REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 120-138

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Desarrollo histórico e implicancias en el aprendizaje del infinito: estudiar la evolución de su tratamiento para desarrollar estrategias que favorezcan su comprensión

Mario Garelik, Fabiana Montenegro

Fecha de recepción: 19/05/2018
Fecha de aceptación: 29/07/2018

Resumen	La convivencia del infinito como *adjetivo o proceso* y como *sustantivo* ha sido tan relevante como problemático a lo largo de la historia de la humanidad. Este artículo inicia con una reseña de las dos acepciones de la noción de infinito: el *potencial* y el *actual*. Posteriormente se presenta un breve desarrollo del devenir histórico alrededor de dicho concepto y finalmente se analiza cómo se reproducen hoy en nuestras aulas las antiguas discusiones en torno a su conceptualización, teniendo en cuenta las dificultades recogidas de producciones escritas con grupos de alumnos que inician su formación en el cálculo en carreras de ingeniería en la universidad. **Palabras clave**: Infinito potencial, actual, aprendizaje.
Abstract	The coexistence of the infinite as an adjective or process and as a noun has been as relevant as problematic throughout the history of humanity. This article begins with a review of the two meanings of the notion of infinity: *potential* and *actual*. Subsequently, a brief development of historical evolution is presented around this concept and finally, how the old discussions about its conceptualization are reproduced in our classrooms, taking into account the difficulties collected from written productions with groups of students who begin their training in *Calculus* in engineering careers at the university **Keywords**: Potential infinity, actual, learning.
Resumo	O convívio do infinito como adjetivo ou processo e como substantivo tem sido relevante como problemático ao longo da história da humanidade. Este artigo se inicia com uma resenha das duas acepções da noção de infinito: o potencial e o atual. Posteriormente, apresenta-se um breve desenvolvimento do devir histórico a respeito do dito conceito para finalmente analisar de que forma se reproduzem atualmente nas nossas aulas as antigas discussões a respeito da sua conceitualização, levando em conta as dificuldades coletadas de produções escritas com turmas de alunos que começam a sua formação em cálculo em cursos de engenharia na universidade. **Palavras-chave:** Infinito potencial, atual, aprendizagem.

1. Introducción

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación CAI+D (Curso de Acción para la Investigación y Desarrollo) de la Universidad Nacional del Litoral, relacionado con la comunicación del conocimiento científico en los primeros años de ingeniería y el trazado de estrategias para favorecer la comprensión.

El paso del infinito visto como adjetivo o como proceso, que simplemente significa ilimitado, sin fin, de recursividad permanente, al sustantivo, considerado como unidad acabada o el todo, ha sido un proceso más que interesante que ha atravesado a la historia de la humanidad.

El presente artículo tiene por objeto explorar en la génesis de este concepto y si la complejidad de su significado y de su historia se reflejan en dificultades para el aprendizaje en los alumnos de primer año, en su mayoría de entre 18 y 20 años, de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral de la ciudad de Santa Fe, Argentina.

Desde la antigüedad, tanto en teología, filosofía, como en matemática los hombres no han cesado de hablar sobre el infinito. Desde Santo Tomás de Aquino, que en su Summa Theologiae demostraba que aunque Dios era ilimitado, no podía crear cosas absolutamente ilimitadas, pasando por las paradojas de Zenón, el surgimiento de los números irracionales, la teoría conjuntista de Cantor, la reformulación sobre bases rigurosas del nuevo análisis, emprendida en el siglo XIX por Cauchy, Weierstrass, Dedekind, etc. hasta nuestros días, se hace necesario experimentar nuevos modos y procesos de tratamiento del infinito para poder dar cuenta de los conflictos que el controvertido concepto genera para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El presente trabajo inicia, en el apartado dos, con una reseña de las acepciones de la noción de infinito sobre las que se enfoca la investigación: potencial y actual. Luego, se realiza un breve desarrollo del devenir histórico de ambas, así como un detalle de las controversias y dificultades que, a lo largo de la historia, se sucedieron en torno al concepto.

Posteriormente, y ya desde la perspectiva de la didáctica, se describe la dificultad que conlleva el tema al presentarse como, en términos de algunos autores, contraintuitivo y se resalta la importancia de la mirada a la historia como un aporte para mejorar la comprensión del concepto.

2. Las dos acepciones del concepto de infinito.

Para comprender las dificultades que conlleva el concepto de infinito para su conceptualización, es necesario considerar el carácter de obstáculo que presenta la noción en su acepción actual, en particular, desde el punto de vista histórico-epistemológico.

La matemática persiguió, desde siempre, la dificultosa tarea de enfrentar esta noción tan paradójica como de dificultoso acceso para el intelecto del hombre. En ese sentido, “Casi podríamos decir que la matemática es el lenguaje que pretende hablar del infinito, o la ciencia que pretende medir el infinito.” (Ortiz, 1994, p. 60).

En pos de dar cuenta del rico y complejo concepto de infinito, se hace menester recurrir a su evolución histórica.

Ya desde la cultura griega la matemática concebía de manera crítica el infinito, dado que se lo intentaba pensar desde la intuición que, a su vez, en la mayoría de los casos, se apoyaba en concepciones que tenían al ámbito finito como campo de validez. Esta situación derivó en profusas contradicciones y paradojas, entre las cuales, la de Zenón de Elea es la más conocida, y de la cual más adelante se brinda un breve detalle.

Para Platón y Pitágoras, el infinito carecía de medida y estaba asociado al caos. Anaximandro de Mileto, filósofo y geógrafo de la Antigua Grecia y discípulo de Tales, empleaba el infinito en términos de lo sin fin, lo indefinido, lo que no tiene límites. Tal punto de vista, de lo que siempre se puede continuar, da origen a lo que se conoce como *infinito potencial*.

Esta versión del concepto ligada a la idea de recursividad permanente, de lo que siempre se puede continuar, y de aparición muy temprana tanto en el desarrollo de las ideas como en el intelecto, fue la única reconocida por la concepción aristotélica, que remite el infinito a lo que no se deja de recorrer y carece de límite, por lo que no puede ser determinado y, por ende, no existe en sí mismo. Como visión siempre asociada al conteo y de la cual la expresión y así sucesivamente, resulta un claro reflejo, reinó con exclusividad en la ciencia hasta fines del siglo XIX.

Otra acepción de infinito es la que se asocia con la idea de totalidad completa, de unidad, de un proceso ya finalizado. Esta nueva visión dio origen al infinito actual, y cobró relevancia desde fines del siglo XIX, desempeñando un rol fundamental en la matemática moderna a partir de la teoría de conjuntos de Cantor. A diferencia del potencial, el infinito actual resulta de dificultosa comprensión, ya que no se caracteriza por apoyarse en la intuición; de hecho, no es a través del sentido común que una operación con infinitas etapas pueda verse como un proceso finalizado.

Por ello, la comunidad científica estuvo, por largos períodos de tiempo, sumida en discusiones y enfrentamientos como consecuencia de las especulaciones en torno a uno y otro infinito. Se desarrolla a continuación una cronología de esta situación dividiendo el desarrollo histórico según las distintas edades de la humanidad. En virtud del tema eje del presente artículo, sólo se expondrán los principales referentes de cada etapa histórica y sólo en relación a su concepción del infinito.

3. Breve síntesis sobre las dificultades históricas en la concepción del infinito.

3.1. La Edad Antigua.

En la antigüedad, los orígenes del infinito remitían a cuestiones de índole teológica, mitológica y metafísica, ya que el infinito pertenecía al reino de Dios. En tal sentido, "…San Agustín creía que sólo Dios y sus pensamientos eran infinitos y Santo Tomás de Aquino, por su parte, demostraba en el Summa Theologiae que, aunque Dios era ilimitado, él no podía crear cosas absolutamente ilimitadas". (Ortiz, 1994, p. 62).

En la búsqueda del origen de todas las cosas, del inicio del todo, Tales de Mileto impone el concepto de Árché, que empleaba para aseverar que el principio de todo en la naturaleza era el agua.

Anaximandro (610 a. C. – 547 a. C) utiliza, como evolución del Árché, al concepto de Ápeiron, inmortal e indestructible, inengendrado e imperecedero, del cual se derivan todas las cosas. Todo sale y todo vuelve al Ápeiron según un ciclo necesario. El infinito es el todo y absolutamente nada hay fuera de él. Tenía también connotaciones en el campo de la religión y la ética: abarcaba lo divino y lo incorruptible.

Otros filósofos de la época conjeturaban, en cambio, que el elemento básico del universo debía ser el aire o el fuego y los pitagóricos se inclinaron por una visión, si se quiere más abstracta, que sostenía que era el número el punto de partida que se ocultaba detrás de todo fenómeno. Para la escuela de Pitágoras (569 a.C. – 475 a. C.) los números naturales eran elementos constituyentes de la realidad, la esencia de todo. Como sostiene Ruiz, para ellos "...los números eran los átomos del mundo" (Ruiz, 2003, p. 38).

Sin embargo, un escollo perturbador aparecía en el tranquilo mundo de los números: la existencia de cantidades que eran inconmensurables entre sí, esto es, cuya razón no podía ser expresada por un número entero o fraccionario, los irracionales.

En íntima relación con el teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo isósceles, una breve demostración de Aristóteles da cuenta que la hipotenusa no puede ser múltiplo de un cateto, pero tampoco una fracción de él y, de este modo, no es un número en el sentido pitagórico que sólo daba cabida a los actuales racionales positivos.

El caos que esta revelación significaba para la escuela de Pitágoras hizo que se la ocultara, priorizando el secreto por sobre el hallazgo. Así, el mundo discreto apoyado en las ideas pitagóricas del número como origen del todo, comienza a ver amenazado su imperio por el surgimiento de los inconmensurables o irracionales: cantidades no expresables como una razón entre dos números enteros. Otro de los problemas de este tipo con los que se toparon fue el cálculo de la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Ante la necesidad de un tratamiento alternativo por parte de los matemáticos de la época al encontrarse con este escollo, "…el gran mérito de los pitagóricos fue (…) transformar su teoría de proporciones en una de transformación de áreas, evitando por poco el desastre." (Díaz García y Vilela García, 2005, p. 8)

La postura pitagórica fue también refutada por los seguidores de Parménides de Elea (nacido entre el 530 y 515 a.C.), del cual Zenón de Elea (490 a.C. - 430 a.C.) fue el más conocido discípulo y quien propuso argumentaciones para demostrar que los conceptos de multiplicidad y divisibilidad eran inconsistentes.

Zenón utilizó de manera frecuente en sus críticas, y como eje de esquema de pensamiento, la técnica de reducción al absurdo, proceso dicotómico consistente en partir de premisas opuestas a las que se defiende. La habilidad en el manejo de estos modos de argumentar, le valió que Aristóteles lo considerara el inventor de la dialéctica. Y es en esta forma de razonamiento en la que dirigió sus paradojas, que tantas controversias causaron en las concepciones de la época y de las cuales, la del veloz Aquiles que no puede dar alcance a la lenta tortuga es, quizás, la más conocida:

Aquiles persigue a la tortuga a través de la parte de la recta numérica correspondiente a los reales positivos. Aquiles comienza en una posición digamos 0, y la tortuga a una unidad de distancia, es decir, en "1". Como Aquiles es el doble de rápido que la tortuga, espera atraparla en la posición "2". Pero la esperanza de Aquiles parece quedar tan sólo en eso según el razonamiento de Zenón en el cual, cuando Aquiles esté en la posición "1", la tortuga estará en la posición $1+\frac{1}{2}$. *Cuando Aquiles llegue a la posición* $1+\frac{1}{2}$, *la tortuga estará en la posición* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}$; *y así sucesivamente.*

Finalmente, cuando Aquiles alcance la posición antigua de la tortuga $2-\frac{1}{2^n}$, *ella llegará a la posición* $2-\frac{1}{2^{n+1}}$, *siempre un pequeño paso delante de Aquiles, y de esta manera aunque se acerquen mucho, los ligeros pies de aquél nunca darán alcance a la tortuga.*

En esta paradoja, Aquiles no podría alcanzar la tortuga dado que es imposible realizar una infinidad de actos. Es decir, la suma de un número infinito de intervalos de tiempo positivos no puede ser finita.

Sus otras tres paradojas son conocidas como: la flecha, la dicotomía y el estadio.

Situaciones contradictorias de este tipo parecían probar, entonces, que el tiempo y la distancia no podían ser continuos (si el espacio lo fuera, Aquiles no podría nunca dar alcance a la tortuga) ni discontinuos (si el espacio lo fuera, la flecha, de otra de sus paradojas, jamás se podría mover, ya que tendría que estar en un punto o en el siguiente, sin que haya nada entre ambos puntos). En efecto, se arribaba a esta dificultad por pensar que la distancia que separaba a Aquiles y la tortuga estaba dividida en infinitas partes: si bien es cierto que es divisible tantas veces como se desee, no está, en realidad, infinitamente dividida, por lo que Aquiles no tiene que acercarse al animal por medio de una cantidad ilimitada de pasos infinitamente pequeños, sino a zancadas más veloces y amplias que las del reptil. Ni siquiera el tiempo en que se produce la carrera está dividido en infinitos instantes.

Las ideas de Zenón resultaron un primer indicio para la consideración matemática del infinito actual y cobraron relevancia desde dos puntos de vista: por un lado, marcaban el fin de la matemática estructurada de la Antigua Grecia y, por otro, daban origen, 2000 años más tarde, a la teoría de sucesiones y series convergentes. Además, tuvieron implicancias fundamentales en el desarrollo de la matemática, lo que le valió al mismo Zenón ser considerado uno de los precursores del cálculo.

De este modo, el problema que el infinito originaba con sus planteos de situaciones aparentemente contradictorias "...caracterizaron al mundo griego en lo que se denominó horror al infinito" (López, 2014, p. 280).

Las paradojas de Zenón explicitaron los peligros de trabajar con el infinito, situación que no intimidó a la comunidad científica de entonces para ponerse manos a la obra con tan compleja empresa. Como sostienen Díaz García y Vilela García, "La cuestión era difícil de resolver, y la primera solución parcial vino de la mano de Aristóteles" (Díaz García y Vilela García, 2005, p. 11).

3.1.1. La Academia de Platón y el Liceo de Aristóteles.

Desde la antigüedad se posicionaban en el centro de la escena las ideas de Platón (427 a.C. - 347 a.C.) y Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) referidas al vínculo entre punto y recta, paradojas, discusiones sobre la potencialidad y la cabida o no de la actualidad del infinito.

En el siglo IV a.C. sus dos escuelas fundadas en Atenas tuvieron una marcada incidencia en el desarrollo de la matemática en Grecia: *la Academia* de Platón y *el Liceo* de Aristóteles, fundadas en el 387 y 335 a.C. respectivamente.

En Teeteto, uno de los cuatro Diálogos de la obra platónica, se aborda el estudio de ciertas cantidades inconmensurables que habían problematizado a los pitagóricos.

A Eudoxo de Cnido (390 a.C. - 337 a.C.), quizás el primer investigador y matemático puro, inicialmente pitagórico y luego compañero de los discípulos de Platón en la Academia, se debe el rigor lógico en las demostraciones, la noción de *tan pequeño como se quiera*, y *el método de exhaución* (utilizado en la visualización del círculo como límite de polígonos regulares cuya cantidad de lados aumenta infinitamente), siendo estas nociones claves en el concepto de infinito potencial.

Íntimamente relacionados con el infinito y la relación entre lo discreto y lo continuo, los irracionales provocaron, al igual que las paradojas de Zenón, tensión el mundo de las matemáticas.

Por su parte, Aristóteles rechazaba la idea del infinito, dado las contradicciones que el concepto planteaba, tales como *la aniquilación de los números*. Sostenía, además, que no se podía arribar a lo continuo partiendo de lo discreto sin caer en contradicción con los métodos algebraicos y geométricos de los antiguos griegos.

En su visión aristotélica el infinito no es otra cosa que una cantidad que puede hacerse más grande o más pequeña sin que dicho proceso se transforme en algo concreto alguna vez. Aunque consideraba los dos tipos de infinito: el potencial, concebido dependiente del tiempo, y el actual, independiente de él, marcó su clara inclinación por el primero de ellos.

En su postura,

> ... el problema del infinito, ante todo, era un problema del físico que se enfrentaba a la naturaleza. La discusión ontológica del infinito no concernía al matemático, pues era claro que en las matemáticas se trabajaba con magnitudes arbitrariamente grandes y pequeñas, pero para el estudioso de la naturaleza, que trabajaba con el movimiento y el tiempo, esto no estaba tan claramente establecido. (Recalde y Beltrán, 2017, p. 224).

En este sentido, en su Libro III de Física afirma:

> Mi argumento no les arrebata nada a los matemáticos, aunque deniega la existencia del infinito en el sentido de algo tan grande que no se puede ir más allá. Porque en realidad, ellos no necesitan utilizar el infinito, sino sólo que una recta finita sea tan larga como quieran... así que no habrá diferencia para

ellos en lo que respecta a las demostraciones. (Díaz García y Vilela García, 2005, p. 12).

En la concepción de Aristóteles existían magnitudes que podían, o bien dividirse indefinidamente (como el tiempo o el espacio), o bien aumentar también indefinidamente, (como los números naturales), pero rechazaba la existencia de conjuntos infinitos como un todo.

Las consecuencias que traía esta negación aristotélica del infinito eran graves: el tiempo tendría principio y finalizaría en algún momento y el movimiento no sería eterno, siendo esto último uno de los conceptos claves en su física.

Tanto Arquímedes como Euclides (325 a. C – 265 a. C.) tuvieron una marcada influencia *finitista*[1] o bien *infinitista potencial*[2] devenida de la concepción aristotélica.

El primero de ellos, hacia el siglo II a. C., en el conocido *Axioma de Arquímedes:* “Dados dos números positivos a y b, existen números naturales n y m tales que na>b y mb>a …” (Torres Hernández, 2002, p. 42), deja en claro que las expresiones *infinitamente pequeño* e *infinitamente grande* carecen de sentido, en virtud de que, por ejemplo: si la cantidad ***a*** fuese infinitamente pequeña, por más que la sumemos consigo misma muchas veces no superaría a *b.* Sólo en una de sus obras se menciona el término *infinito*, lo cual revela cómo las normas académicas de la época imponían evitar el conflicto con la tradicional postura finitista de Aristóteles.

También Euclides estuvo fuertemente influenciado por esta visión. En sus *Elementos* sentenciaba que *El todo es mayor que las partes*, lo que significaba una manera explícita de negar el infinito actual.

3.2. La Edad Media.

Durante la Edad Media, si bien no se evidenciaron avances importantes relacionados con el infinito matemático, el concepto entró de lleno y se estableció en los razonamientos matemáticos, siempre impregnado de la concepción aristotélica. Las discusiones sobre la naturaleza del infinito en la Edad Media tuvieron un carácter esencialmente filosófico.

Cabe mencionarse una aproximación no formal al método de inducción matemática para la generación de coeficientes binomiales, debida al matemático árabe Al-Karaji (953 - 1029). Realizó la prueba para el caso n=1 y, con la misma, demostró el caso n=2, y así hasta n=5, para luego afirmar que este proceso se podía continuar de manera indefinida. Este hecho no hace más que confirmar, una vez más, la *visión potencial* del infinito en la época, siempre exhibido como un *proceso* sin final.

En el siglo XIII Ricardo de Middleton esgrimió el primer argumento de que el universo puede expandirse sin límite sin que esto implique la existencia del infinito actual.

[1] *Finitismo:* negación de toda posibilidad de continuar una operación indefinidamente o sólo aceptar consideraciones sobre conjuntos finitos.

[2] *Infinitismo potencial*: argumentación siempre bajo la idea de un proceso que se puede repetir o continuar indefinidamente, pero no reconociendo la idea de completez o unidad de tales procesos.

Más tarde, promediando el siglo XIII y durante el siglo XIV las controversias en torno a ambas conceptualizaciones continuaron. El interés de los filósofos de la época se centró más en el contexto de las magnitudes que en el de las colecciones y la cardinalidad.

Como ya se mencionó, el *infinito actual*, interpretado como *unidad acabada,* cobró relevancia recién a fines del siglo XIX, desempeñando un rol fundamental en la matemática moderna a partir de la teoría cantoriana de conjuntos. A diferencia del potencial, el infinito actual resulta de dificultosa comprensión, ya que no se caracteriza por apoyarse en la intuición; de hecho, no es a través del sentido común que una operación con infinitas etapas pueda verse como un proceso finalizado.

Por ello, la comunidad científica estuvo, por más de 20 siglos, sumida en discusiones y enfrentamientos como consecuencia de las especulaciones en torno a uno y otro infinito.

3.3. La Edad Moderna.

La revolución científica del siglo XVII supuso el cambio del concepto de *ciencia cualitativa*, basada en la lógica silogística, por la *ciencia cuantitativa* basada en la lógica experimental. Esta renovación del método científico a cargo de personajes como Descartes, Kepler, Bacon y Galileo Galilei, entre otros, implicó un cambio paradigmático radical para la ciencia.

En la transición de la matemática del Renacimiento al mundo moderno se encuentra un considerable número de figuras, muchas de ellas provenientes de la Europa occidental, que participaron de los progresos a futuro.

En lo que concierne al origen del Cálculo, podemos citar el desarrollo de técnicas infinitesimales para calcular áreas y volúmenes basados en los trabajos de los matemáticos griegos. Surgieron así los indivisibles, la semilla de los infinitesimales, de Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630) y Bonaventura F. Cavalieri (1598-1647).

Díaz García y Vilela García exponen una paradoja vinculada con el infinito descubierta en la Edad Media:

> Sean dos círculos, uno de ellos con el doble de radio que el otro. La circunferencia del círculo mayor será entonces el doble que la del círculo menor. Ambas circunferencias tienen un número infinito de puntos, pero la mayor debería tener un número mayor de puntos que la menor. Sin embargo, dibujando un radio observamos que para cualesquiera puntos P, Q de la circunferencia menor se corresponden exactamente un punto P’ y un punto Q’ de la circunferencia exterior. Así tenemos dos magnitudes infinitas que son, al mismo tempo, iguales y distintas. Díaz García y Vilela García (2005, p. 16)

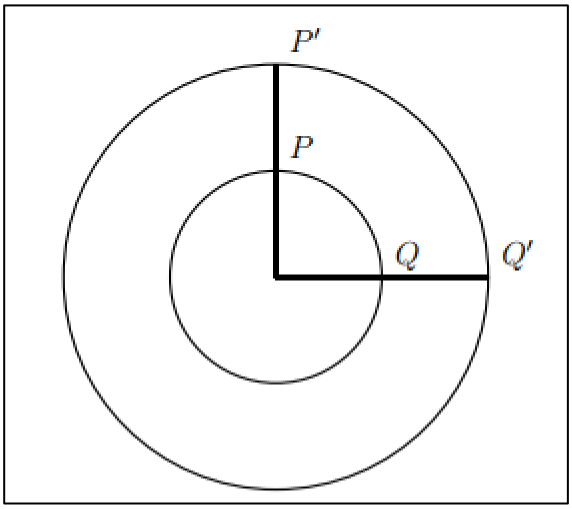


Figura 1. Dos conjuntos infinitos.
Fuente: Díaz García y Vilela García (2005).

A principios del siglo XVII, Galileo Galilei, matemático, físico, astrónomo y filósofo italiano, brindó una solución a este problema proponiendo convertir el círculo pequeño en el grande agregándole una cantidad infinita de agujeros infinitamente pequeños, *los indivisibles*. Como se menciona en Sellés García (2018), el mismo Galileo sostiene, basado en la idea aristotélica de una indivisibilidad indefinida, que una división que se pueda proseguir indefinidamente supone que las partes son infinitas, pues de otro modo la subdivisión finalizaría. Y si son infinitas son inextensas, porque, de otro modo formarían una extensión infinita. Y, si son inextensas, son indivisibles.

Galileo introdujo con estas ideas un infinito actual, a diferencia de Aristóteles, para quien el infinito carecía de límites ya que un proceso de división del continuo que, por su propia naturaleza, nunca termina, no tiene final. La postura galileana resultó un tanto ambivalente: por una parte negaba al infinito actual por "vacío o por ser producto de la Inquisición", pero, por otra, le daba cabida cuando consideraba que un segmento de recta se constituía por una cantidad infinita de puntos y que el continuo de la recta era el actual.

Hacia 1638, en su obra póstuma *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nova scienze* estableció la naturaleza paradójica de los conjuntos infinitos actuales y su imposibilidad de un tratamiento matemático. Sostenía que se puede establecer una correspondencia biunívoca ya que, por ejemplo, cada número natural queda asociado a uno y sólo un cuadrado perfecto y viceversa.

Galileo encontró aquí la propiedad fundamental de los conjuntos infinitos: el principio *el todo es mayor que la parte* no vale para conjuntos infinitos. Sin embargo, no llegó a esta conclusión pero sí a que no cabe establecer una aritmética de infinitos ni de indivisibles y que los mismos son incomparables. De modo que las relaciones de igualdad y desigualdad entre conjuntos son sólo válidas en el campo finito.

Galileo no percibió este posible germen para la posterior teoría de conjuntos desarrollada por Cantor: "Galileo, igual que Moisés, llegó a vislumbrar la tierra prometida, pero no pudo entrar a ella" (Boyer, 2007, p 416).

Como se menciona en Bombal, la conclusión que obtuvo Galileo sobre estos hechos fue:

> Esta es una de las dificultades que surgen cuando intentamos, con nuestra mente finita, discutir el infinito, asignándole las mismas propiedades que damos a lo finito y limitado. Creo que ésto es un error, pues no se puede decir de [dos] cantidades infinitas que una sea mayor, menor o igual que otra. (Bombal, 2010, p. 14)

Posteriormente Kepler y Cavalieri continuaron trabajando con la teoría de los indivisibles hasta que en 1649 el Colegio Romano rechazó los indivisibles y prohibió su enseñanza en los Colegios Jesuitas. Aunque la Iglesia buscó silenciar a Galileo confinándolo a arresto domiciliario, no pudo detener el progreso del cálculo infinitesimal. Al contrario, impulsó un mayor esfuerzo de la comunidad matemática por obtener rigurosidad y así enfrentar las críticas de la época.

A mediados del siglo XVII John Wallis (1616-1703) estableció el símbolo que utilizamos actualmente para el infinito (∞), llamado lemniscata, para representar el hecho de que se puede recorrer dicha curva una y otra vez, infinitamente. También consideró el recíproco $\frac{1}{\infty}$, que utiliza para *la nada*.

Durante el siglo XVIII, el desarrollo del cálculo infinitesimal provocó un importante avance en relación al infinito matemático. Si bien las técnicas de cálculo que se iban desarrollando eran más exactas, esto no impidió que continuaran las contradicciones en las fundamentaciones. A modo de ejemplo, Newton y Leibniz usaron cantidades infinitamente pequeñas involucrando al infinito actual pero intentando hacerlas compatibles con las prácticas del infinito potencial aristotélico.

Según Rey Pastor y Babini (1985, p. 82) el método de Newton referido a las fluxiones, cálculo de derivadas, con su esencia y notación propias, resultó ser su contribución más original. Newton presentó su obra en tres escritos: en 1669, 1671 y 1676. Pretendió evitar los problemas matemáticos del continuo e infinitesimales, y llevarlos al mundo físico considerando cantidades variables que van fluyendo con el tiempo (fluentes), y razones de cambio instantáneas de las fluentes (las fluxiones, hoy derivadas de las fuentes con respecto del tiempo).

Tal como sucede en la naturaleza, para Newton las magnitudes se generaban por el movimiento continuo, no eran un agregado de cantidades infinitesimales. En la última de sus obras expresó la intención de abandonar el uso de cantidades infinitesimales y enunció su teoría de las *razones primera y última de cantidades evanescentes* anticipándose al concepto matemático de límite.

Mientras el enfoque de Newton fue físico, el de Leibniz fue esencialmente geométrico, incluso algebraico o lógico. Lo novedoso del cálculo infinitesimal de Leibniz, se encuentra en la exploración de lo infinito a partir de las diferencias de diversos órdenes de infinitos y en considerar lo infinitamente pequeño como variación.

Los estudiosos de la época poco comprendían la nueva noción de Leibniz acerca de lo infinitamente pequeño. Leibniz elaboró reglas de igualdad y desigualdad para el infinito, así como también una operatoria básica para cantidades infinitamente grandes o pequeñas respecto de otras. Los números infinitos debían rechazarse pues el concepto de número surge cuando se aplica el concepto de cantidad y la misma se caracteriza como un entero que posee unidades.

Ante el interrogante sobre la comprensión de los números infinitos, sostuvo que las respuestas eran lógicamente absurdas porque violaban el principio de que el entero es mayor que cualquiera de sus partes. De este modo, si no había números infinitamente grandes tampoco debían considerarse números infinitamente pequeños: los infinitesimales del cálculo.

Newton y Leibniz no resolvieron los problemas lógicos en los fundamentos de sus métodos en el cálculo diferencial e integral. Para ambos lo decisivo era la coherencia de sus resultados y la fecundidad de los nuevos procedimientos, suficientes para generar el progreso de una nueva disciplina matemática.

Fue Berkeley (1605-1753), obispo de Irlanda, quien evidenció esa falta de rigurosidad mostrando inconsistencias con los infinitesimales al no cumplir el principio de Arquímedes. Como señala López (2014) el obispo hacía notar que los matemáticos no eran coherentes al trabajar con los infinitesimales debido a que al inicio los usaban en los denominadores por ser diferentes de cero, pero luego sí aparecían como sumandos eran despreciados.

Durante los primeros años del 1700 se sucedieron discusiones y debates en la *Académie des Sciences* de París sobre la validez de los procesos del nuevo cálculo. Y aunque el Marqués de L'Hôpital intentó formalizar el concepto intuitivo y la operatoria de los infinitesimales, también recibió las críticas de Berkeley.

3.4. La Edad Contemporánea.

Hasta la primera mitad del siglo XIX, la comunidad científica en general y los matemáticos en particular, sólo reconocían el infinito potencial. Esto no resulta sorprendente si se tiene en cuenta que los dos siglos anteriores estuvieron signados "…por la búsqueda de algoritmos de procesos potencialmente infinitos en contextos geométricos y dinámicos; dichos algoritmos surgen como una extrapolación del álgebra de los procesos finitos." (Waldegg, 1996, p.109).

Se enumeran a continuación algunas de las manifestaciones más notables de la preeminencia del infinito potencial durante los siglos XVIII y XIX:

Kant (1724-1804), en coincidencia con Aristóteles, señalaba como insostenible alcanzar, en lo sensorial y lo empírico, un límite absoluto, y con él, el infinito actual.

Gauss (1777-1855) negaba que una cantidad infinita pudiera verse como un ente acabado, ya que, en matemática, el infinito era una *mera forma de hablar*, y su significado, "*un límite al que ciertas razones se aproximan indefinidamente, mientras otras aumentan sin restricción*".

Cauchy (1729-1857), por su parte, rechazaba el infinito actual al sostener que, de aceptar la biyección entre el todo y una parte, se contradecía el axioma euclídeo que sostenía que *el todo es siempre mayor que una de sus partes*.

Es recién a mediados del siglo XIX, más precisamente en 1851, cuando el matemático checo Bolzano (1781-1848), en su obra póstuma *Paradojas del infinito*, da los primeros pasos hacia la introducción en matemática del infinito actual como objeto de estudio bien definido. Hasta ese momento se empleaba la noción de equivalencia para comparar la magnitud de dos conjuntos finitos: si los elementos de dos conjuntos finitos A y B podían ponerse de a pares de tal modo que a cada elemento de A le corresponda uno y sólo un elemento de B, se decía que la correspondencia es *biunívoca* y que A y B son *equivalentes*.

La concepción de Bolzano modifica el estado de situación reinante hasta ese momento afirmando que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos es aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos y acepta que los conjuntos infinitos pueden ser equivalentes, incluso, a una parte de ellos mismos, reconociendo que es posible establecer una biyección entre ellos y una de sus partes que permita establecer la *igualdad* entre ambos, en clara contradicción con el axioma euclídeo.

En 1872, Dedekind fue el primero en vislumbrar en las paradojas de Bolzano, una propiedad de los conjuntos infinitos, que estableció como definición: *Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo, en caso contrario, se dice que S es un sistema finito.*

El ejemplo del uso de la biyección de Bolzano entre los números naturales y los números cuadrados perfectos le sirvió para establecer la distinción entre *estar contenido* y *tener menor tamaño*: el conjunto de los números cuadrados está contenido en el conjunto de los números enteros, pero unos y otros tienen igual tamaño. Postuló entonces que a los conjuntos infinitos se les podría atribuir *números transfinitos*, incorporó la idea de potencia de un conjunto, dando así lugar al concepto de *número cardinal*. Esta teoría de números transfinitos se convertiría en la base para la introducción de operaciones relacionadas con el infinito.

Es en esta instancia donde nace el mayor obstáculo epistemológico en el devenir de su obra que motivó que su propósito de aritmetizar el infinito quedase inconcluso.

> Bolzano no deja de insistir en la relación paradójica entre dos conjuntos infinitos: a partir de la existencia de una biyección, el hecho de concluir la igualdad de dos conjuntos infinitos, desde el punto de vista de su multiplicidad (o, como decimos desde Cantor, su equipotencia o equivalencia) es extender de manera ilegítima una propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos. (Waldegg, 1996, p. 111)

Estas contradicciones entre lo intuitivo del axioma euclídeo mencionado y lo empírico del establecimiento de la biyección como método de comparación entre conjuntos infinitos, hacen imposible la creación y el desarrollo de una teoría consistente, por lo que su obra quedó inconclusa.

A fines del siglo XIX apoyándose en los trabajos de Bolzano, el matemático ruso-alemán Georg Cantor (1845-1918), trabajando en problemas de series trigonométricas, llega a una clasificación de conjuntos excepcionales e intuye que la riqueza de éstos será generadora de novedosos desarrollos matemáticos.

Demuestra que existen diversos grados de infinitos, alejándose así de la creencia que establecía la existencia de un sólo infinito inalcanzable y no real. Coincidiendo con Galileo, señaló como un obstáculo epistemológico que hasta ese momento se haya pretendido extrapolar cuestiones matemáticas del mundo finito a los números infinitos.

Cantor asegura que no debe distinguirse entre infinito potencial y actual, ya que el mismo potencial supone la existencia de este último.

Uno de sus primeros descubrimientos fue que el conjunto de los números racionales puede ponerse en correspondencia biunívoca con los naturales y, por lo tanto, es numerable.

Intuitivamente parece extraño que los elementos del conjunto denso de los racionales pueda *acomodarse uno a uno* con los elementos del conjunto discreto de los enteros positivos que, además, es un subconjunto del primero. Un esquema visual que representa el planteo de Cantor, consistente en asignar un número natural a cada fracción es el que se muestra la figura siguiente

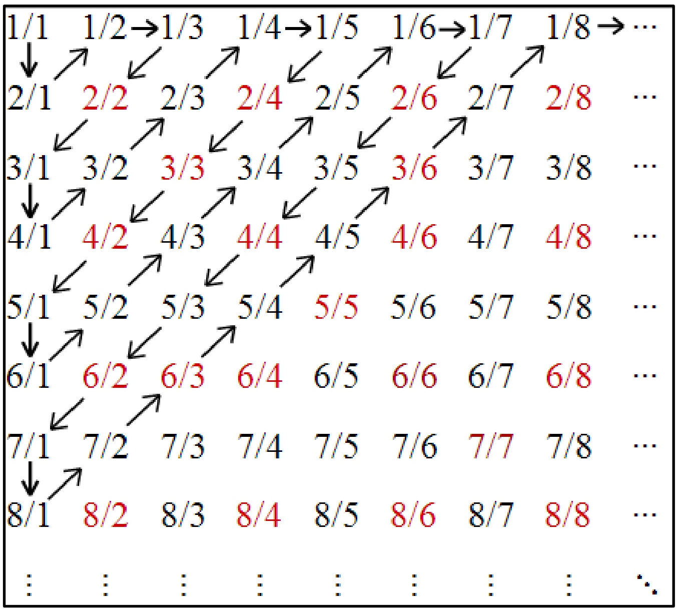


Figura 3. La biyección entre naturales y racionales.
Fuente: scirescience.wordpress.com (2014)

Esta correspondencia biunívoca hacía sospechar que cualquier conjunto infinito es numerable "pero el resultado de Cantor refuta esto: hay un conjunto, el continuo de números reales, que no es equivalente a ningún conjunto numerable" (Courant y Robbins, 2014, p. 111).

Este hecho produjo vacilaciones en Cantor: en 1873 le escribe una carta a Dedekind planteándole la posibilidad de que el conjunto de los números reales sea numerable, pero en 1874 presenta dos demostraciones que no lo es. Intentó probar que R^n, con $n \in N, n > 1,$ no es equivalente a R pero en 1887 demuestra que sí lo es.

En 1874 Cantor demostró la numerabilidad de los racionales, la no numerabilidad de los reales y la numerabilidad del conjunto de los números algebraicos, esto es de los números reales que son soluciones de ecuaciones de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdot + a_1 x + a_0 = 0$ con $a_i \in Z$ para $i = 0,\dots, n$. Y con estos tres resultados de numerabilidad puso en consideración la presencia del infinito actual o real, noción que era rechazada desde Aristóteles en beneficio del infinito potencial.

Retomando la idea de Bolzano de establecer una biyección como principio básico de comparación de dos conjuntos infinitos, sostiene que si es posible establecer una biyección entre dos conjuntos, los mismos tienen igual potencia.

En 1878 caracterizó un conjunto finito como aquél cuya potencia es un entero positivo y que todo subconjunto propio de un conjunto finito tiene una potencia menor que éste, mientras que un conjunto infinito tiene la misma potencia que algún subconjunto propio. La equipotencia entre naturales y racionales echaba por tierra el hasta entonces incuestionable postulado de que el todo siempre es mayor que la parte.

Al demostrar Cantor que existe un conjunto, el continuo de números reales, que no es equivalente a ningún conjunto numerable, establece que hay dos tipos diferentes de *infinito*: el infinito numerable (de los enteros, por ejemplo) y el infinito no numerable, del continuo. Se trataba entonces de establecer una jerarquización de números transfinitos y una aritmética para ellos.

Según Fava y Zo (1996) este descubrimiento representa uno de los momentos cruciales en la historia de las Matemáticas como cuando los griegos descubrieron que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con el lado del mismo.

Sus descubrimientos prosiguieron. Así, en 1877 demostró que los puntos de la recta real y los ´puntos del espacio n-dimensional R^n (con n>1) son equipolentes y en 1882 incorporó los números infinitos o números transfinitos en su obra *Fundamentos de una teoría general de conjuntos*.

Número transfinito es el término original que acuñó Cantor para referirse a los cardinales transfinitos. Para conjuntos finitos el número cardinal es el número usual de objetos del conjunto. Para conjuntos infinitos se introducen nuevos números cardinales. El número cardinal del conjunto de números enteros lo anota como $\aleph_0$, puesto que los números reales no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los enteros, el conjunto de los números reales debe tener otro número cardinal que nota por *c*.

Acerca de la importancia del trabajo de Cantor:

> Su éxito fue negar la afirmación obvia de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes. Así es que hay tantos números naturales como números pares, tantos números fraccionarios como números naturales, siendo este número el número cardinal Alef cero. Además evidenció la existencia de un número cardinal más elevado, el número de puntos de una recta, igual al número de puntos de un cuadrado, de un cubo o del espacio entero. (López, 2014, p 293).

Cantor fue uno de los matemáticos más revolucionarios de su época pues contradecía las concepciones intuitivas que durante más de dos mil años se consideraron como principios básicos de la filosofía. Sus concepciones del infinito significaron un desafío para la época y sus ideas un atentado a la intuición de sus contemporáneos. Tuvo grandes adeptos como Hadamard (1865 – 1963) y Hilbert (1862 – 1943), quienes aplicaron la teoría de conjuntos de Cantor al análisis.

Al igual que Bolzano, enfrentó severas críticas por parte de reconocidos matemáticos de su época, como Weyl (1885 – 1955), quien consideró que la infinidad de infinitos de Cantor eran *niebla en la niebla*, Poincaré (1854 – 1912) catalogó a sus ideas como una enfermedad de la que algún día llegarían las Matemáticas a curarse y Kronecker (1823 – 1891) lo atacó personalmente calificándolo de charlatán, renegado y corruptor de la juventud. Sin embargo, más tarde, recibió el reconocimiento de Hilbert, quien afirmó: *Nadie nos arrojará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.*

La teoría moderna de conjuntos creada por Cantor y sus seguidores, si bien se inició en un proceso controversial, permitió definir con precisión al infinito y se constituyó como referente en el estudio de los fundamentos lógicos y filosóficos de la matemática.

4. Repercusiones en el aprendizaje.

Los históricos problemas epistemológicos, debates y controversias que presentó el concepto de infinito parecen reproducirse a escala en el proceso de aprendizaje.

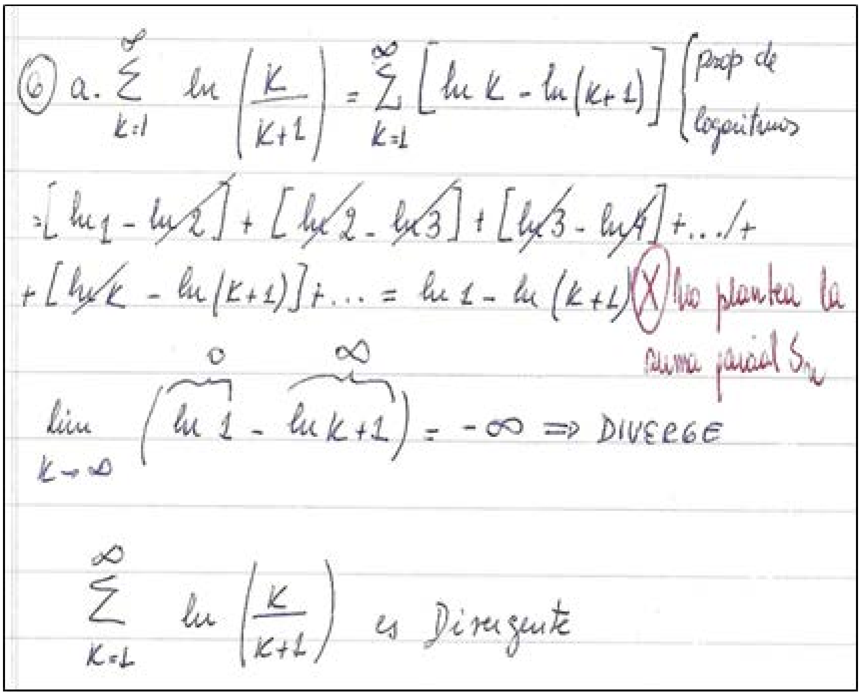
Diversas y numerosas son las investigaciones que se proponen dar cuenta de los inconvenientes que la polémica noción acarrea en los procesos de enseñanza y de aprendizaje: Waldegg, G. (1996), Penalva, M. C. (1996), Garbin, S. y Azcárate, C. (2002), Sacristán Rock, A. (2003), etc.

En la práctica áulica cotidiana pueden confirmarse los inconvenientes que genera en los alumnos comprender el significado del concepto de infinito, en especial del *actual*, más todavía si se tiene en cuenta que dicha noción interviene en varios temas del currículo de la asignatura Cálculo I (con los tradicionales tres ejes temáticos: cálculo diferencial, cálculo integral, sucesiones y series numéricas y de potencias), en la que los autores de la presente investigación desarrollan sus actividades de docencia universitaria.

Los problemas se evidencian tanto en cada pregunta informal que sobre un tema que involucre el infinito se les efectúa a los alumnos como en las producciones escritas de los mismos en las instancias de evaluación. Cabe aclarar que las dificultades que se generan en el aprendizaje como consecuencia de la conflictividad que conlleva el concepto de infinito son numerosas y de la más variada naturaleza, sin embargo, en este artículo sólo se presentan situaciones que reflejan los antiguos debates antes mencionados en torno a su significación.

Se brindan a continuación algunas imágenes que ilustran la problemática para comprender significativamente el concepto objeto de este trabajo.

Por ejemplo ante la consigna ¿Es convergente la serie $\sum_1^{\infty} ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$?, fue común encontrarse con respuestas del tipo:



⑥ a. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln k - \ln(k+1)\right]$ {prop de logaritmos

$= [\ln 1 - \cancel{\ln 2}] + [\cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3}] + [\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 4}] + \dots /+$

$+ [\cancel{\ln k} - \ln(k+1)] + \dots = \ln 1 - \ln(k+1)$ X No plantea la suma parcial S_n

$\lim_{k\to\infty} \left(\overbrace{\ln 1}^{0} - \overbrace{\ln k+1}^{\infty}\right) = -\infty \Rightarrow$ DIVERGE

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ es Divergente

Figura 4.
Fuente: Examen final Cálculo 1. Facultad de Ing. y Cs. Hídricas (U.N.L.) (2017)

Puede observarse cómo las propiedades de asociación y cancelación de los términos, válidas en el campo finito, se extienden erróneamente como legítimas para un número infinito de sumandos. La transferencia de nociones válidas en el campo finito al infinito es una de las falencias más comúnmente observadas y actuaría como una réplica de lo que el mismo Cantor aseguraba acerca de los motivos por los cuales el infinito actual era de difícil aceptación.

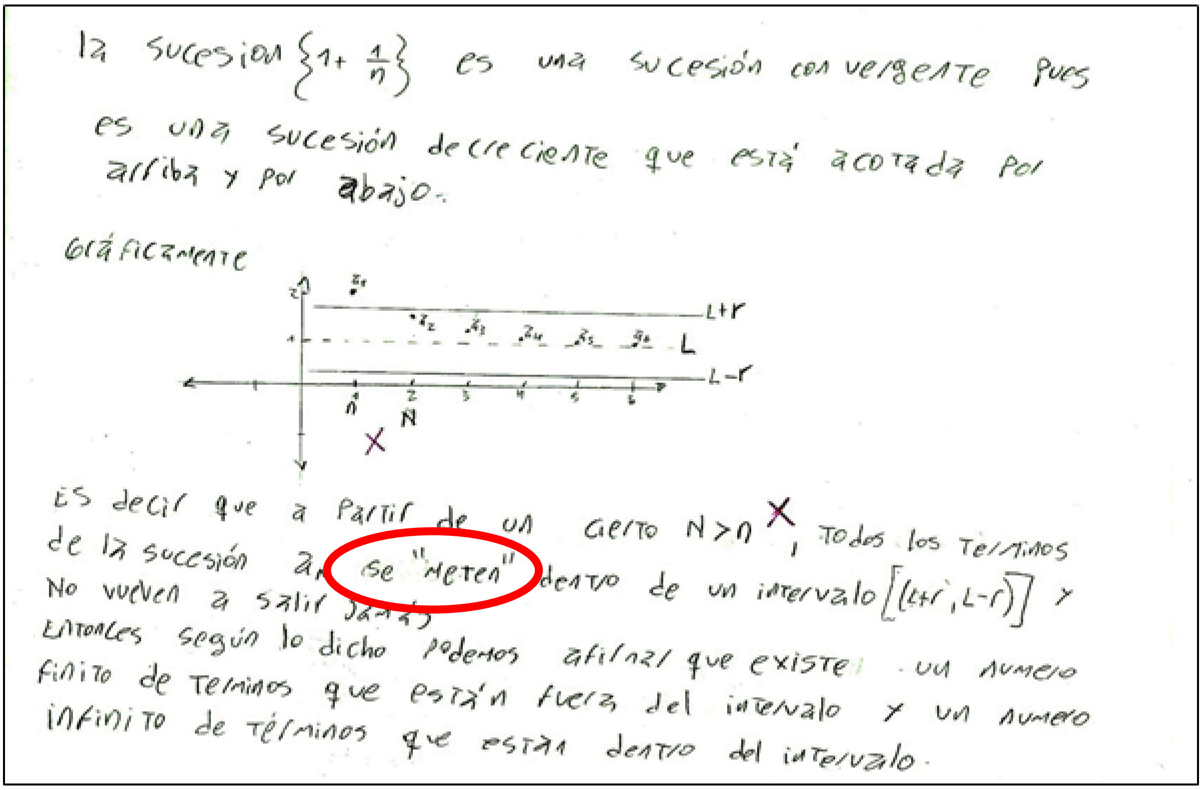
Otro caso lo ilustra la siguiente consigna:

Luego de hacer los cálculos correspondientes, indique con cuál(es) de las siguientes alternativas se corresponde la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n}$:

a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \dots$ b) 1 c) ambas

La mayor parte de los alumnos optó por la opción (a) lo que podría ser un indicador de cómo la potencialidad es *lo típico* en la visualización del estudiante, por sobre la *actualidad* que hubiera implicado la elección (b).

En otras evaluaciones, en las que el objetivo de la consigna se centraba en percibir de qué manera los alumnos aprendían el concepto de convergencia secuencial, fue común encontrarse con expresiones del tipo como la que ilustra la siguiente imagen:



la sucesión $\{1+\frac{1}{n}\}$ es una sucesión convergente pues es una sucesión decreciente que está acotada por arriba y por abajo.

Gráficamente

Es decir que a partir de un cierto $N > n$, todos los términos de la sucesión a_n se "meten" dentro de un intervalo $[(L+r, L-r)]$ y no vuelven a salir jamás. Entonces según lo dicho podemos afirmar que existe un número finito de términos que están fuera del intervalo y un número infinito de términos que están dentro del intervalo.

Figura 5.

Fuente: Examen final Cálculo 1. Facultad de Ing. y Cs. Hídricas (U.N.L.) (2017)

Se observa cómo, aún sin expresar aproximación al límite L, utilizan, en referencia al entorno de L, términos tales como *caen, se meten, entran*, en una clara postura *potencialista*.

5. A modo de conclusión.

El concepto de infinito satura a todas las matemáticas, dado que los objetos matemáticos generalmente se estudian no como individuos sino como miembros de clases o agregados que contienen infinidad de objetos del mismo tipo [...]. Por esta razón es necesario analizar al infinito matemático de un modo preciso (Courant y Robbins, 2014, p. 104)

González Urbaneja (2004), apoyado en textos de ilustres matemáticos, pedagogos, historiadores y profesores, resalta las múltiples razones que fundamentan la vinculación permanente de la historia con la Didáctica de la Matemática.

Consideramos que, como educadores, conocer las intuiciones e ideas que dieron lugar a conceptos, propiedades y demostraciones; los lenguajes y notaciones en que se expresaban; las dificultades que involucraban; los problemas cotidianos y fenómenos físicos o sociales que ayudaban a resolver; el marco histórico en que aparecían, etc. contribuye en distintos aspectos al desarrollo de nuestra profesión.

Por un lado, facilita poner de manifiesto a los alumnos el proceso dinámico de la actividad científica: zigzagueante, nunca acabado, crítico. Por otro, ayuda a replantear el posicionamiento epistemológico con el que se estudia esta ciencia y evitar planificar su enseñanza como un producto dogmático, inmutable, cerrado y acabado.

Finalmente, y como sostienen Azcárate Giménez y Deulofeu Piquet (1996), resulta conveniente contar con más herramientas a la hora de concebir una primera idea de los obstáculos que se especula encontrarán nuestros alumnos en la adquisición de un concepto, considerando las dificultades intelectuales que ha supuesto su adquisición a lo largo de su desarrollo epistemológico. Esto, a su vez, permitirá, desde la enseñanza, el trazado de estrategias didáctico - pedagógicas que resulten un posible aporte para la adquisición de aprendizajes satisfactorios en términos de significación.

6. Bibliografía.

Azcárate Giménez, C. y Deulofeu Piquet J., (1996). *Funciones y Gráficas*. Madrid, España: Síntesis.

Bombal, F. (2010). Un paseo por el infinito. *Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. *104*(2), 427-444. Recuperado de www.rac.es/ficheros/doc/00984.pdf

Boyer, C. B. (2007). *Historia de la Matemática*. Madrid. España: Alianza.

Courant, R. y Robbins, H. (2014). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México: Fondo de Cultura Económica.

Díaz García, L. y Vilela García, M. A. (2005). El infinito matemático. Recuperado de www.miguev.net/blog/wp-content/uploads/2005/01/El_Infinito_Matematico.pdf

Fava, N. y Zó, F. (1996). *Medida e Integral de Lebesgue*. Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las ciencias*, *20*(1), 87-113.

González Urbaneja, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*. (45), 17-28.

López, C. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Revista Ciencia y Tecnología*. (14), 277-298.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana*. *Boletín 1*(2), 59-81.

Penalva, M. C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.

Recalde, L. y Beltrán, A. (2017). Algunas disquisiciones filosóficas en torno al problema de la existencia del infinito en matemáticas. *Praxis Filosófica Nueva Serie*. (45), 219 - 241.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1985). *Historia de la matemática*. *Del Renacimiento a la actualidad*. Barcelona. España: Gedisa.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

Sacristán Rock, A. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa:*

Aspectos de la investigación actual. (pp. 262-279). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados y Fondo de Cultura Económica.

Sellés García, M. (2018). La teoría de indivisibles de Galilelo Galilei y su geometrización del movimiento. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/267805070_la_teoria_de_indivisibles_de_galileo_y_su_geometrizacion_del_movimiento

Torres Hernández, R. (2002). Eudoxo, Arquímedes y el límite de una sucesión. *Revista Miscelánea Matemática*. (35), 41-48.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. *1*(1), 107-122.

Mario Garelik es Licenciado en Matemática Aplicada y Magister en Didácticas Específicas y se dedica a la investigación en Matemática Educativa, ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo. Profesor titular en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas - Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe - Santa Fe – Argentina.
mgarelik@gmail.com Tel. Móvil: 54-9-342-4399197

Fabiana Montenegro es Profesora de Matemática, Licenciada en Matemática Aplicada, Magister en Matemática. Doctoranda en Educación. Profesora adjunta en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. Profesora titular en el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Escuela Normal Superior N 32. Santa Fe - Santa Fe – Argentina.
montenegrofg@gmail.com Tel. Móvil: 54-9-342-5337389