UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-20

Flores: del jardín a GeoGebra

Débora Pereiro Carbajo, Javier Cayetano Rodríguez

Resumen	En este artículo se expone cómo el análisis y diseño de flores resulta de utilidad en el aula de matemáticas y, para ello, se muestran las principales técnicas de diseño de flores y ejemplos prácticos de implementación con GeoGebra. Se presentan, también, varias propuestas didácticas en las que se usa el diseño de flores para trabajar el análisis matemático de funciones (propiedades globales y área de recintos), así como la referencia y descripción de diferentes applets de GeoGebra, diseñado para tal fin. **Palabras clave**: Flores, GeoGebra, Curvas, Superficies, Funciones
Abstract	This paper is intended to show how flower analysis and design is useful in the math classroom, describing the main flower design techniques and giving some practical examples of implementation with GeoGebra. Several didactic proposals are also presented in which flower design is used to introduce some properties concerning mathematical analysis of functions (global properties and area of enclosures), as well as the reference and description of different GeoGebra applets which have been designed for this purpose. **Palabras clave**: Flowers, GeoGebra, Curves, Surfaces, Functions
Resumo	Este artigo mostra como a análise e o desenho de flores são úteis na aula de matemática, descrevendo as principais técnicas de desenho de flores e dando alguns exemplos práticos de implementação com o GeoGebra. Também são apresentadas várias propostas didáticas nas quais o desenho de flores é utilizado para trabalhar a análise matemática de funções (propriedades globais e área de recintos), assim como a referência e descrição de diferentes applets do GeoGebra, concebidos para este fim. **Palabras clave**: Flores, GeoGebra, Curvas, Superfícies, Funcões

1. Introducción

Este proyecto floreció en la primavera de 2020 en medio de la pandemia que nos confinó en nuestros hogares, alejados de las aulas y situándonos en un nuevo contexto vital. Por fortuna, las flores de mi jardín, las matemáticas y GeoGebra me proporcionaron una entretenida evasión. La belleza de las magnolias despertaron mi mirada matemática y me vi seducida a modelizarlas con GeoGebra utilizando las ecuaciones de las flores y las funciones. Posteriormente, analizando la forma y el perfil de los pétalos fui configurando un catálogo de flores 3D elaboradas con GeoGebra.

Otros compañeros crearon nuevas flores y aportaron otras visiones. De las más interesantes es la de Javier Cayetano, que usa funciones en lugar de curvas y facilita que el alumnado de secundaria, utilizando contenidos del currículo, pueda crear y analizar flores con GeoGebra a partir de una serie de actividades interactivas que elaboró para introducir el estudio de las propiedades de las funciones y la geometría usando las propiedades de las flores como punto de partida.

Puesto que ambos trabajos se complementan; uno parte de las matemáticas para construir flores con GeoGebra y el otro acerca dichas matemáticas presentes en las flores al alumnado, hemos decido escribir este artículo a dos manos y estructurarlo en dos partes.

En la primera parte, "*Modelización de flores con GeoGebra*", mostraremos cómo construir flores con GeoGebra desde cero de tres maneras diferentes: a partir de las curvas concoide de rosetón, mediante funciones cuadráticas y utilizando herramientas GeoGebra elaboradas para este fin.

Figura 1. Foto: Machi Salgado.

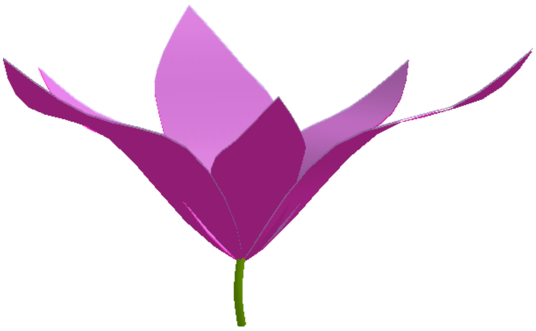


Figura 2: Magnolia con GeoGebra.

En la segunda parte, "*Análisis Matemático: dígamelo con flores*", exponemos actividades que utilizan flores para iniciar al alumnado en el análisis matemático, a través de la concreción de los contenidos aprendidos en el estudio de las flores.

Dependiendo de los objetivos que nos fijemos para nuestro alumnado, analizaremos las propiedades de las funciones, las integraremos para calcular áreas de recintos, o podremos ver algunos elementos geométricos, como los polígonos regulares o las simetrías axial y rotacional.

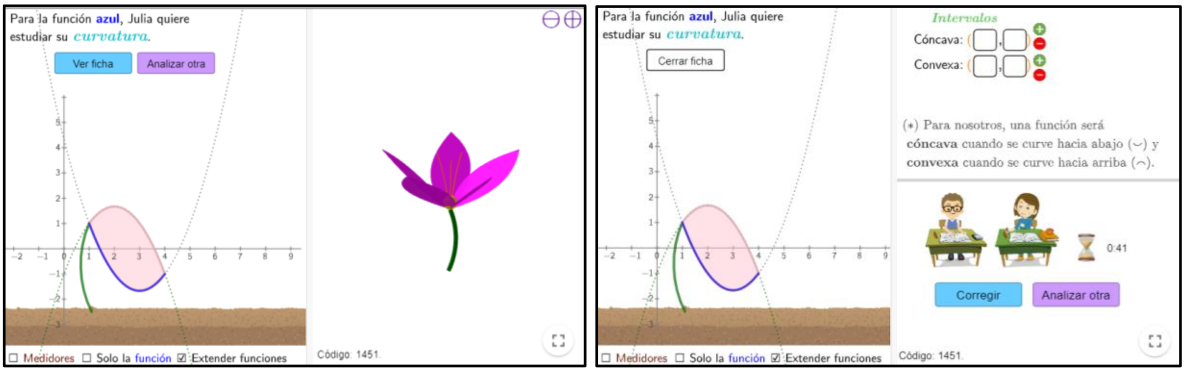


Figura 3: Ficha autoevaluable de análisis de la curvatura.

Este proyecto, originado a partir de las flores, continúa en desarrollo. En el libro GeoGebra "*Flores: del jardín a GeoGebra*" (https://www.geogebra.org/m/edqynt4y) se puede consultar, entre otros materiales, los que proponemos en este artículo.

2. Modelización de flores con GeoGebra

Para extraer de una flor las ecuaciones matemáticas que permitan modelizarla en un software como GeoGebra, utilizaremos curvas y funciones que resulten conocidas por el profesorado y el alumnado de secundaria.

No hay un método único para construir flores con GeoGebra, ya que cada flor es diferente pero, con variaciones de los métodos que sugerimos a continuación, se pueden crear un gran número de flores.

La estrategia general para el diseño, consistirá en hacer un planteamiento bidimensional de los pétalos de la flor, que llevaremos a la vista 3D proyectando esos puntos bidimensionales en el espacio mediante una curva "perfil", que vaya indicando la altura de cada punto, dependiendo de su distancia al tallo de la flor.

Igualmente, podemos aprovechar este método para incluir hojas en el diseño de la flor.

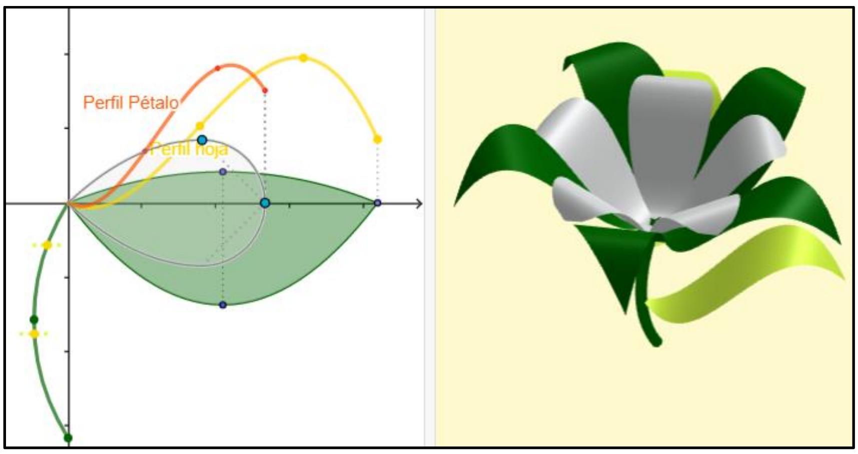


Figura 4: Modelado de una flor, con hojas y el paso 2D a 3D utilizando una función perfil.

Para generar los pétalos tendremos, a su vez, dos posibles estrategias:

1. Generar todos los pétalos a partir de una única curva. En este caso, utilizaremos curvas “concoides”, que describiremos en el apartado 2.1. Esto nos aportará la ventaja añadida de contribuir, de forma práctica, a familiarizar a nuestro alumnado con el uso de las coordenadas polares.
2. Utilizar el área encerrada por una curva cerrada del plano para modelizar cada pétalo individual. Una vez creado uno, podemos generar los siguientes aplicando rotaciones alrededor del eje vertical. Este método nos proporciona la ventaja de potenciar la visión espacial de nuestro alumnado y la visualización de movimientos en el espacio, a la vez que da mucho juego a la hora de estudiar propiedades de las funciones y la relación entre sus expresiones algebraicas y sus gráficas.

2.1 Modelización de flores utilizando las curvas concoide de rosetón

El primer método que proponemos para modelizar flores consiste en llevar al 3D las curvas concoide de rosetón. Estas curvas, investigadas en el siglo XVIII por Abbot Guido Grandi tienen como ecuación en coordenadas polares:[1]

$$\rho = a \cos (n\, t) + b$$

donde **t** es el ángulo girado respecto a la horizontal y **ρ** la distancia al origen**.**

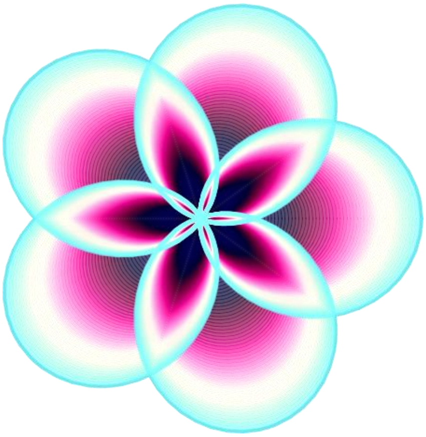


Figura 5: Concoide de rosetón a =1, b=1, n= 5/3

Las coordenadas polares son las más adecuadas para este tipo de curvas pero para curvas en tres dimensiones resulta más cómodo expresarlas en coordenadas rectangulares. Recordaremos seguidamente cómo obtener las

[1] Pérez A. (2005) “Las ecuaciones de las flores”. (Sigma nº 26)

ecuaciones de una curva en coordenadas rectangulares conocida su ecuación polar.

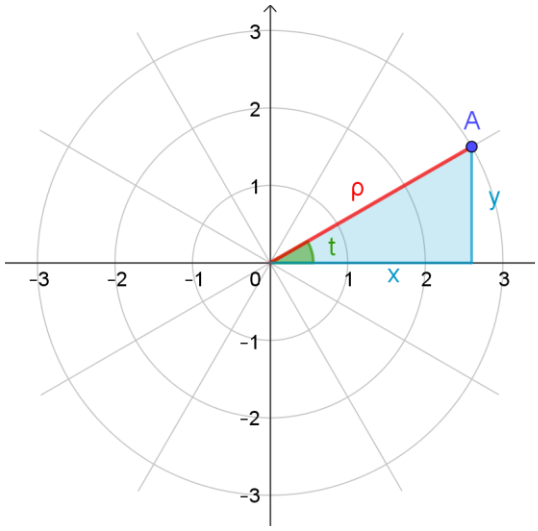


Figura 6: Coordenadas polares y rectangulares.

Dado un punto A, representaremos sus coordenadas polares como **(ρ;t)**, donde t es el ángulo girado respecto a la horizontal y ρ la distancia al origen[2].

Sus correspondientes coordenadas rectangulares **(x,y)** son:

$$x = \rho \cos(t)$$

$$y = \rho \operatorname{sen}(t)$$

Una curva de ecuación polar **ρ=f(t)** se expresa en coordenadas rectangulares mediante las ecuaciones:

$$\mathbf{x(t) = f(t) \cos(t)}$$

$$\mathbf{y(t) = f(t) \operatorname{sen}(t)}$$

Proponemos a continuación dos actividades para graficar con GeoGebra la curva concoide de rosetón en coordenadas polares y en rectangulares.

Actividad 1

*Grafique con GeoGebra las curvas concoide de rosetón **ρ = a cos(n t) +b** ; siendo **a** y **b** números reales y **n** un número natural. Utilice las coordenadas polares.*

Escriba en la entrada algebraica un valor para cada variable a, b y n

a = 1

b = 1

[2] Utilizamos la convención habitual, también utilizada en GeoGebra, de separar mediante el símbolo “**;**” la componente angular, precisamente para indicar que son coordenadas polares y no rectangulares.

n = 5

(Acceda a las propiedades del deslizador n y seleccione como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1)

Introduzca la curva ρ = f(t) en coordenadas polares (ρ;t). Use el comando *Curva*[3]

f(t) = a cos(n t) +b (Oculte la función f de la vista gráfica)

c = Curva((f(t); t), t, 0, 2π)

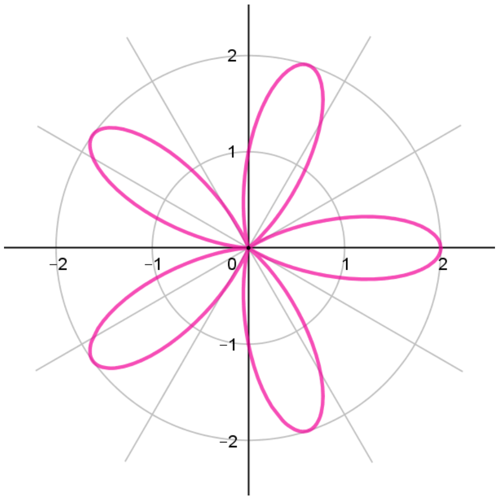


Figura 7: Concoide de rosetón a =1, b=1, n= 5

Tome diferentes valores de las variables a, b y n para generar diferentes flores.

Actividad 2

*Grafique con GeoGebra las curvas concoide de rosetón **ρ = a cos(n t) + b** ; siendo **a** y **b** números reales; y **n** un número racional (**n = p / q**). Utilice las coordenadas rectangulares.*

Escriba en la entrada algebraica de GeoGebra un valor para cada variable a, b, p, q

a = 1

b = 1

p = 5

q = 3

(Acceda a las propiedades de los deslizadores p y q y seleccione como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1)

n = p/q

Introduzca la curva en la entrada algebraica mediante el comando *Curva*

f(t) = a cos(n t) + b (Oculte la función f de la vista gráfica)

[3] Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)

c = Curva(f(t) cos(t), f(t) sen(t), t, 0, 2π q)

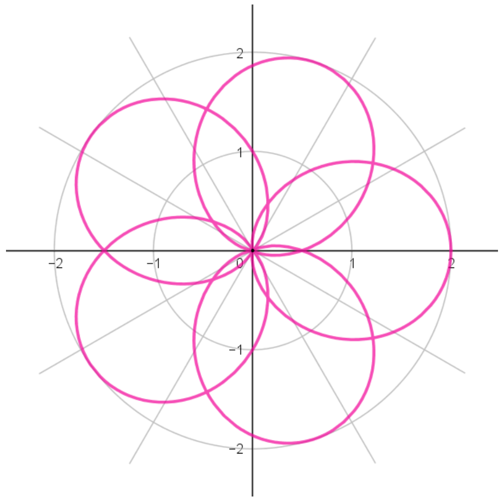


Figura 8: Concoide de rosetón a =1, b=1, n= 5/3

Tome diferentes valores de las variables a, b, p y q para generar diferentes flores.

Una vez representada la curva concoide de rosetón, se ha de aplicar una función a la curva para transformarla del plano 2D al espacio 3D.

Sea ρ=f(t) la ecuación de la curva concoide y g la función que defina el perfil de la flor 3D (puede ser una función lineal, cuadrática, radical, racional, etc). La coordenada z de un punto de la curva 3D se obtiene componiendo las funciones f y g: z(t) = g(f(t))

Es decir, nuestra curva 3D tendrá las siguientes ecuaciones paramétricas:

x(t) = f(t) cos(t)

y(t) = f(t) sen(t)

z(t) = g(f(t))

En este punto, una vez obtenida la “estructura” de la flor, sólo resta darle vida mediante una superficie que la cubra.

Utilizaremos *superficies regladas*, que son superficies que se generan mediante el movimiento de una recta o un segmento al desplazarse sobre una o varias curvas.

- Superficie reglada entre una curva a(t) y un punto A

  Superficie(k A +(1-k) a(t), <Parámetro 1>, <Valor inicial 1>, <Valor final 1>, <Parámetro 2>, <Valor inicial 2>, <Valor final 2>)

- Superficie reglada entre dos curvas a(t) y b(t)

  Superficie(k a(t) +(1-k) b(t),<Parámetro 1>,<Valor inicial 1>,<Valor final 1>, <Parámetro 2>, <Valor inicial 2>, <Valor final 2>)

Dependiendo de la flor en cuestión y de la forma de sus pétalos usaremos un método u otro para crear su superficie. O bien, como superficie reglada entre la curva y un punto (la base de la flor), o bien como superficie reglada entre dos curvas que formen un pétalo de la flor. Una vez creado un pétalo, los siguientes pétalos se generan aplicando rotaciones alrededor del eje Z.

Consideraremos como pétalo base el que es simétrico con respecto al eje X y que se obtiene para valores de la curva con $-\pi/n \leq t \leq \pi/n$.

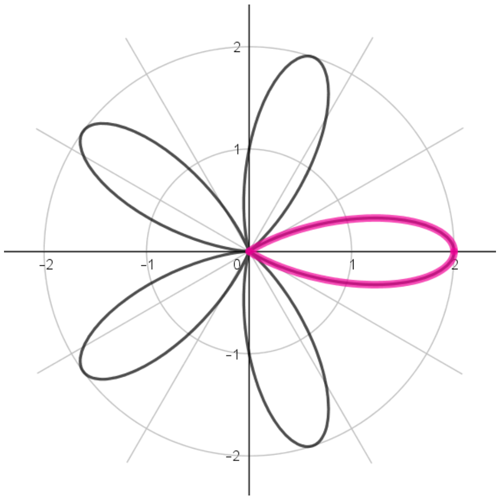


Figura 9: Pétalo simétrico respecto al eje X.

Proponemos seguidamente dos actividades para practicar lo aprendido. En la primera actividad, se construirá una flor a partir de una superficie reglada entre la curva 3D y un punto, y en la segunda, el pétalo de la flor se formará como superficie reglada entre dos curvas.

Usaremos GeoGebra Clásico con las vistas: *Vista Algebraica*, *Vista Gráfica* y *Vista Gráfica 3D*.

Actividad 3

Construya una flor 3D a partir de la curva concoide de rosetón.

Escriba en la entrada algebraica un valor para cada variable a, b, p, q

a = 1

b = 0

p = 5

q = 3

(Acceda a las propiedades de los deslizadores p y q y seleccione como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1)

n = p/q

Escriba en la entrada algebraica la función de la curva concoide de rosetón y la que será la función perfil de la flor en 3D

f(t) = a cos(n t) + b

g(t) = sqrt(t) (Puede considerar otras funciones: función valor absoluto, cuadrática, racional, potencial, exponencial, trigonométrica, ...)

Oculte ambas funciones

Introduzca la curva mediante la entrada algebraica

c = Curva(f(t) cos(t) , f(t) sen(t) , g(f(t)) , t , 0 , 2πq)

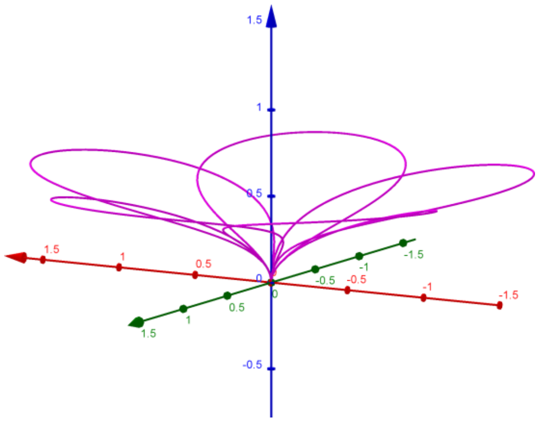


Figura 10: Curva concoide en 3D.

Introduzca en la entrada algebraica la superficie reglada entre la curva c y el origen de coordenadas:

A = (0,0,0)

d = Superficie(k A +(1-k) c(t), k,0,1,t,0,2π q)

Si la forma de la flor se ajusta a nuestro modelo, sólo queda ponerlo bonito accediendo a sus propiedades: cambiar el color, poner a cero el grosor del trazo, etc.

En caso contrario cambie la función g o modifique los valores de las variables a, b, p, q.

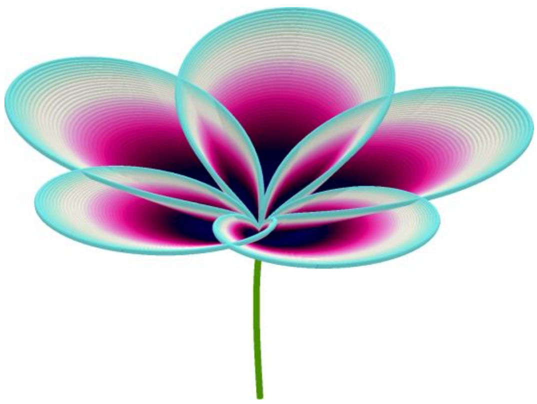


Figura 11: Flor 3D a partir de la concoide[4]

Actividad 4.

Construya una flor 3D a partir de un pétalo de la curva concoide de rosetón. Utilice como superficie del pétalo una superficie reglada entre dos curvas.

[4] GeoGebra no permite hacer directamente degradados de colores. Pueden hacerse, pero empleando otras técnicas que no son objeto de este artículo.

Escriba en la entrada algebraica de GeoGebra un valor para cada variable a, b, p, q.

a = 1 (Acceda a las propiedades del deslizador a y seleccione como valor mínimo 0, valor máximo 5 e incremento 0.1).

b = 1 (Acceda a las propiedades del deslizador b y seleccione como valor mínimo a, valor máximo 5 e incremento 0.1).

p = 3

q = 1

(Acceda a las propiedades de los deslizadores p y q y seleccione como valor mínimo 1, valor máximo 30, e incremento 1).

n = p/q

Escriba en la entrada algebraica la función de la curva concoide y la que será la función perfil de la flor en 3D.

f(t) = a cos(n t) + b

g(t) = sqrt(t) (Pruebe con otras funciones)

Oculte las funciones f y g de las vistas gráficas.

Escriba en la entrada algebraica las curvas que definen el pétalo en 2D. Nótese que como el pétalo es simétrico respecto al eje X ambas curvas tienen las mismas coordenadas salvo el signo de la 2ª coordenada.

c = Curva(f(t) cos(t) , f(t) sen(t) , t , 0 , π/n)

c’ = Curva(f(t) cos(t) , -f(t) sen(t) , t , 0 , π/n)

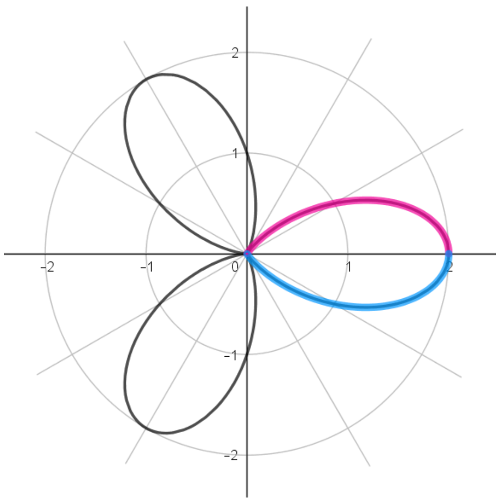


Figura 12: Curvas simétricas que forman un pétalo.

Escriba en la entrada algebraica las curvas que definen el pétalo en 3D.

d = Curva(f(t) cos(t) , f(t) sen(t) , g(f(t)) , t , 0 , π/n)

d’ = Curva(f(t) cos(t) , -f(t) sen(t) , g(f(t)) , t , 0 , π/n)

Escriba en la entrada algebraica la superficie reglada entre las dos curvas que definen el pétalo:

e = Superficie(k d(t) + (1 - k) d'(t), k, 0, 1, t, 0, π / n)

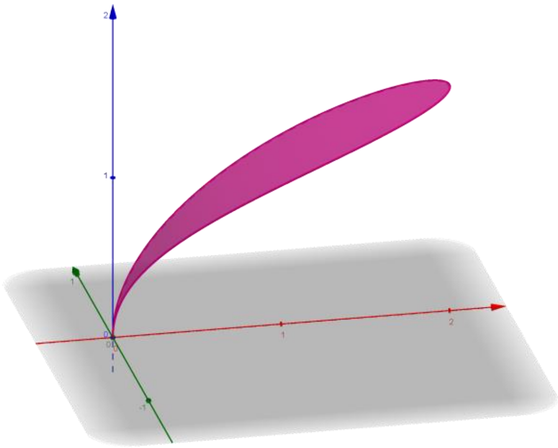


Figura 13: Pétalo en 3D.

Introduzca en la entrada algebraica el número de pétalos de la flor y obtenga mediante el comando secuencia[5] todos sus pétalos aplicando rotaciones[6] alrededor del eje Z.

m=6 (Acceda a las propiedades del deslizador m y selecciona como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1).

l1=Secuencia(Rota(e, k * 2π / m, EjeZ), k, 1, m)

Oculte el pétalo base y ponga la flor a su gusto modificando en las propiedades de la lista: color, grosor de trazo, etc.

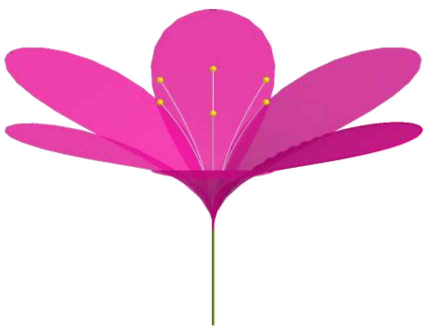


Figura 14: Flor creada a partir de un pétalo.
Como adorno, se han añadido algunos estambres.

[5] Secuencia(<Expresión>, <Variable k>, <Valor inicial a>, <Valor final b>)

[6] Rota(<Objeto>, <Ángulo>, <Eje de rotación>)

2.2 Modelización de flores mediante funciones

Como indicamos anteriormente, otra forma de crear flores consiste en modelizar un pétalo de la flor utilizando funciones. Veamos cómo hacerlo mediante funciones cuadráticas:

Actividad 5

Modelice un pétalo 2D mediante una función cuadrática y, a partir de éste, obtenga una flor 3D.

Consideremos la función cuadrática definida a partir de tres puntos no alineados, por ejemplo: sean A el origen de coordenadas, B un punto en el semieje positivo de las X y C un punto en el primer cuadrante. Mediante el comando *Polinomio(<Lista de Puntos>)* se obtiene la función polinómica, cuadrática en este caso, que pasa por estos puntos:

f = Polinomio({A,B,C})

Tomamos como pétalo 2D la región del plano delimitada por las funciones cuadráticas f y -f (su simétrica con respecto al eje X) y x(A) ≤ x ≤ x(B), siendo x(A) y x(B) las abscisas de los puntos A y B respectivamente.

a= IntegralEntre(f, -f, x(A), x(B))

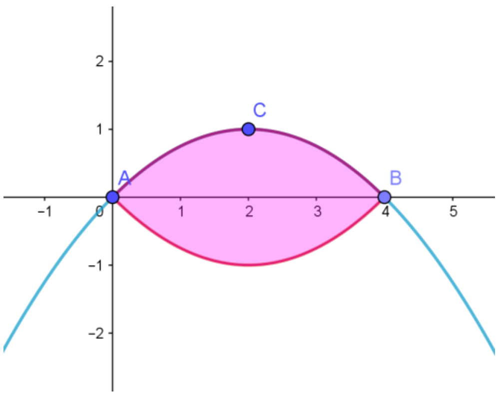


Figura 15: Pétalo 2D a partir de una función cuadrática.

Sea g(x) = sqrt(x) la función perfil que llevará el pétalo del 2D al 3D (puede probarse con otros tipos de funciones: lineal, cuadrática, racional, radical, etc.)

Las curvas que definen el pétalo en 3D tienen como ecuaciones paramétricas:

Curva definida a partir de f	Curva definida a partir de -f
x = t y = f(t)	x = t y = -f(t)

z = g(t)	z = g(t)

Tabla 1. Ecuaciones paramétricas para definir en 3D el pétalo de la actividad 5.

Estas curvas se grafican en GeoGebra mediante las sentencias:

b = Curva(t, f(t), g(t), t, x(A), x(B))

c = Curva(t, -f(t), g(t), t, x(A), x(B))

Una vez creadas las curvas procedemos a obtener la superficie del pétalo (mediante una superficie reglada entre ambas curvas):

d = Superficie(k b(t) + (1 - k) c(t), k, 0, 1, t, x(A), x(B))

Y para acabar, obtenemos todos los pétalos de la flor rotando el pétalo base alrededor del eje Z:

n = 6 (Acceda a las propiedades del deslizador n y selecciona como valor mínimo 1, valor máximo 30 e incremento 1)

l1 = Secuencia(Rota(d, k * 2π / n, EjeZ), k, 1, n)

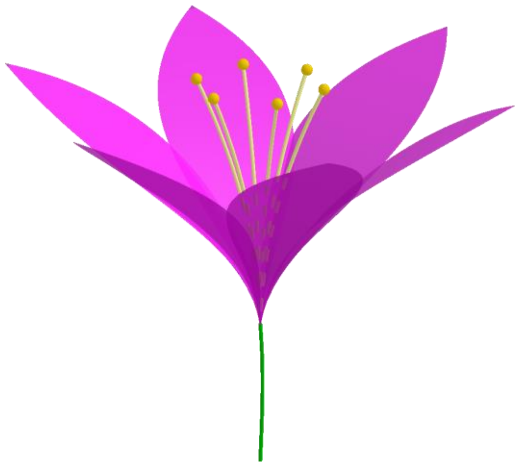
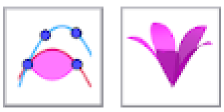


Figura 16: Flor generada a partir de una función cuadrática.

2.3 Herramientas GeoGebra para modelizar flores

Si queremos trasladar este trabajo al aula de secundaria, para que los estudiantes modelicen flores a la par que investigan, analizan y practican las matemáticas que aparecen en el proceso de su construcción, podemos proporcionarles herramientas (macros) que les faciliten el trabajo.

En la actividad GeoGebra *“Construye una flor 3D con funciones cuadráticas”* (https://www.geogebra.org/m/ywxqjcne) se encuentran dos herramientas (*pétalo* y *flor*) para generar flores utilizando funciones cuadráticas que se pueden utilizar para este fin.



Figuras 17 y 18: Herramientas "pétalo" y "flor"

La herramienta "***pétalo***"  genera a partir de 4 puntos:

- *Dos funciones cuadráticas*. Una modeliza (junto a su simétrica con respecto al eje X) el pétalo bidimensional y la otra proyecta el pétalo 2D en el espacio 3D.
- *Un punto (*vértice de la parábola que modeliza el pétalo bidimensional).
- *El pétalo 2D y el 3D*.
- Oculta las funciones cuadráticas y los puntos de la vista gráfica 3D.

A continuación se puede modificar el pétalo desplazando estos cinco puntos.

La herramienta "**flor**"  genera el resto de pétalos a partir de los 5 puntos citados. Estos puntos deben seleccionarse en orden: primero seleccionamos los tres puntos de la función cuadrática que define el pétalo 2D y a continuación los dos puntos de la función perfil.

Para más información sobre las herramientas consulte la actividad *Construye una flor 3D con funciones cuadráticas* (https://www.geogebra.org/m/ywxqjcne).

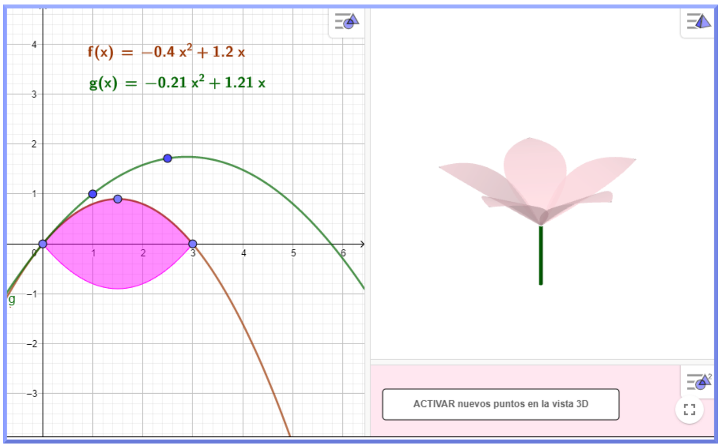


Figura 19: Flor de Noa. Alumna de 3º ESO, del IES As Barxas, Moaña.

3. Análisis Matemático: dígamelo con flores

El otro ámbito de aprendizaje que hemos considerado para las actividades con flores es utilizarlas como trasfondo para el análisis matemático. Principalmente, el estudio de las funciones.

Para gran parte del alumnado, el estudio de las propiedades de las funciones supone una barrera de abstracción difícil de superar. Introducir esas propiedades sin una referencia tangible o cercana a sus experiencias previas puede causar que no asimilen correctamente esos conocimientos.

En las actividades anteriores, hemos visto la utilidad de las flores para introducir las funciones cuadráticas y sus propiedades, pues resulta de interés para el diseño el localizar el vértice y conocer su forma.

Ahora proponemos dar un paso más, y diseñar flores aprovechando el lenguaje de las funciones para introducir y afianzar nuestros conocimientos sobre las mismas.

Para ello, utilizaremos applets ya preparados, pensados para focalizar nuestra atención precisamente en las propiedades matemáticas, en lugar de la generación en sí de las flores.

Podemos comenzar con actividades como el *Generador de flores* (ver fig. 4), https://www.geogebra.org/m/duqthjva, que servirán para familiarizar al alumnado con diferentes formas que pueden tomar las curvas, sin necesidad de recurrir a su expresión algebraica.

Posteriormente, podemos introducir y estudiar diferentes funciones elementales, con actividades como *Flores generadas por funciones* https://www.geogebra.org/m/yhjyqtq6 (ver fig. 20) y *Flores y funciones*, https://www.geogebra.org/m/qamjrsms. Además, este tipo de actividad nos permitirá introducir de manera natural conceptos como el dominio y recorrido de las funciones, poniendo de manifiesto que, al modelizar matemáticamente, puede ocurrir que solo necesitemos parte de la función.

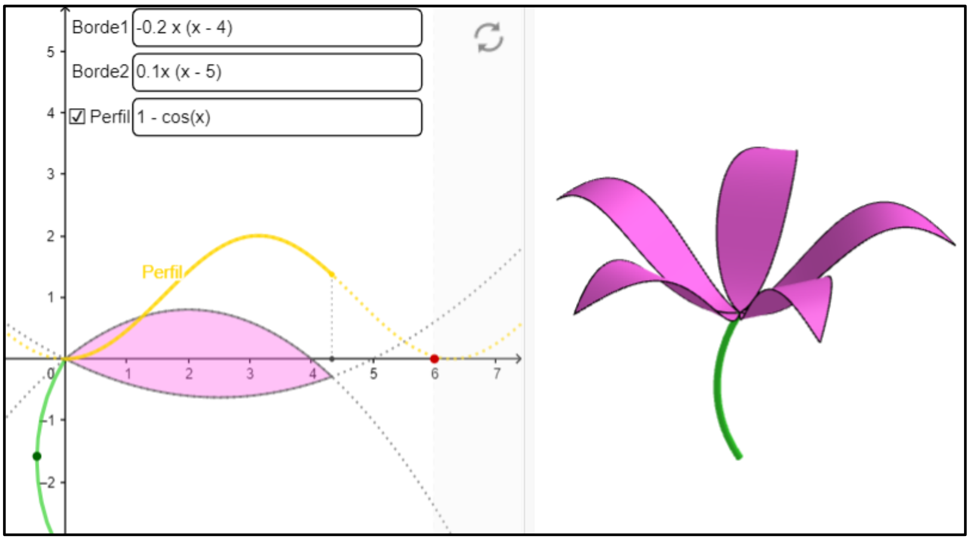


Figura 20: Flores generadas por funciones.

Una vez que nuestro alumnado se ha familiarizado con las diferentes formas que toman las funciones elementales, podemos aprovechar también estos applets para hacer un estudio guiado donde les vayamos invitando a reconocer y analizar las diferentes propiedades de las funciones, como pueden ser los signos, intervalos de crecimiento y curvatura, rango y dominio. Por ejemplo, una actividad muy interesante es proponer a los alumnos que diseñen flores cuyos pétalos cumplan ciertas condiciones.

Conseguiremos así llegar a estos conceptos de una forma natural e introducirlos de una forma práctica pero rigurosa, haciendo ver a nuestro alumnado su utilidad.

3.1 Actividades de evaluación

Para facilitar la adquisición de conocimientos y la comprobación de su correcta asimilación, hemos creído conveniente preparar actividades que propongan diferentes ejercicios relativos a las propiedades de las funciones, dentro del ámbito de las flores (disponibles en el enlace https://www.geogebra.org/m/edqynt4y#chapter/689201).

Las flores no servirán únicamente como pretexto para la redacción de los ejercicios, sino que la compresión de los propios ejercicios servirá para que el alumnado practique la capacidad para elegir la función, y qué parte de la misma necesita para el modelizado.

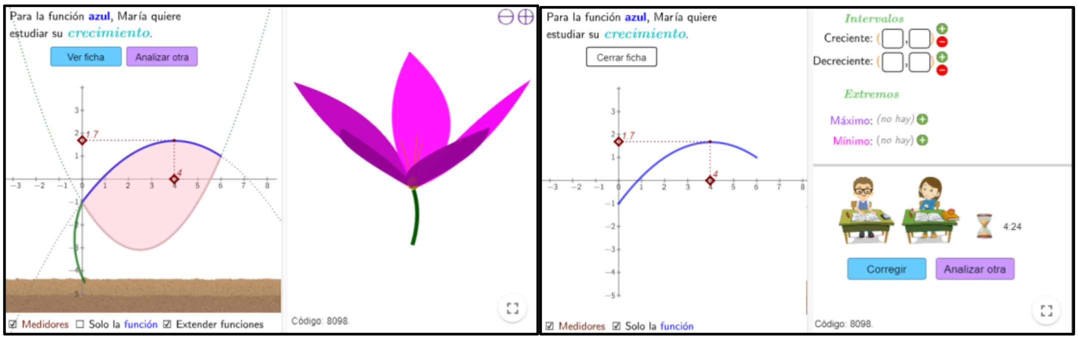


Figura 21: Ejercicios correspondientes al estudio de los intervalos de crecimiento de funciones.

Concretamente, se han creado applets para el estudio de:

- Intervalos de crecimiento de una función.
- Signos de una función.
- Dominio y recorrido.
- Intervalos de curvatura.
- Análisis conjunto de las cuatro posibilidades anteriores.

Los applets se han programado de manera que comprueben automáticamente la solución introducida por el alumno, muestren la respuesta correcta y asignen una puntuación acumulativa a los ejercicios correctos. Para facilitar la tarea al alumnado, se incluyen unos medidores que indican los valores sobre los ejes de coordenadas, y se permiten ciertos errores de redondeo.

Además, se conserva información útil tanto para el alumnado como para el profesor, como es la cantidad de fichas realizadas y cuántas han sido correctas, el tiempo invertido en la ficha actual y el tiempo total de trabajo.

Así, se facilita la autocorrección y autorregulación de la adquisición de conocimientos por parte del alumnado que, además, tendrá a su disposición una batería inagotable de ejercicios diferentes con los que practicar.

Al mismo tiempo dotamos al profesorado de herramientas prácticas para la docencia tanto presencial como virtual, liberándolo de la tarea mecánica de comprobación de la corrección de los ejercicios, para que pueda dedicar el tiempo de aula en una atención más personalizada de sus alumnos y resolución de dudas conceptuales.

Otra de las ventajas del uso de GeoGebra para crear estas actividades es que los applets están disponibles de forma gratuita en la web para descargar y editar, de manera que el profesorado que lo necesite podrá modificar alguna de sus características (como las puntuaciones) para adaptarlos todavía más a la realidad de su aula.

También, utilizando herramientas como GeoGebra classroom, el profesorado podrá consultar la evolución de sus alumnos al resolver las fichas o, utilizando un LMS como Moodle, incorporar las actividades a su aula, con la opción de guardar automáticamente las calificaciones (ver https://www.geogebra.org/m/tcytwayg).

3.2 Flores e integrales

Al igual que en el caso de las propiedades de las funciones, otro escollo conceptual que encuentra el alumnado es el proceso de cálculo de áreas utilizando integrales. Especialmente en el caso del área definida entre dos curvas.

Por ello, para hacer más accesibles estos conceptos, podemos recurrir a ejercicios de cálculo basados en el diseño de flores, materializándolos en algo más concreto que la mera abstracción del área entre dos curvas.

Al modelizar las flores, hemos utilizado precisamente el área encerrada entre dos funciones para definir cada pétalo. Aprovechando para elegir funciones con intersecciones y primitivas sencillas de calcular podemos, nuevamente, crear una batería virtualmente infinita de ejercicios con los que el alumnado podrá practicar de forma autónoma, y con tantos como necesite.

En este caso, hemos creado ejercicios con diferentes tipos de actividades, donde las funciones serán rectas o parábolas, con y sin denominadores (ver https://www.geogebra.org/m/dv6ufjne).

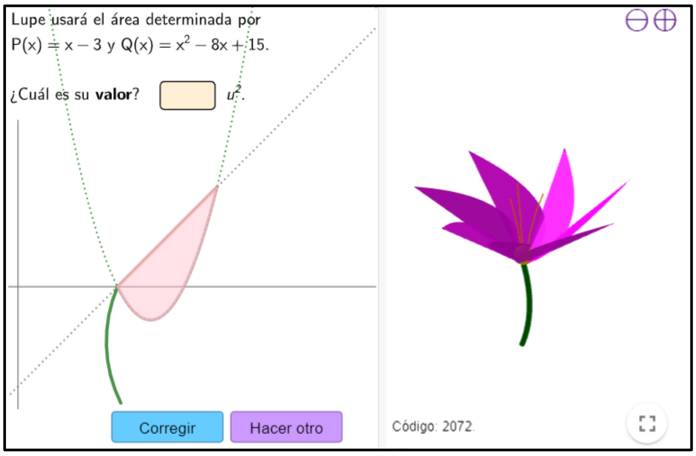


Figura 22: Ejemplo de enunciado de ejercicios de cálculo de áreas.

Además, los ejercicios incluyen las explicaciones detalladas paso a paso de la resolución de los mismos, para facilitar aún más la autonomía del alumno y la autorregulación de su aprendizaje.

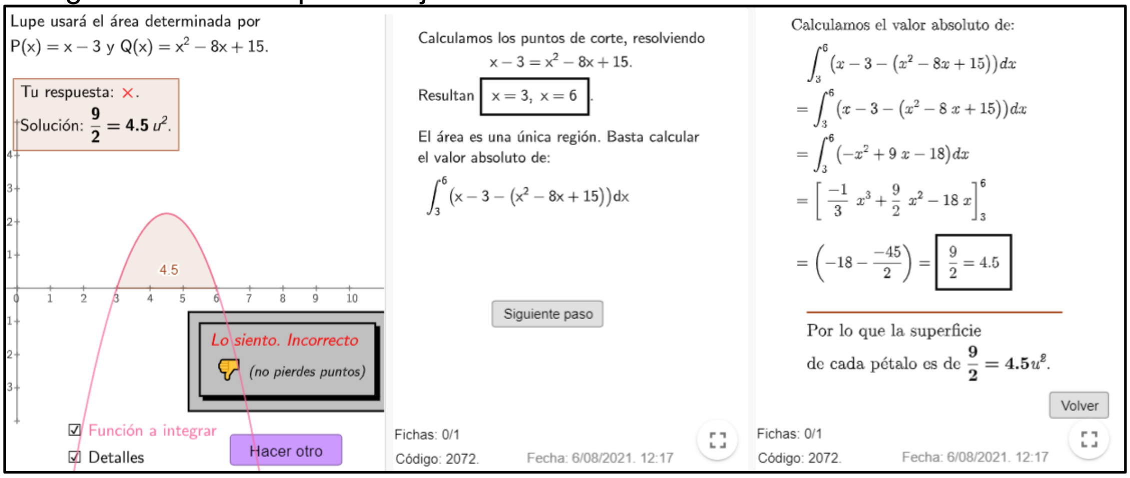


Figura 23: Ejemplo de enunciado de cálculo de áreas, con los pasos para su resolución.

4. Conclusiones

El diseño de flores es una actividad atractiva para el alumnado porque puede enriquecerse con tantos contenidos matemáticos como queramos llevar al aula. Podemos aprovechar el proceso de diseñarlas para

- Mostrar cómo las matemáticas sirven para modelizar e interpretar aquello que nos rodea.
- Aprender las coordenadas polares y diferentes formas de modelizar curvas; como arcos de circunferencia, trozos de parábolas u otros tipos de funciones que nos interese mostrar, como pueden ser las de interpolación.
- Introducir a nuestro alumnado de una forma amena y divertida en el uso de GeoGebra que, actualmente, es el software de geometría dinámica más completo y ampliamente utilizado.
- Aplicar el estudio de las flores a aquellas áreas de las matemáticas en las que nos interese concretar definiciones y conceptos que puedan resultar más abstractos, como pueden ser, las características de las funciones o el cálculo de áreas de recintos mediante integración. Mezclando estas ideas con la creación de actividades que propongan diferentes ejercicios a los alumnos y corrijan y califiquen sus respuestas de manera automática, tendremos una completa propuesta didáctica basada en el diseño de flores.
- Ampliar nuestra propuesta a otras áreas de la matemática que nos interese estudiar. Por ejemplo, la disposición de los pétalos puede darnos pie a estudiar los polígonos regulares, contar sus diagonales, estudiar simetrías -incluida la simetría rotacional- o hablar de diferentes tipos de prismas si nos proponemos diseñar una caja que contenga nuestra flor.

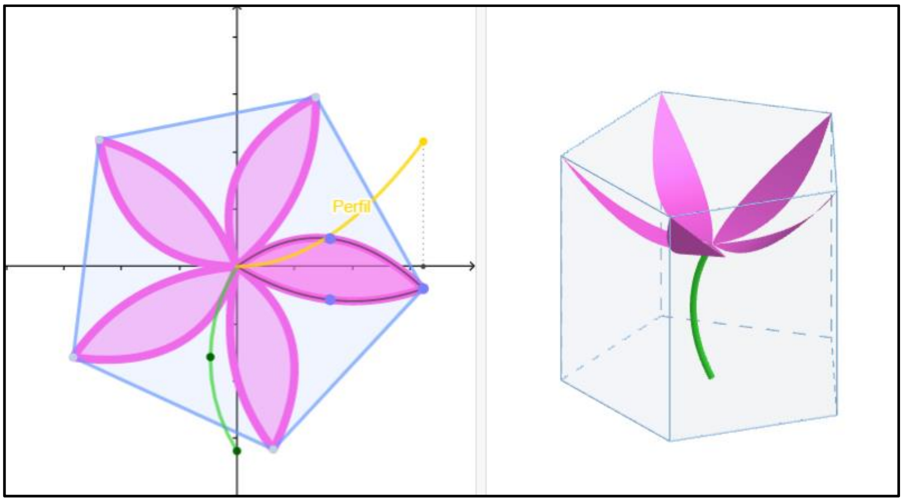


Figura 24: Actividad "Polígonos regulares y flores"
(https://www.geogebra.org/m/njpvjapj)

Como hemos indicado anteriormente, hemos reunido todos estos materiales relativos a la modelización y al estudio matemático de las flores en el libro GeoGebra, *Flores: del jardín a GeoGebra* (https://www.geogebra.org/m/edqynt4y).

Para concluir les invitamos a visitar el libro *Flores 3D* donde pueden encontrar una gran variedad de flores modelizadas con Geogebra https://www.geogebra.org/m/ct3jebjc.

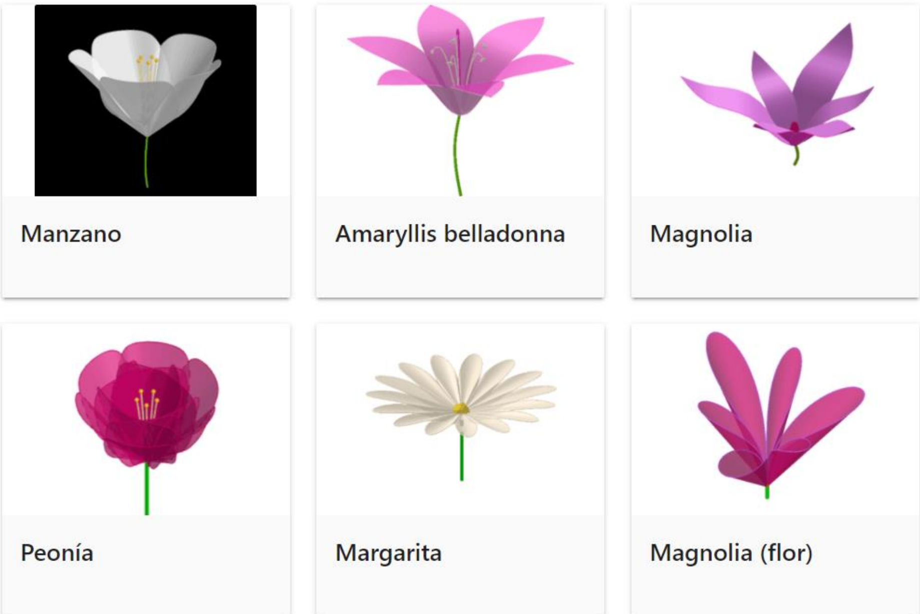


Figura 25: Exposición de flores 3D
(https://www.geogebra.org/m/ct3jebjc#chapter/474075)

Bibliografía

Ancochea, B., Arranz, J.M., Muñoz, J. (2018). *Construcción de superficies con GeoGebra 3D* [en línea], recuperado el 6 de agosto de 2021 de https://www.geogebra.org/m/MSNNQCmE#material/d6waftkg

Muñoz, J. (2016). *Me quiere, no me quiere. La ecuación de una flor*, Revista Suma nº 82, 91-107.

Pérez, A. (2005). *Las ecuaciones de las flores*, Revista Sigma nº 26, 137-148.

Cayetano Rodríguez, Javier. Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Extremadura. Profesor de matemáticas en el IES Albarregas (Mérida) y miembro del Grupo de Software Educativo de Extremadura (GSEEX). Director del Instituto GeoGebra Extremeño (IGEx) y miembro de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática (SEEM). javiercayetano@educarex.es

Pereiro Carbajo, Débora. Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela. Profesora de matemáticas en el IES As Barxas de Moaña. Miembro de la Asociación Gallega de Profesores de Matemáticas (AGAPEMA). Miembro del Instituto GeoGebra de Galicia. deborapereirocarbajo@gmail.com