REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 100-119

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Uma proposta de situação didática no contexto de investigação histórica das relações recorrentes bidimensionais para os números complexos de Fibonacci

Francisco Regis Vieira Alves, Rannyelly Rodrigues de Oliveira

Fecha de recepción: 24/02/2018
Fecha de aceptación: 18/05/2018

Resumo	Este trabalho apresenta uma proposta numa abordagem de investigação histórica, relativamente a um contexto de ensino superior, para professores em formação inicial. Ademais, aborda relações recorrentes bidimensionais definidas a partir dos valores da sequência de Fibonacci. Assim, com inspiração num artigo de Harman (1981), busca discutir propriedades matemáticas dos números G(n,m) em situações didáticas de investigação envolvendo aspectos epistemológicos e históricos de identidades desconsiderados por este autor. Ademais, algumas das relações e fórmulas abordadas podem ensejar futuras investigações derivadas da generalização do modelo de recorrência de Fibonacci. **Palavras-chave**: Situações didáticas, Investigação histórica, Relações recorrentes, Números complexos de Fibonacci.
Resumen	Este trabajo presenta una propuesta en un enfoque de investigación histórica, para un contexto de enseñanza superior, para profesores en formación inicial. Además, aborda relaciones recurrentes bidimensionales definidas a partir de los valores de la secuencia de Fibonacci. Así, con inspiración en un artículo de Harman (1981), busca discutir propiedades matemáticas de los números G(n,m) en situaciones didácticas de investigación envolviendo aspectos epistemológicos e históricos de identidades desconsideradas por este autor. Además, algunas de las relaciones y fórmulas abordadas pueden conducir a futuras investigaciones derivadas de la generalización del modelo de recurrencia de Fibonacci. **Palabras clave:** Situaciones didácticas, investigación histórica, relaciones recurrentes, números complejos de Fibonacci.
Abstract	This paper presents a proposal for a historical research approach to a context of higher education for teachers in initial formation. In addition, it addresses recurrent two-dimensional relationships defined from the values of the Fibonacci sequence. Thus, inspired by an article by Harman (1981), he seeks to discuss mathematical properties of numbers G(n,m) in didactic research situations involving epistemological and historical aspects of identities disregarded by this author. In addition, some of the

relations and formulas discussed may lead to future investigations derived from the generalization of the Fibonacci recurrence model.
Keywords: Didactic situations, historical research, recurrent relations, complex Fibonacci numbers.

1. Introdução

A proposição de atividades de investigação histórica, no âmbito da formação inicial de professores de Matemática, pode proporcionar e estimular uma percepção e o entendimento acerca do processo evolutivo em Matemática que, em certos casos, pode ser observado por intermédio das etapas progressivas e gradativas sofridas por um conceito científico ou um objeto teórico conceitual ao decorrer dos séculos e, em alguns casos, ao longo de algumas décadas (Alves, 2016a; 2016b; 2016c; 2017).

Por outro lado, quando se atém ao percurso evolutivo de um objeto, modelo matemático ou noção particular, de modo geral, não se aprecia/ encontra em fontes históricas, livros de História da Matemática - HM (Estrada, 2000; Eves, 1969; Herz, 1998) que relatem tanto os elementos primordiais que concorreram para o estadio de seu nascedouro, bem como, o estágio evolutivo hodierno e o interesse atual concernentemente ao "estado de arte" do mesmo.

De modo particular, neste trabalho, será discutido um modelo matemático cujo estágio original se tornou conhecido pelo nome de Sequência de Fibonacci e que, por intermédio de uma intenção "pedagógica" de Leonardo Pisano, costumeiramente é lembrado pelo problema do nascimento, *ad infinitum*, de pares de coelhos imortais mas, que, do ponto de vista do modelo numérico e suas propriedades práticas e utilitárias, já era conhecido e empregado no comércio pelos indianos alguns séculos antes.

Numa abordagem histórica, destaca-se que a quarta cruzada pregada pelo papa Inocêncio III, ocorreu em 1204 e tinha como objetivo organizar um ataque contra os mulçumanos no Egito e, em seguida, reconquistar a costa da Palestina. Todavia, a Igreja e as nações ocidentais cristãs não tinham recursos financeiros para custear esse plano. Desse modo, recorreram à República de Veneza com o propósito de conseguir um meio que levasse os cruzados até o Oriente. Os cruzados, como não tinham com que pagar a conta, "foram obrigados a aceitar que Veneza decidisse o roteiro das conquistas. A proposta da República era quitar a dívida com a tomada de Zara, um porto cristão, mas rival dos venezianos no comércio do mar Adriático" (Doré, 2000).

Assim, vale comentar que Leonardo nasceu por volta de 1175 no centro comercial de Pisa, na Idade Média que abrange um cenário marcado pela influência das cruzadas à sociedade europeia e pelo contato com o Oriente. Além do mais, nesse contexto, surgem as Universidades de Pádua, Nápoles, Paris, Oxford e Cambridge. Leonardo era um matemático atuante na atividade comercial, pelas quais visitou o Egito, a Síria, a Grécia, a Sicília, o sul da França e a Constantinopla. Contudo, nessas viagens, ele conheceu métodos algébricos árabes e os números indo-arábicos, logo, foi instigado a estudar aritmética. Em 1200, Pisano retorna à Itália e, em 1202, ele escreve a obra *Liber Abbaci*, na qual aborda questões relacionadas à Álgebra e Aritmética, dentre essas, ele propõe uma solução para o seguinte problema: dado um par de coelhos, determine "quantos serão produzidos por este par em um ano, se cada par de coelhos dar à luz a um novo par de coelhos a cada mês, começando com o segundo mês de sua vida. É assegurado que as mortes não ocorrem" (King, 1963).

Esse problema deu origem ao modelo de Fibonacci que é discutido nos livros de História da Matemática de forma pouco pormenorizada, na maioria das vezes, apresentando apenas a sua recursividade unidimensional. *A priori*, as definições e relações oriundas desse modelo, também são exploradas nas pesquisas em Matemática Pura (Alves, 2016a; 2016b; 2016c). Isso oportuniza a percepção e a compreensão de um processo evolutivo desse modelo, posibilitando a sua investigação no âmbito da Didática da Matemática.

De modo particular, podem ser listados os seguintes conjuntos numéricos: $\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,\ldots,f_n,\ldots\}$, $\{\ldots,f_{-n},\ldots,-34,21,-13,8,-5,3,-2,1,-1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots,f_n,\ldots\}$, $\{\ldots,f_{-(n+1)}+f_{-n}i,\ldots,-8+5i,5-3i,-3+2i,2-i,-i,0,1,1+i,2+i,3+2i,5+3i,8+5i,13+8i,\ldots,f_n+f_{n-1}i,\ldots\}$ e $\{\ldots,f_{-n}f_{-(m+1)}+f_{-(n+1)}f_{-m}i,\ldots,,0,1+i,2+i,1+2i,3+4i,5+6i,4+3i,10+9i,\ldots,f_nf_{m+1}+f_{n+1}f_mi,\ldots\}$.

Preliminarmente, com origem num olhar atencioso dos quatro conjuntos acima, uma preocupação matemática elementar consistiria na determinação da forma geral dos seus elementos. Assim, tendo em vista a emblemática relação de recorrência unidimensional $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n, n\geq 0$, de segunda ordem, cujo interesse de discussão no meio científico foi devido ao matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891), pode-se instigar o interesse pela forma de determinação do termo geral, correspondentemente, a cada conjunto há pouco indicado.

O fato é que, de modo simplista, a determinação dos elementos dos quatro conjuntos acima são condicionados por uma regra ou definição formal. Por outro lado, desde que se propugna o papel imprescindível do estabelecimento de definições matemáticas formais para que se possa vislumbrar o processo evolutivo em Matemática, assinala-se que o processo de extensão e descrição dos números de Fibonacci, para índices inteiros, pode ser registrado, pela primeira vez na literatura científica, por exemplo, no trabalho de Brother (1965). Brother (1965, p. 2) comenta a processo evolutivo da sequência numérica para valores (índices) à esquerda de zero (figura 1).

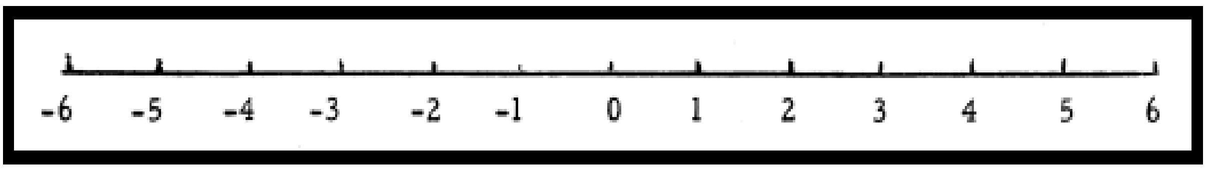

Figura 1. Extensão dos números de Fibonacci para índices inteiros.
Fonte: Brother (1965, p. 2).

Mas, antes de se deflagrar a seção subsequente, quando se atém aos elementos do tipo $13+8i$, de imediato, pode-se apropriar de uma notação geral da forma $f_n + f_{n-1}i$, para $n \in IN$. O elemento que, eventualmente, chama atenção nesse caso, corresponde à presença da unidade imaginária $i^2 = -1$ e, assim, intuitivamente, passa a exergá-la como um número complexo (de Fibonacci). Posto isso, doravante, serão abordadas ideias relativas a situações didáticas, tendo em vista que se pretende explorar a complexificação do modelo de Fibonacci no contexto da Didática da Matemática numa perspectiva de investigação histórica.

2. Situações didáticas

A Didática da Matemática (DM) teve seu marco inicial na França em 1970 e ganhou destaque durante a reforma da Matemática Moderna através da criação dos IREMs (Instituto de Pesquisa sobre Ensino da Matemática) e da aceitação das teorias piagetianas relacionadas ao desenvolvimento intelectual com ênfase no aprendizado de conceitos. Desse modo, segundo Pommer (2008), o Instituto oportunizava uma formação complementar para professores que possibilitava a concepção de recursos para serem usados em situações de ensino. Dessa forma:

> A didática da Matemática é uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da pratica pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (Pais, 2002, p. 11).

Assim, a DM tem em seu escopo, investigar possíveis percursos metodológicos que proporcionem a transposição didática de conceitos matemáticos. Isso exige que se compreenda como as concepções novas são organizadas no cognitivo do aluno. Segundo Artigue (2009, p.4), a aprendizagem efetiva-se durante um processo de adaptação do estudante ao *milieu*. Almouloud (2007, p. 35) explica que o *milieu* é um grupo de situações adidáticas compostas por conhecimentos externos ao sujeito.

Brousseau (1976, p. 108) descreve, numa perspectiva da epistemologia genética, que os estágios de acomodação e assimilação do conhecimento, "se assemelham às etapas de desenvolvimento dos conceitos pela lei de regulação que os fazem aparecer, e que diferem da natureza exata das limitações que determinam essa regulação". Desse modo, o paradigma cognitivo piagetiano instigou a concepção de teorias de ensino numa vertente da DM e que buscam identificar as fases de compreensão da construção de conceitos matemáticos. Dentre essas teorias, vale destacar a Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida por Brousseau (1976).

A TSD abrange, em seus estudos, o aluno, saber e *milieu* e como estes três fatores estão associados diante de uma situação didática. Brousseau (2008, p. 53) esclarece que uma "interação torna-se didática se, e somente se, um dos sujeitos demonstra interação de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais)".

Uma maneira de simular as situações didáticas é a aplicação de situações-problema elaboradas com enfoque na TSD. Conforme Almouloud (2007, p. 36), a TSD é sistematizada em quatro fases consecutivas: ação, formulação, validação e institucionalização. Vale salientar que as três fases iniciais são realizadas, principalmente, pelos estudantes com a participação mínima do docente. Por outro lado, a institucionalização é feita pelo professor a fim de avaliar o desempenho dos alunos nas etapas anteriores.

Alves (2016c, p. 62) explica que na fase de ação, os alunos decidem resolver a questão proposta, para isso, o estudante mobiliza, de imediato, um pensamento intuitivo e operacional. Enquanto na formulação, esse pensamento passa por um processo de transição a fim de se estabelecer um raciocínio inferencial fundamentado num modelo teórico. Nesse sentido, o estudante chega à fase de validação com argumentos mais elaborados recorrendo a uma linguagem matemática mais apropriada e a métodos de demonstração matemática com a finalidade de validar ou refutar as conjecturas elaboradas. Assim:

> Um problema de validação é mais um problema de comparação, de avaliação e de rejeição de evidências e da investigação da demonstração. [...] Para uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação. A comunicação desempenha um papel importante em parte independente das questões de validade. (Brousseau, 1976, p. 110).

Além do mais, a TSD integra elementos de ordem epistemológica, cognitiva e social inerentes à Didática da Matemática, possibilitando o entendimento das “interações sociais que ocorrem na sala de aula entre alunos e professores e das condições e da forma com que o conhecimento matemático pode ser apropriado e aprendido” (Teixeira e Passos, 2013, p. 157). Ademais, quando se compreende a epistemologia como uma “teoria do conhecimento” (Abbagnano, 1998, p.338), é relevante aceitar a concepção de Almouloud (2007, p. 149), que retrata a epistemologia como uma investigação na estrutura do conhecimento científico que considera sua gênese histórica assim como sua (re) construção na estrutura cognitiva dos aprendizes. Nesse contexto:

> [...] vale a advertência do caráter epistemológico que reside em imprimir ao raciocínio do estudante, o caráter monossêmico e inferencial, característico das teorias formais. [...] Assim como os teoremas e as teorias fundantes, que conferem seu caráter de certeza, se mostram entrelaçadas com uma “teia epistêmica” de concepções e saberes que não são negligenciados pela Didática da Matemática. (Alves, 2016d, p. 140-141).

À vista disso, a TSD oportuniza a compreensão de teoremas e propriedades matemáticos através de suas etapas de formulação e avaliação de conjecturas. Isso pode ser evidenciado na fase de institucionalização da TSD, em que o docente retoma a situação didática e verifica as produções dos alunos no sentido de generalizar os conceitos matemáticos explorados em sala de aula e, consequentemente, ampliar o repertório cultural de “saberes matemáticos” (Alves, 2016c, p. 62).

Por fim, um conjunto de situações-problema com enfoque na TSD possibilita a realização de situações didáticas numa abordagem de investigação histórico-evolutiva de relações matemáticas. Assim, a seguir será apresentado o modelo de Fibonacci e sua representação histórico-evolutiva no que diz respeito ao processo de complexificação.

3. Os números complexos de Fibonacci no contexto de investigação histórica

Na seção atual, serão apresentados e demarcados os elementos necessários e envolvidos numa proposta de situação didática no contexto de investigação histórica. Pretende-se com essa proposta, realizar situações de ensino, no âmbito de formação inicial de professores de Matemática, que oportunizem uma abordagem epistemológica das definições e relações recursivas oriundas da complexificação do Modelo de Fibonacci nas aulas de História da Matemática.

King (1963, p.16) explica que a gênese do modelo de Fibonacci é contextualizada pela situação-problema, "*Rabbit Problem",* proposta por Leonardo Pisano em 1202 na obra *Liber Abbaci* sobre a reprodução de pares de coelhos imortais. Essa problematização deu origem à sequência de Fibonacci {1, 2, 3, 5, 8, ...}. Conforme, Alves e Catarino (2016), essa sequência é representada pelo modelo recursivo unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ para $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$.

No contexto histórico-evolutivo do MF, pode-se verificar um processo de generalização da SF sendo publicizado, inicialmente, na literatura de Brother (1965) com a extensão da sequência para o conjunto dos números inteiros. Além do mais, o modelo unidimensional foi discutido por Koshy (2001), que investigou algumas identidades unidimensionais, elaboradas por François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891), inerentes ao MF.

À vista disso, este artigo, tem como campo epistêmico, o processo de complexificação do MF através da inserção da unidade imaginária "i" e sua correspondente representação algébrica bidimensional. Destarte, têm-se representações complexas para os números de Fibonacci como, por exemplo, os "números de Fibonacci Gaussiano" e suas relações recorrentes apresentados por Pethe e Horadam (1986) e os "inteiros gaussianos" que é uma descrição feita por Berzsenyi (1977).

Desse modo, preliminarmente, pode-se vislumbrar a representação geométrica da disposição dos inteiros Gaussianos. Conway & Smith (2003, p. 15) acentuam que "Gauss definiu a noção de números complexos de modo análogo, em integralidade, com os números reais". E, de modo particular, um número complexo $(x+iy)$ é considerado como um inteiro gaussiano se, justamente, suas partes real e imaginária são números inteiros. Assim, como foi mencionado nos parágrafos anteriores, o modelo dos números inteiros Gaussianos permitiu o surgimento de definições matemáticas derivadas da SF original. Com efeito, o conjunto de três definições, a seguir, confirma um processo evolutivo, matemático e epistemológico ao decurso de algumas décadas.

Definição 1: Chamaremos de números Gaussianos de Fibonacci, os elementos descritos pela seguinte relação de recorrência $Gf_n = Gf_{n-1} + Gf_{n-2}$, onde $Gf_0 = i, Gf_1 = 1$ (Jordan, 1965).

Definição 2: Para 'n' e 'm' inteiros positivos, definiremos os números gaussianos de Fibonacci por $f_{n+mi} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot f_{n-k}$ (Berzsenyi, 1977).

Definição 3: Os números da forma $G(n,m)$, devem satisfazer às seguintes condições bidimensionais de recorrência: $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$; $G(n,m+2)$ $= G(n,m+1) + G(n,m)$, com as condições: $G(0,0) = 0$, $G(1,0) = 1$, $G(0,1) = i$, $G(1,1) = 1 + i$ (Harman, 1981).

Na figura 2, observa-se a representação dos inteiros gaussianos e, a partir da definição 2, pode-se compreender que os números gaussianos de Fibonacci constituem um subconjunto dos inteiros gaussianos. Além disso, na definição 2, consta uma relação que amplia o conjunto de índices da sequência dos números Gaussianos. A definição 2 apesar de não se mostrar com evidência o caráter de recursividade unidimensional, pode-se observar que: $f_{(n-1)+mi} + f_{(n-2)+mi} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot f_{n-1-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot f_{n-2-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot (f_{n-1-k} + f_{n-2-k}) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot i^k \cdot f_{n-k} = f_{n+mi} \therefore f_{n+mi} = f_{(n-1)+mi} + f_{(n-2)+mi}$. Por outro lado, na definição 3, o MF é apresentado com duas variáveis m e n.

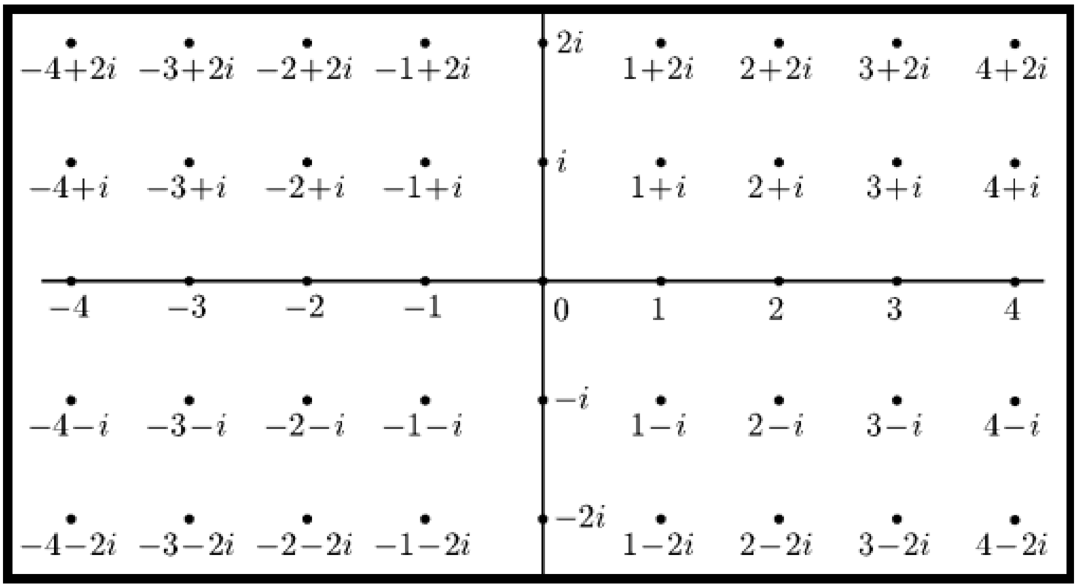

Figura 2. Descrição geométrica de um conjunto que impulsionou o interesse pelas representações dos números de Fibonacci no plano.
Fonte: Conway & Smith (2003, p. 15).

Doravante, a partir da definição 3, serão discutidas, de modo pormenorizado, determinadas propriedades costumeiramente não explicitadas em artigos científicos em Matemática Pura. Nesse caso, as relações de recorrência são ditas bidimensionais (Harman, 1981) e possibilitam a determinação de certas identidades com uma interpretaçao geométrica discutida por este autor, pela primeira vez na década de 90, do século XX.

Logo em seguida, serão enunciados e demonstrados alguns resultados primordiais para a discussão e concepção da situação diática, no contexto de investigação histórica, envolvendo os números da forma $G(n,m)$, com n,m inteiros quaisquer condicionados pelas relações recorrentes.

4. Relações recorrentes bidimensionais e propriedades

Nesta seção, *a priori*, serão deduzidos um conjunto de propriedades (lema 1), que designa o teorema 1, oriundo de uma relação recorrente bidimensional investigada por Harman (1981), Oliveira, Alves e Paiva (2017). Desse modo, a partir da definição 3, pode-se verificar o lema e o teorema a seguir.

Lema 1: para os números de Fibonacci da forma G(n, m), valem as seguintes propriedades: $G(n,0)=f_n$, $G(0,m)=f_m i$, $G(n,1)=f_n+f_{n+1}i$ e $G(1,m)=f_{m+1}+f_m i$ (Oliveira, Alves e Paiva, 2017).

Demonstração: para $G(n,0)=f_n$, com origem na relação $G(n+2,m)=G(n+1,m)+$ $+G(n,m)$ e considerando o caso particular $m=0 \therefore G(n+2,0)=G(n+1,0)+G(n,0)$, pelo princípio de indução sobre n, decorre o seguinte comportamento inicial: para $n=0 \therefore G(2,0)=G(1,0)+G(0,0)=1=f_2$. Para outro valor, tem-se que: $n=1 \therefore G(3,0)=G(2,0)$ $+G(1,0)=1+1=2=f_3$. Pelo método de indução matemática, assume-se que $G(n,0)=f_n$ e $G(n+1,0)=f_{n+1}$. Por fim, tendo em vista a relação $G(n+2,0)=G(n+1,0)+G(n,0)=$ $=f_{n+1}+f_n=f_{n+2}$, obtém-se o resultado desejado.

Analogamente, para $G(0,m)=f_m i$, será empregado $n=0$, assim $G(0,m+2)=G(0,m+1)+G(0,m)$ e, para os valores particulares de $m=0$, pode-se ver $G(0,2)=G(0,1)+G(0,0)=1\cdot i=f_2 i$. Pode-se, no seguinte caso, observar que $m=1 \therefore G(0,3)=G(0,2)+G(0,1)=1\cdot i+1\cdot i=2i=f_3 i$. De novo, pelo processo indutivo, são considerados os passos iniciais indutivos, envolvendo a seguinte propriedade $G(0,m)=f_m i$ e $G(0,m+1)=f_{m+1}i$. Por fim, pode-se escrever a seguinte expressão $G(0,m+2)=G(0,m+1)+G(0,m)=f_{m+1}i+f_m i=(f_{m+1}+f_m)i=f_{m+2}i$. Ou seja, vale que $G(0,m+2)=f_{m+2}i$. Assim, segue o resultado desejado por indução matemática.

De modo análogo, pode-se verificar a propriedade $G(n,1)=f_n+f_{n+1}i$, avaliando $G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m)$ para m=1: $G(n+2,1)=G(n+1,1)+G(n,1)$, assim, com $n=0 \therefore G(2,1)=G(1,1)+G(0,1)=1+2i=1i+1(1+i)=f_1.G(0,1)+f_2.G(1,1)$ e $n=1 \therefore G(3,1)=$ $G(2,1)+G(1,1)=2+3i=1i+2(1+i)=f_2.G(0,1)+f_3.G(1,1)$, assumindo pelo passo indutivo

$G(n,1)=G(n-1,1)+G(n-2,1)=f_n+f_{n+1}i$ e $G(n+1,1)=G(n,1)+G(n-1,1)=f_{n+1}+f_{n+2}i$, obtém-se: $G(n+2,1)=G(n+1,1)+G(n,1)=f_{n+1}.G(0,1)+f_{n+2}.G(1,1)=f_{n+2}+f_{n+3}i$.

Semelhantemente, para $G(1,m)=f_{m+1}+f_m i$, considera-se $G(n,m+2)=G(n,m+1)+$ $+G(n,m)$ para n=1: $G(1,m+2)=G(1,m+1)+G(1,m)$, desse modo, pode-se escrever $m=0\therefore G(1,2)=G(1,1)+G(1,0)=2+i=f_3+f_2 i$ e $m=1\therefore G(1,3)=G(1,2)+G(1,1)=3+2i=f_4+f_3 i$. Assumindo, por indução matemática $G(1,m)=G(1,m-1)+G(1,m-2)=f_{m+1}+f_m i$ e $G(1,m+1)=G(1,m)+G(1,m-1)=f_{m+2}+f_{m+1}i$, logo, determina-se $G(1,m+2)=G(1,m+1)+$ $+G(1,m)=f_{m+3}i+f_{m+2}i$.

Teorema 1: Os números $G(n,m)$ são descritos por $G(n,m)=f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m\cdot i$, para dois inteiros n,m (Oliveira, Alves e Paiva, 2017).

Demonstração: Considerando o lema 1 e a relação recorrente $G(n,m+2)=G(n,m+1)+G(n,m)$, será avaliado $m=0\therefore G(n,2)=G(n,1)+G(n,0)=$ $=f_n+f_{n+1}i+f_n=2\cdot f_n+1\cdot f_{n+1}i=f_n\cdot f_3+f_{n+1}\cdot f_2 i$. E, de modo similar, pode-se ver também $m=1\therefore G(n,3)=G(n,2)+G(n,1)=2f_n+f_{n+1}i+f_n+f_{n+1}i=3f_n+2f_{n+1}i=f_n\cdot f_4+f_{n+1}\cdot f_3 i$. E, por indução sobre 'm', tem-se $G(n,m)=f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m\cdot i$ e $G(n,m+1)=f_n f_{m+2}+f_{n+1}f_{m+1}\cdot i$. Finalmente, determina-se $G(n,m+2)=G(n,m+1)+G(n,m)=f_n f_{m+2}+f_{n+1}f_{m+1}\cdot i+f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m\cdot i=$ $=f_n(f_{m+2}+f_{m+1})+f_{n+1}(f_{m+1}+f_m)\cdot i=f_n f_{m+3}+f_{n+1}f_{m+2}\cdot i$, isto é, $G(n,m+2)=f_n f_{m+3}+f_{n+1}f_{m+2}\cdot i$.

O corolário seguinte permite uma descrição de recorrência bidimensional para os números $G(n,m)$ em função da fórmula de Binnet, costumeiramente, indicada por $f_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ (para 'n' natural), descoberta pelo matemático francês, em 1843, Jacques-Phillipe Marie Binnet (1786 – 1856). Entretanto, Koshy (2007, p. 136) observa que, já em 1718, era empregada pelo matemático francês Abraham De Moivre (1667–1754) (Tattersall, 2005, p. 30). Todavia, por intermédio de métodos inovadores, que envolviam o uso de funções geradoras, Koshy (2007, p. 137) acentua ainda o trabalho independente do matemático e engenheiro francês Gabriel Lamé (1795 – 1870), no ano de 1844, tendo em vista a obtenção da mesma fórmula.

Corolário 1: Os números $G(n,m)$ são descritos, em função da fórmula de Binnet, por: $G(n,m)=\dfrac{(\alpha^{n+m+1}+\beta^{n+m+1})(1+i)-\alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i)-\alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2}$, para $n,m\in IN$.

Demonstração: Considerando o teorema 1 e a fórmula de Binnet, conhecida por $f_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, tem-se $G(n,m)=f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m\cdot i=\left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right).\left(\dfrac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)+\left(\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right).\left(\dfrac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right).i$. E, fazendo as contas, determina-se a seguinte fórmula explícita para os termos:

$$G(n,m)=\frac{(\alpha^{n+m+1}+\beta^{n+m+1})(1+i)-\alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i)-\alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2},\ \text{para } n,m\in IN.$$

Assim, o resultado anterior resulta de uma derivação da fórmula de Binnet, para o caso bidimensional. Para concluir, é relevante recordar que na presente secção, foram apresentadas, pormenorizadamente, propriedades relacionadas com os números definidos a partir da relação bidimensional. Assim, podem-se verificar intrínsecas propriedades inerentes aos números presentes na SF. Na próxima seção, serão abordadas algumas situações-problema propostas a fim de se realizar situações didáticas numa perspectiva de investigação historica, capazes de permitir e estimular um entendimento do estudante relativo ao processo de evolução e generalização do modelo de Fibonacci.

5. Situações-problema numa proposta de investigação histórica

Brousseau (2008, p. 55) descreve as situações como recursos que oportunizam uma comunicação didática. Desse modo, Pommer (2013, p. 22) sugere que as situações didáticas sejam propostas através de situações-problema, de maneira que conduzam o desenvolvimento inferencial do estudante durante a elaboração, partindo de seus conhecimentos prévios, de estratégias de soluções. Assim, neste tópico, será apresentado um conjunto de situações-problema juntamente com uma predição dos possíveis argumentos que os estudantes possam expresar durante a resolução.

Com origem nas propriedades discutidas anteriormente, foram formuladas algumas situações que devem suscitar uma ação investigativa por parte dos alunos (professores em formação inicial), fruto da interação do trinômio professor – estudantes – conhecimento matemático. Todavia, vale recordar algumas identidades (tabela 1) comentadas por Koshy (2001) e que foram descobertas pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891).

Descrição	Identidades unidimensionais de Fibonacci
Soma dos ‘n’ números de Fibonacci de índice par (E. Lucas, 1876).	$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$, para $n \in IN$.
Soma dos ‘n’ números de índice ímpar (E. Lucas, 1876).	$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$, para $n \in IN$.
Soma dos ‘n’ primeiros termos da sequência de Fibonacci (E. Lucas, 1876).	$\sum_{i=1}^{n} f_{i} = f_{n+2} - 1$, para $n \in IN$.
Soma dos ‘n’ primeiros quadrados dos termos da sequência de Fibonacci (E. Lucas, 1876).	$\sum_{i=1}^{n} f_{i}^{2} = f_{n} \cdot f_{n+1}$, para $n \in IN$.

Tabela 1. Identidades elementares envolvendo os números de Fibonacci. Fonte: Koshy (2001).

À vista disso, segue a seguinte situação-problema I: decidir se o conjunto numérico indicado por $G(n,m)$ possui propriedades semelhantes, quando comparado com o seguinte conjunto numérico $\{\ldots, f_{-n}, \ldots, -34, 21, -13, 8, -5, 3, -2, 1, -1,$

$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots,f_n,\ldots\}$. Além disso, pode-se considerar o conjunto $\{\ldots,1+i,2+i,1+2i,3+4i,5+6i,4+3i,10+9i,24+25i,\ldots\}$. Semelhantemente, ao caso da fórmula de Binnet, pode-se determinar uma fórmula explícita para os termos acima, sabendo que são obtidos por intermédio da relação bidimensional descrita por $\begin{cases} G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m) \\ G(n,m+2)=G(n,m+1)+G(n,m) \end{cases}$, com $n,m \in IN$?

Na fase de ação, os alunos devem ser estimulados a determinar/definir os valores iniciais dos elementos $G(n,m)$ a fim de descrever de modo explícito um elemento qualquer da sequência. Os valores iniciais sugeridos para este caso são dados por $G(0,0)=0, G(1,0)=1, G(0,1)=i, G(1,1)=1+i$. Os argumentos do teorema 1 podem ser aplicados. Na fase de formulação, vale assinalar que a fórmula $G(n,m)=f_nf_{m+1}+f_{n+1}f_m\cdot i$ possibilita uma descrição mnemónica combinatória, posto que, tomando como referência a ordem das variáveis (n,m), na posição da primeira variável 'n', o primeiro termo correspondente f_nf_{m+1} possui uma unidade inferior ao índice do termo correspondente a variável 'm'. De modo semelhante, na posição da segunda variável 'm', quando se atém ao termo $f_{n+1}f_m\cdot i$, na variável correspondente, detecta-se uma unidade inferior. Na validação, os alunos podem descrever os números $G(n,m)$, ou seja o teorema 1, em função da fórmula de Binnet $f_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$.

Na situação subsequente, será explorado um raciocínio discutido pela primeira vez por Brousseau (1963), distinguido pela identidade $f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n=(-1)^{n-1}f_n$ que permite a extensão ao conjunto dos inteiros, relativamente ao conjunto de índices. Nesse contexto, tem-se a situação-problema II: considerando essa identidade e o seguinte conjunto $\{-1-i,-6-6i,-2-2i,-5-5i,-i,-1+0i,\ldots\}$, de modo semelhante à situação anterior, decida se é possível determinar uma fórmula explícita para os termos $G(-n,-m)$.

Com origem na situação anterior e, por intermédio da equivalência $f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n=(-1)^{n-1}f_n$, na ação, os estudantes devem ser instigados a determinar os termos do tipo $G(-n,-m)=(-1)^{n+m+1}f_nf_{m-1}+f_{n-1}f_m\cdot i$ que possibilita avaliar os números para quaisquer inteiros. De fato, durante a fase de formulação, com origem no teorema 1, os alunos devem verificar $G(-n,-m)=f_{-n}f_{-m+1}+f_{-n+1}f_{-m}\cdot i=(-1)^{n+1}f_nf_{-(m-1)}+f_{-(n-1)}(-1)^{m+1}f_m\cdot i=(-1)^{n+1}f_n(-1)^mf_{(m-1)}+(-1)^nf_{(n-1)}(-1)^{m+1}f_m\cdot i=$ $=(-1)^{n+m+1}\left(f_nf_{m-1}+f_{n-1}f_m\cdot i\right)=(-1)^{n+m+1}G(m-1,n-1)$. Na validação, vale observar que os números $G(-n,-m)$ podem ser determinados, também, pela seguinte fórmula $G(-n,-m)=\frac{(\alpha^{-n-m+1}+\beta^{-n-m+1})(1+i)-\alpha^{-n}\beta^{-m}(\beta+\alpha i)-\alpha^{-m}\beta^{-n}(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2}$, fazendo a substituição na fórmula de Binnet (corolário 1). Contudo, os alunos devem ser estimulados a investigar e compreender que a identidade $G(-n,-m)=(-1)^{n+m+1}G(n,m)$ não pode ser verificada.

Na situação-problema III, tem-se o seguinte enunciado: sejam as identidades unidimensionais de Fibonacci: $f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$, $f_2+f_4+f_6+\cdots+f_{2n}=f_{2n+1}-1$, $f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{2n-1}=f_{2n}$ e $f_1^2+f_2^2+f_3^2+\cdots+f^2_n=f_n\cdot f_{n+1}$ (tabela 1), verifique se identidades semelhantes podem ser inferidas dos números da forma $G(n,m)$, levando em consideração as relações recorrentes bidimensionais. Durante a resolução, de modo semelhante ao caso das demonstrações das identidades indicadas, os estudantes devem verificar propriedades semelhantes para os números $G(n,m)$ recorrendo às relações bidimensionais (definição 3). Dessa forma, na etapa de ação e formulação, considerando a relação $G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m)$ e fazendo $G(2,m)=G(1,m)+G(0,m)$, segue que:

$$\begin{cases} G(1,m)=G(2,m)-G(0,m) \\ G(3,m)=G(4,m)-G(2,m) \\ G(5,m)=G(6,m)-G(4,m) \\ G(7,m)=G(8,m)-G(6,m) \\ \vdots \\ G(2n+1,m)=G(2n+2,m)-G(2n,m) \end{cases}$$

Após o cancelamento de alguns termos, os alunos devem encontrar $G(1,m)+G(3,m)+G(5,m)+\cdots+G(2n+1,m)=G(2n+2,m)-G(0,m)$ ou $\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m)=G(2n+2,m)-G(0,m)=$ $=f_{2n+2}f_{m+1}+f_{2n+3}f_m\cdot i-f_m\cdot i=f_{2n+2}f_{m+1}+(f_{2n+3}-1)f_m\cdot i$. Ou seja, $\sum_{i=0}^{n}G(2i+1,m)=f_{2n+2}f_{m+1}+(f_{2n+3}-1)f_m\cdot i$.
E, de modo análogo, pode-se verificar para a soma dos termos de índice par não nulo o seguinte:

$$\begin{cases} G(2,m)=G(3,m)-G(1,m) \\ G(4,m)=G(5,m)-G(3,m) \\ G(6,m)=G(7,m)-G(5,m) \\ G(8,m)=G(9,m)-G(7,m) \\ \vdots \\ G(2n,m)=G(2n+1,m)-G(2n-1,m) \end{cases}.$$

Assim, após o cancelamento, tem-se que $\sum_{i=1}^{n}G(2i,m)=G(2n+1,m)-G(1,m)=f_{2n+1}f_{m+1}+f_{2n+2}f_m\cdot i$ $-f_{m+1}-f_m i=f_{2n+1}f_{m+1}-f_{m+1}+(f_{2n+2}f_m-f_m)i$, isto é, $\sum_{i=1}^{n}G(2i,m)=(f_{2n+1}-1)f_{m+1}+(f_{2n+2}-1)f_m i$ que estabelece semelhança com a identidade $f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$. Enquanto que $\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m) = f_{2n+2}f_{m+1} + (f_{2n+3} - 1)f_m \cdot i$ preserva semelhanças em sua dedução com a identidade $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$. Por outro lado, sabe-se que $G(3,m) = G(2,m) + G(1,m) \therefore$ $G(2,m) = G(3,m) - G(1,m)$ e $G(2,m) \cdot G(2,m) = (G(3,m) - G(1,m))G(2,m) = G(2,m)G(3,m) - G(2,m)G(1,m)$. Assim, tem-se que:

$$\begin{cases} G(1,m)^2 = G(1,m)G(2,m) - G(1,m)G(0,m) \\ G(2,m)^2 = G(2,m)G(3,m) - G(2,m)G(1,m) \\ G(3,m)^2 = G(3,m)G(4,m) - G(3,m)G(2,m) \\ G(4,m)^2 = G(4,m)G(5,m) - G(4,m)G(3,m) \\ G(5,m)^2 = G(5,m)G(6,m) - G(5,m)G(4,m) \\ \vdots \\ G(n,m)^2 = G(n,m)G(n+1,m) - G(n,m)G(n-1,m) \end{cases}$$

Mais uma vez, efetuando o cancelamento dos termos adequados, deve seguir que $G(1,m)^2 + G(2,m)^2 + G(3,m)^2 + G(4,m)^2 + \cdots + G(n,m)^2 = G(n,m)G(n+1,m) - G(1,m)G(0,m)$. De modo simplificado, escreve-se a identidade $\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = G(n,m)G(n+1,m) - G(1,m)G(0,m) = [(1 - f_{n+1}.f_{n+2})f_m^2 + f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2] + (-f_m.f_{m+1} + f_m.f_{m+1}.f_{n+1}^2 + f_n.f_{n+2}.f_m.f_{m+1})i$. Por fim, analogamente, os alunos podem determinar que $\sum_{i=1}^{n} G(i,m) = G(n+1,m) + G(n,m) - G(0,m) - G(1,m)$, ou ainda, a seguinte identidade $\sum_{i=1}^{n} G(i,m) = (f_{n+2} - 1)f_{m+1} + (f_{n+3} - 2)f_m i$.

Na fase de validação da situação-problema III, espera-se que os alunos compreendam que existe uma representação bidimensional correspondente às identidades unidimensionais de Fibonacci (tabela 1). Além do mais, eles devem ser estimulados na confrontação dos argumentos utilizados no caso unidimensional, empregado por E. Lucas, com o caso bidimensional. Na última situação, propõe-se a abordagem de algumas propriedades elementares envolvendo o caráter de divisibilidade do somatório dos números Fibonaccianos com os números Gaussianos de Fibonacci.

Nesse sentido, segue a situação-problema IV: afirme ou infirme as seguintes sentenças: (a) a soma dos seis números consecutivos dos numeros complexos de Fibonacci é divisível por 4 e (b) a soma dos dez números consecutivos dos números complexos de Fibonacci é divisível por 11. Durante a resolução desse problema, na etapa de ação, deve-se considerar $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4 \cdot f_{n+4}$. De fato, pode-se ver que

$\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = (f_n + f_{n+1}) + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+5}) = (f_n + f_{n+1}) + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+3} + f_{n+4}) = f_{n+2} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+3} + f_{n+4}) =$
$= 2(f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4}) = 2f_{n+4} + 2f_{n+4} = 4 \cdot f_{n+4}$. Assim, no caso particular, constata-se a validade para a sequência original.

Destarte, considerando a soma $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 \cdot f_{n+6}$, de modo similar, segue a seguinte a soma $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5}) + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+9} = 4f_{n+4} + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+9} =$
$= 4f_{n+4} + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + (f_{n+7} + f_{n+8}) = 4f_{n+4} + f_{n+6} + 2f_{n+7} + 2f_{n+8} = 4f_{n+4} + f_{n+6} + 2 \cdot (f_{n+5} + f_{n+6}) + 2 \cdot (f_{n+6} + f_{n+7}) =$
$= 4f_{n+4} + f_{n+6} + 2 \cdot (f_{n+5} + f_{n+6}) + 2 \cdot (f_{n+6} + f_{n+5} + f_{n+6}) = 4f_{n+4} + 4f_{n+5} + 7f_{n+6}$. E, assim, encontra-se $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 4f_{n+6} + 7f_{n+6} = 11 \cdot f_{n+6}$. Doravante, no momento de formulação, espera-se que os estudantes verifiquem essas identidades unidimensionais para os números $G(n,m)$. Isto é, no caso de $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = G(n,m) + G(n+1,m) + G(n+2,m) + G(n+3,m) + G(n+4,m) +$ $+ G(n+5,m)$, pode-se ver:

$$\begin{cases} G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i \\ G(n+1,m) = f_{n+1} f_{m+1} + f_{n+2} f_m \cdot i \\ G(n+2,m) = f_{n+2} f_{m+1} + f_{n+3} f_m \cdot i \\ G(n+3,m) = f_{n+3} f_{m+1} + f_{n+4} f_m \cdot i \\ G(n+4,m) = f_{n+4} f_{m+1} + f_{n+5} f_m \cdot i \\ G(n+5,m) = f_{n+5} f_{m+1} + f_{n+6} f_m \cdot i \end{cases}$$

Assim, pode-se ter $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = \left(\sum_{i=0}^{5} f_{n+i}\right) \cdot f_{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{6} f_{n+i}\right) \cdot f_m \cdot i = (4 \cdot f_{n+4}) \cdot f_{m+1} + (4 \cdot f_{n+5}) \cdot f_m \cdot i =$
$= 4 \cdot (f_{n+4} \cdot f_{m+1} + f_{n+5} \cdot f_m \cdot i) = 4 \cdot G(n+4,m)$. Além disso, pode-se repetir o argumento anterior, a fim de determinar que:

$$\begin{cases} G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i \\ G(n+1,m) = f_{n+1} f_{m+1} + f_{n+2} f_m \cdot i \\ G(n+2,m) = f_{n+2} f_{m+1} + f_{n+3} f_m \cdot i \\ G(n+3,m) = f_{n+3} f_{m+1} + f_{n+4} f_m \cdot i \\ G(n+4,m) = f_{n+4} f_{m+1} + f_{n+5} f_m \cdot i \\ G(n+5,m) = f_{n+5} f_{m+1} + f_{n+6} f_m \cdot i \\ G(n+6,m) = f_{n+6} f_{m+1} + f_{n+7} f_m \cdot i \\ G(n+7,m) = f_{n+7} f_{m+1} + f_{n+8} f_m \cdot i \\ G(n+8,m) = f_{n+8} f_{m+1} + f_{n+9} f_m \cdot i \\ G(n+9,m) = f_{n+9} f_{m+1} + f_{n+10} f_m \cdot i \end{cases}$$

Colocando em evidência os termos do tipo f_{m+1} e $f_m \cdot i$ e usando a identidade anterior, pode-se deduzir que $\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11 \cdot G(n+6,m)$, $\forall\ m \in IN$. Assim, na fase de validação, é possível compreender veracidade da extensão da identidades unidimensionais relativas à divisibilidade dos somatórios $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4 \cdot f_{n+4}$ e $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 \cdot f_{n+6}$ para os números da forma $G(n,m)$.

Descrição	Identidades unidimensionais	Identidades bidimensionais
Soma dos números de índice par	$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$	$\sum_{i=1}^{n} G(2i,m) = (f_{2n+1} - 1)f_{m+1} + (f_{2n+2} - 1)f_m i$
Soma dos números de índice ímpar	$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$	$\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m) = f_{2n+2}.f_{m+1} + (f_{2n+3} - 1)f_m i$
Soma dos 'n' primeiros números complexos de Fibonacci	$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$	$\sum_{i=1}^{n} G(i,m) = (f_{n+2} - 1)f_{m+1} + (f_{n+3} - 2)f_m i$
Soma dos 'n' primeiros quadrados dos números complexos de Fibonacci	$\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$	$\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = [(1 - f_{n+1} \cdot f_{n+2}) f_m^2 + f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2] + (f_{n+1}^2 + f_n.f_{n+2} - 1)f_m.f_{m+1} i$
Soma dos 6 termos consecutivos é divisível por 4.	$\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$	$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m).$
Soma dos 10 primeiros termos consecutivos é divisível por 11.	$\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$	$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11.G(n+6,m).$

Tabela 2. Identidades uni e bidimensionais oriundas do modelo de Fibonacci.
Fonte: elaboração dos autores.

Finalmente, numa abordagem da institucionalização da TSD, na tabela 2, apresenta-se uma síntese comparativa de alguns dados discutidos a partir das situações-problema propostas aos estudantes. Desse modo, os elementos comparativos e o raciocínio por analogia oportuniza instigar o raciocínio inferencial atinente a um modelo de recorrência tridimensional para os números complexos de Fibonacci, isto é, os números da forma $G(n,m,p)$. À vista disso, numa perspectiva epistemológica, pode-se compreender que o modelo de Fibonacci passa por um processo de generalização que, no contexto dessas situações didáticas, é estudado através das relações recorrentes bidimensionais a partir da sequência original Fibonacciana com a finalidade de explorar o aumento dimensional do Modelo de Fibonacci e, com isso, caracterizando uma evolução na sua estrutura matemática reconhecida no contexto de investigação histórica.

Considerações finais

Neste trabalho, foi apresentada uma proposta didática de investigação histórica concernentemente a um conceito que, de modo geral, não se mostra discutido pelos autores de livros de História da Matemática. Assim, com arrimo de algumas propriedades e consequências do teorema 1, que proporciona uma fórmula explicita para os números da forma $G(n,m)$, foi derivado sua definição para índices inteiros quaisquer e, a partir de um raciocínio análogo, empregado na determinação de identidades clássicas (tabela 2) oriundas da sequência de Fibonacci.

Ademais, na forma complexa de Fibonacci, os números da forma $f_n + f_{n+1}i$ admitem propriedades que podem ser comparadas/confrontadas com os elementos indicados no teorema 1, que são designadas por $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i$ e $G(-n,-m) = (-1)^{n+m+1} G(m-1,n-1)$. E, nesse caso, a fórmula variante de Binnet, possibilita as descrições generalizadas: $G(n,m) = \dfrac{(\alpha^{n+m+1} + \beta^{n+m+1})(1+i) - \alpha^n \beta^m (\beta + \alpha i) - \alpha^m \beta^n (\alpha + \beta i)}{(\alpha - \beta)^2}$ e

$$G(-n,-m) = \frac{(\alpha^{-n-m+1} + \beta^{-n-m+1})(1+i) - \alpha^{-n}\beta^{-m}(\beta + \alpha i) - \alpha^{-m}\beta^{-n}(\alpha + \beta i)}{(\alpha - \beta)^2}, n,m < 0 .$$

A prática profissional quanto a pesquisas na Didática da Matemática, que poderá ser perseguida em futuras investigações, possibilita o estudo de relações generalizadas de recorrência tridimensional, $G(n,m,p) = f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j$ (Oliveira, Alves e Paiva, 2017), visando uma representação n-dimensional para os números de Fibonacci (Horadam & Phete, 1986; Horadam, 1999). Por exemplo, os números da forma $G(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n)$, com relações de recorrência semelhantes ao caso de Fibonacci e valores iniciais convenientemente escolhidos, devem gozar da seguinte propriedade generalizada $\sum_{i=1}^{n} G(i, m_2, m_3, \ldots, m_n) = G(m_1 + 2, m_2, m_3, \ldots, m_n)$ $- G(0, m_2, m_3, \ldots, m_n) - G(1, m_2, m_3, \ldots, m_n)$ e, semelhantemente ao teorema 1, a forma generalizada (n-dimensional) será descrita como $G(m_1,m_2,m_3,\ldots,m_n)=(f_{m_1}f_{m_2+1}\cdots f_{m_{n-1}+1}f_{m_n+1})$ $+(f_{m_1+1}f_{m_2}\cdots f_{m_{n-1}+1}f_{m_n+1})e_1+\cdots+(f_{m_1+1}f_{m_2+1}\cdots f_{m_{n-1}+1}f_{m_n})e_t$ considerando as seguintes unidades imaginárias $(e_1=i,e_2=j,e_3=k,\ldots,e_t)$.

Por fim, ao longo do trabalho, buscou-se propor elementos capazes de suscitar nos estudantes (futuros professores), uma percepção não estática (descrição de um conjunto de três definições formais) do modelo de Fibonacci que preserva, séculos e séculos de sua proposição em forma de problema, o interesse de especialista no âmbito da pesquisa em Matemática Pura (Catarino & Vasco, 2013; Catarino, 2014; 2016). E, através de uma transposição didática, no contexto da Didática da Matemática, oportunizar a formação de uma concepção epistemológica sobre a História da Matemática.

Por fim, a perspectiva da investigação histórica apresentada neste trabalho, envolveu um estudo de um artigo científico (Harman, 1981), em Matemática Pura que, de modo padrão, apresenta e discute dados parciais e com poucos pormenores, característicos de um estilo científico e que comunica informações para um determinado grupo de especialistas que possuíam o interesse na referida temática, nos anos 70 e 80, do século XX. Dessa forma, pode-se proporcionar aos estudantes (professores em formação) um entendimento sobre o processo evolutivo atual da pesquisa em torno do modelo de Fibonacci, na medida em que se busca propor atividades de investigação que desenvolvem um trato pormenorizado de alguns argumentos e algumas demonstrações.

Bibliografía

Abbagnano, N. (1998). *Dicionário de filosofia.* 2. ed. São Paulo: Martins Fontes.

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* Curitiba: UFPR.

Alves, F. R. V. (2017). Fórmula de de moivre, ou de binet ou de lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de fibonacci – SGF. *Revista Brasileira de Historia da Matemática*. v. 17, nº 33, 1 – 16. Acesso em 12 de agosto de 2017 em http://www.rbhm.org.br/vo17-no33.html

Alves, F. R. V. (2016a). Sequência Generalizada de Pell: aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. *Revista THEMA*, 13(2), 1 – 22. *[*en línea]. Acesso em 12 de agosto de 2016 em http://revistathema.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/324

Alves, F. R. V. (2016b). Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. *Boletim GEPEM*, 68(1), 1 – 5. *[*en línea], 29. Acesso em 12 de agosto de 2016 em http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=view&path[]=198

Alves, F.R.V. (2016c). Teoria das Situações Didáticas (TSD): sobre o ensino de pontos extremantes de funções com arrimo da tecnologia. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco*, v. 5, n. 2, p. 59-68.

Alves, F. R. V. (2016d). Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educ.,* Paranaíba, v.7, n. 21, p.131-150.

Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. (2016). A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. *Revista Thema,* v. 14, n. 2, p. 112-136.

Artigue, M. (2009). Didactical Design In Mathematics Education. to appear in C. Winsløw (ed.) *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08.* Sense Publ.

Berzsenyi, G. (1977). Gaussian Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* 15. p. 233–236.

Brother, U. A. (1965). *Introduction fo Fibonacci Discovery*. California: Santa Clara University.

Brousseau, A. B. (1963). Exploring Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* v. 1, n. 1, p. 57 – 64.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), La problématique et l'enseignement de la mathématiques. *Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.* Louvain-la-Neuve, p. 101-117.

Brousseau, G. (2008). *Conteúdos e Métodos de Ensino.* In: SILVA, Benedito Antônio da. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas*. Tradução de: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 128 p.

Catarino, P. M. C. (2014). On some identities for k-Fibonacci Sequence. *International Journal Contemporary Mathematical Science*. 9(1), 37 – 42.

Catarino, P. M. C. (2016). The h(x)-Fibonacci Quaternion Polynomials: Some combinatorial properties. *Advanced Applied Clifford Algebra, 26*(1), 71–79.

Catarino, P. M. C, Vasco, P. (2013). Some basic properties and a two-by-two matrix involving the k-Pell numbers. *International Journal of Mathematical Analysis*. 7(45), 2209 – 2215.

Conway, John. H. & Smith, Derek. A. (2003). *On quaternions and Octonions: their geometry, arithmetic and symmetry*. London: A. K. Peters.

Doré, Andréa. (2000). Diplomacia e relações comerciais entre o Oriente e o Ocidente: duas experiências do século XIII. *Tempo.* Rio de Janeiro, n. 10, p. 137-158.

Estrada, et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Eves, Howard. (1969). *An introduction to the History of Mathematics*. Third edition. New York: Holt, Hinehart and Winston.

Harman, C. J. (1981). Complex Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v. 19, n. 1, p. 82 – 87.

Herz, F. R. (1998). *A mathematical history of Golden Number*. New York: Dover Publications Inc.

Horadam, A. F; Phete, S. (1986). Euclidean coordinates as generalized Fibonacci products. *The Fibonacci Quarterly*, 24(4), 366 – 371.

Horadam, A. F. (1999). Quaternion Recurrence relations. *Ulam Quarterly*, 2(2), 21 – 33.

Jordan, J. H. (1965). Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* v. 3, n. 4, p. 315–318.

King, C. (1963). Leonardo Fibonacci. *The Fibonacci Quarterly,* v. 1, n. 4, p. 15–19.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Appllications*. New York: Wiley and Sons publications.

Koshy. T. (2007). *Elementary Number Theory and Applications.* second edition, Boston: Elselvier.

Oliveira, R. R.; Alves, F. R. V.; Paiva, R. E. B. (2017). Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. *REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA,* v. 11ic, p. 91-106.

Pais, L. C. (2002). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Pommer, W. M. (2008). Brousseau e a idéia de Situação Didática. *SEMA – Seminários de Ensino de Matemática / FEUSP – 2º Semestre.* Coordenação: Prof. Dr. Nilson José Machado. Acesso em 02 de outubro de 2017 em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf

Pommer, W. M. (2013). *A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.* São Paulo, 2013. Acesso em 03 de março de 2017 em: http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf

Tattersall, J. J. (2005). *Elementary Number Theory in Nine chapters*. Cambridge: Cambridge University Press.

Teixeira, P. J. M.; Passos, C. C. M. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *Zetetiké,* FE/Unicamp, v. 21, n. 39, p. 155-168.

Autores:

Francisco Regis Vieira Alves. Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM – IFCE). Fortaleza/Brasil. fregis@gmx.fr

Rannyelly Rodrigues de Oliveira. Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM – IFCE). Fortaleza/Brasil. nanny-rockstar@hotmail.com