpendicular a este segmento y que pasa por su punto medio.

Demostración del Lugar Geométrico

Teorema 1: La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento.

1) **Si el punto está en L cumple la propiedad P**

Todo punto de la mediatriz L tiene la propiedad P, es decir está a la misma distancia de los puntos extremos del segmento.

Caso 1: Si C es el punto medio de AB se tiene, de manera inmediata, que la longitud del segmento AC es igual a la longitud del segmento BC.

Figura 7. C es el punto medio del segmento AB.

Caso 2: Sea D cualquier otro punto de la mediatriz del segmento AB, diferente del punto medio C. Entonces AC es congruente con CB por definición de punto medio.

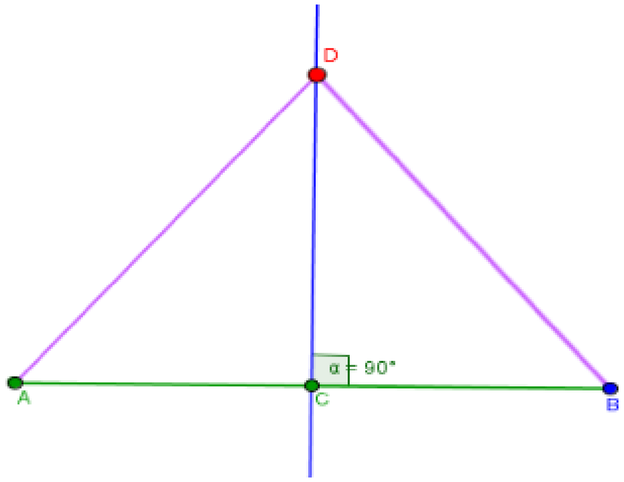

Figura 8. D es un punto cualquiera de la mediatriz.

Además el segmento CD es común en los triángulos ADC y CDB. Como los dos triángulos ADC y CDB tienen dos lados y el ángulo comprendido entre estos dos lados respectivamente congruentes (90°).

Luego, el segmento AD es congruente con el segmento BD.

2) **Si el punto cumple la propiedad P está en L⇔ si el punto no está en L, no cumple la propiedad P**

Si un punto E no pertenece a la mediatriz del segmento AB entonces no equidista de los extremos del segmento.

Sea E un punto que no pertenece a la mediatriz. En este caso E pertenece al semiplano que contiene a B. Demostraremos que E está más cerca de B que de A. Unimos E con A, la intersección de este segmento con la mediatriz determina el punto D. Sabemos que AD es congruente con BD.

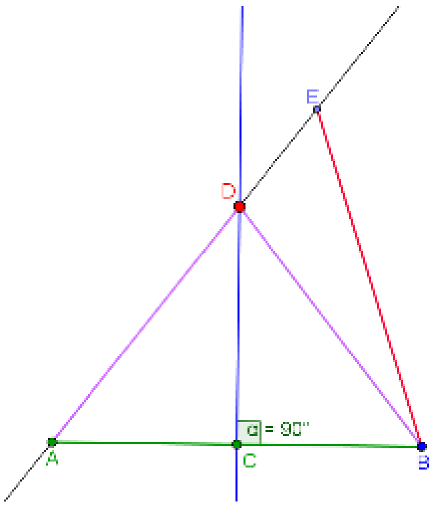

Figura 9. Desigualdad triangular |EB|<|DE|+|DB|.

Como se observa en la Figura 9, por desigualdad triangular se obtiene que |EB|<|DE|+|DB|.

Como el segmento AD es congruente con el segmento BD entonces la longitud del segmento EB es menor que la suma de las longitudes de los segmentos DE y AD (|EB|<|DE|+|AD|).

Tenemos que la longitud del segmento EB es menor que el segmento AE (|EB|<|AE|). Lo cual demuestra que E no equidista del punto A y del punto B, de modo que AE ≠ BE.

Luego de 1) y 2) hemos probado que el lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB.

3.5. Fase 5: Familiarización-reinvención

A continuación se proponen nuevos problemas destinados a experimentar el método del lugar geométrico. Para poner en juego el funcionamiento como instrumento explícito el objeto que se ha institucionalizado.

Problema 1: Rotonda

En el frente del hotel UNL-ATE[6] de ciudad universitaria se desea construir una calle de ingreso. El cordón de la calle delimita un jardín en cuyo punto central se ubicará una fuente (en el punto F). Realiza el trazado de la calle teniendo en cuenta que cada punto del cordón equidiste de la fuente (ver Figura 10).

Figura 10. Imagen satelital de la obra del hotel UNL-ATE.

En este problema el lugar geométrico que se obtiene es la circunferencia, cuya definición se muestra a continuación.

[6] UNL: Universidad Nacional del Litoral ATE: Asociación Trabajadores del Estado

El lugar geométrico de los puntos de un plano que están a igual distancia r de un punto fijo O es la circunferencia que tiene radio r y centro O.

Problema 2: La estación de servicio

Construir una estación de servicio que esté a la misma distancia de las dos rutas, la 168 y la 1. ¿Dónde podríamos ubicarla?

Figura 11. Imagen satelital del lugar.

Este problema el lugar geométrico que se obtiene es la bisectriz, cuya definición se muestra a continuación.

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados de un ángulo es la bisectriz.

Figura 12. Respuesta al problema.

Problema 3: Supermercado

Se desea construir un supermercado que quede a igual distancia de tres ciudades: Santa Fe, San José del Rincón y Paraná. ¿Dónde podría ubicarse?

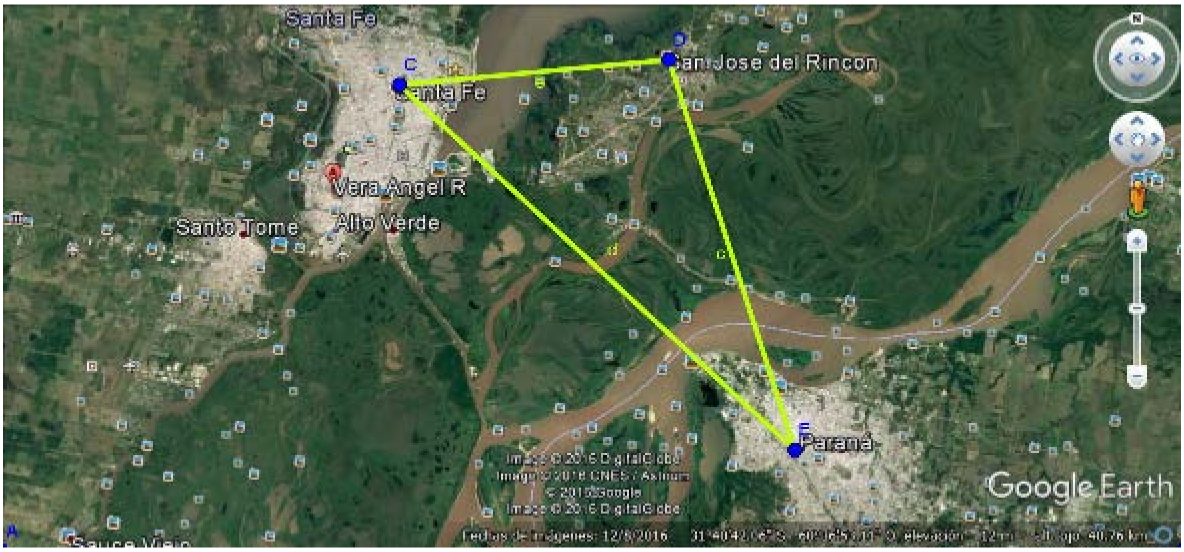

Figura 13. Imagen satelital del lugar.

En el caso del problema el lugar geométrico que se obtiene es el circuncentro del triángulo, cuya definición se muestra a continuación.

El lugar geométrico de los puntos del plano que está a igual distancia de los tres vértices de un triángulo es el circuncentro.

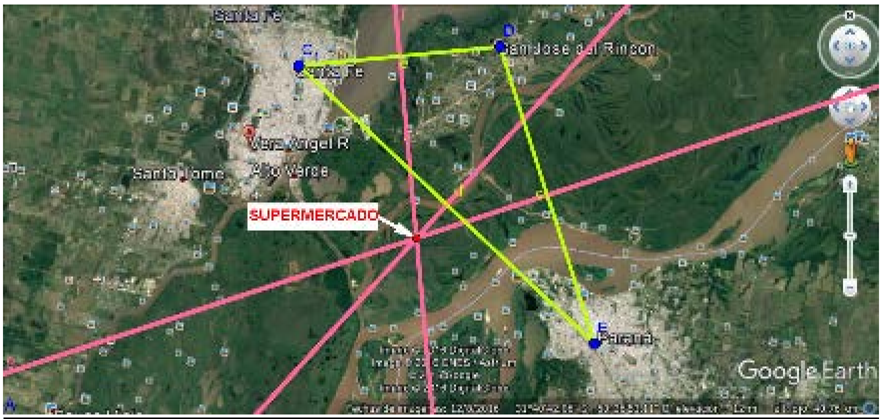

Figura 14. Respuesta al problema.

Problema 4: ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano que distan el doble de los vértices que de los lados opuestos en el triángulo ABC?

En el caso del problema el lugar geométrico que se obtiene es el baricentro de un triángulo, cuya definición se muestra a continuación.

El lugar geométrico de los puntos del plano que distan el doble de los vértices que de sus lados opuestos en un triángulo es el baricentro.

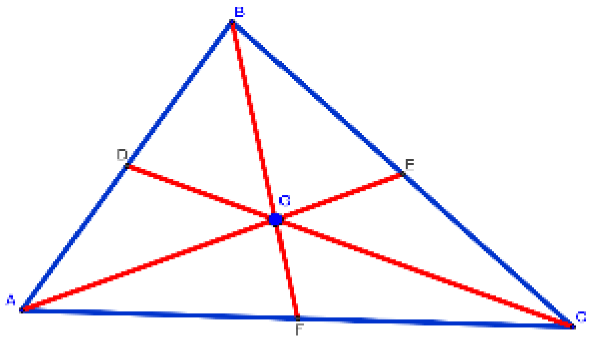

Figura 15. Baricentro de un triángulo.

3.6. Fase 6: Complejidad de la tarea o nuevo problema

Se utilizan los nuevos conocimientos dentro de una situación más compleja que implica otros conceptos y propiedades conocidas o por aprender.

Problema 5: Baricentros

Trazar una circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo ABC del Problema 4. Mover uno de los vértices sobre la circunferencia. ¿Cuál es el lugar geométrico que describe el baricentro?[7]

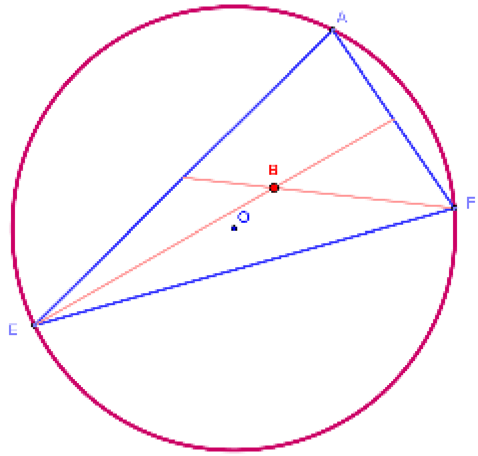

Figura 16. Baricentro del triángulo inscripto en la circunferencia.

[7] Problema adaptado de Corredor Gutiérrez (2011)

Para cualquier triangulo inscrito en una circunferencia encontremos el radio r del lugar geométrico y la razón de éste con el radio de la circunferencia R.

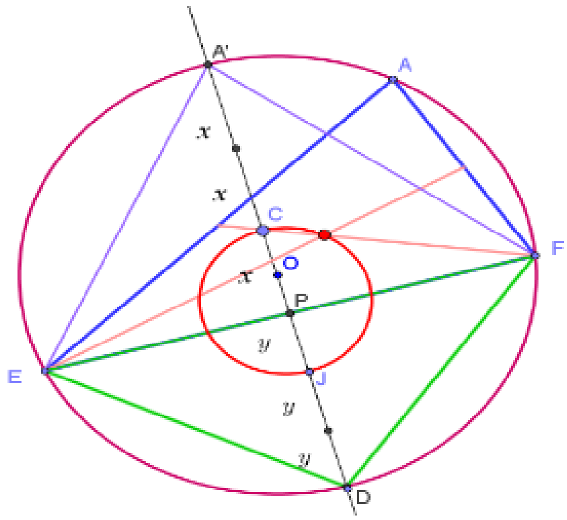

Figura 17. Respuesta al problema.

Como C es el baricentro del triángulo EA'F y lo mismo ocurre con J en EDF. Encontramos el radio del lugar geométrico, tenemos que: 3x+3y=2R, así:

$$r = \frac{x+y}{2} = \frac{R}{3}$$

El radio del lugar geométrico r equivale a la tercera parte del radio de la circunferencia C(O,R).

El lugar geométrico que describe el baricentro es la circunferencia de radio la tercera parte del radio de la circunferencia en la que se inscribe el triángulo.

4. Reflexiones finales

Los problemas propuestos se resuelven recurriendo a la construcción de algún lugar geométrico, esto permite al estudiante indagar si el problema tiene solución y en caso afirmativo, permite conjeturar si existe más de una solución. Además de descubrir el objeto geométrico buscado a través del arrastre, la construcción del lugar y la manipulación constante de la figura.

Con la GD se muestra la geometría de una forma que promueve la comprensión del contenido matemático involucrado y en sus justificaciones. El desarrollo y el trabajo con un software constituyen un apoyo indispensable de visualización. La interpretación geométrica de manera dinámica, permite ver más claramente varios conceptos.

Al hacer las construcciones para la solución de un determinado problema, el estudiante revisa propiedades y conceptos propios de la geometría, lo cual ayuda a la reafirmación de los mismos. Claramente en esta propuesta la dialéctica herramienta-objeto (Douady, 1983), utilizada para la secuencia, nos brinda la posibilidad de interactuar con los conceptos previos desde el inicio para abordar el tema "lugar geométrico".

5. Bibliografía

Douady, R. (1983). Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento- objeto, juego de marcos. En: *Cuaderno de didáctica de la matemática Nº 3*. París: Université Paris Diderot-Paris 7. Traducido en Selección Bibliográfica I, Programa para la Transformación de la Formación Docente. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación. Buenos Aires, 1994. También disponible en: http://www.slideshare.net/favalenc/dialectica-douady.

Caicedo López, J. (2012). *Resolución de problemas de construcción geométrica en GEOGEBRA empleando lugares geométricos y algo más*. Acta de la conferencia latinoamericana de Geogebra. Uruguay.

Corredor Gutiérrez, L. (2011). Geometría dinámica y lugares geométricos. Recuperado el 4 de agosto de 2017, de: http://www.konradlorenz.edu.co/images/investigaciones/matematicas/geometria_dinamica_luis_Fernando.pdf

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1948). *Metodología de la Matemática Elemental*. Buenos Aires: Estrada.

Rouché, E. y de Camberousse, Ch. (1915). *Tratado de Geometría Elemental*. 6ta. Edición. Madrid: Sucesores de Hernando.

Autores:

Primer autor: **Bernardis, Silvia:** Magíster en Didácticas Específicas. Profesor Asociado de la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina). Codirectora de proyecto CAI+D, formación en investigación en el área de Educación, en la especialidad Educación Matemática.

Segundo autor: **Susana Moriena**: Especialista en Didácticas Específicas. Profesor Asociado de la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina). Directora de proyectos CAI+D, formación en investigación en el área de Educación, en la especialidad Educación Matemática.