REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 53. Agosto 2018
Páginas 183-189

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Situaciones, problemas y "problemas inversos"

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Jessica tiene dos láminas rectangulares de cartulina, cuyas dimensiones son 80 cm por 60 cm y 60 cm por 40 cm. Ella ha creado un problema construyendo figuras planas (no necesariamente convexas) uniendo ambas láminas. Daniel ha visto que Jessica ha obtenido la función f *dada por* $f(x) = 480 - 2x$*. ¿Qué puede expresar esta función en la figura que construyó Jessica? ¿Cuál podría ser el problema?*

Este problema surgió en un taller con profesores de matemática en ejercicio, sobre creación de problemas por *elaboración*; es decir, a partir de situaciones reales o configuradas. La elaboración del problema era completamente libre, sin pensar aún en qué grado se podría usar. Una de las situaciones fue:

> "Se dispone de dos láminas rectangulares de cartulina, cuyas dimensiones, en centímetros, son 80 por 60 y 60 por 40."

Es muy importante que los profesores e investigadores identifiquemos situaciones reales, o las configuremos adecuadamente, para que sean puntos de partida para la identificación, creación y resolución de problemas de matemáticas. Una vez creado un problema, en una clase-taller o en una investigación, el profesor o investigador tiene algunas tareas importantes: comprender la idea fundamental pretendida en el problema, examinar su consistencia matemática, resolverlo, examinar su potencial didáctico-matemático, afinar la redacción, y crear nuevos problemas a partir de él.

En la creación de nuevos problemas, juega papel importante la idea de crear "*problemas inversos*", que básicamente son los que se formulan, *grosso modo,* intercambiando el requerimiento y la información del problema inicial. Ciertamente, debe tenerse en cuenta la estructura del problema inicialmente creado, y las soluciones de este. Por ejemplo, si en un problema el requerimiento es encontrar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, teniendo como información las ecuaciones de las rectas, entonces un problema inverso puede ser que, teniendo como información las coordenadas de un punto del plano, el requerimiento sea encontrar ecuaciones de dos rectas cuya intersección es ese punto. Así, se usa el requerimiento obtenido del problema inicial como base para obtener información para el nuevo problema, parecida a la del problema inicial; y se usa la información del problema inicial para construir el requerimiento del nuevo problema. Eventualmente, pueden hacerse modificaciones al contexto y ampliaciones al entorno matemático.

Ante la situación dada, y trabajando en grupos formados por parejas de participantes, surgieron problemas como los siguientes:

Problema 1.

Se dispone de dos láminas rectangulares de cartulina, cuyas dimensiones, en centímetros, son 80 por 60 y 60 por 40.
¿Cuál es el menor número de cortes que es necesario hacer para obtener tres láminas rectangulares que tengan la misma área?

Problema 2.

Usando dos láminas rectangulares, una de 80 cm por 60 cm y otra de 60 cm por 40 cm, se debe construir tarjetas cuadradas del mismo tamaño y que tengan la mayor área posible, sin desperdiciar material. ¿Cuántas de tales tarjetas se pueden construir?

Problema 3.

Calcular el volumen del cilindro circular recto que se puede construir usando dos láminas rectangulares, una de 80 cm por 60 cm y otra de 60 cm por 40 cm

Problema 4.

Se dispone de dos láminas rectangulares de cartulina, cuyas dimensiones, en centímetros, son 80 por 60 y 60 por 40.
Calcular los perímetros de las figuras planas que se pueden construir pegando un lado completo de una de las láminas a un lado de la otra lámina.

Al socializar el Problema 1, creado por una pareja, otras parejas lo encontraron muy "sencillo". Como la lámina de 80cm por 60cm es el doble de la lámina pequeña, basta hacer un corte en la lámina grande, paralelo al lado más pequeño y a 40 cm de este. Así se obtienen tres láminas rectangulares de 60 cm por 40 cm. Entonces sugerí que pensaran en modificar el problema, tratando de construir un "problema inverso". La idea global en el Problema 1 es tener dos rectángulos (esta es la información) y obtener mediante el menor número de trazos lineales, tres rectángulos de la misma área (este es el requerimiento). La solución es hacer un solo trazo lineal (un corte a la lámina más grande). Entonces, para construir "problemas inversos" de este Problema 1, podría tomarse como información que ya se obtuvo, mediante un corte, las tres láminas rectangulares de la misma área (un caso particular puede ser láminas rectangulares del mismo tamaño) y como requerimiento, determinar las dimensiones de las láminas que se cortaron.

Así, el primer "problema inverso" que surgió fue:

Tengo dos láminas rectangulares y al hacer un corte a una de ellas obtengo tres láminas rectangulares del mismo tamaño. ¿Cuáles son las dimensiones de las láminas?

Ante este "problema inverso" del Problema 1, el comentario fue que es muy sencillo y que lo nuevo es que tiene muchas respuestas correctas, pues basta dar las dimensiones de un rectángulo cualquiera y el otro resulta duplicando una de estas dimensiones.

Luego de intercambiar ideas y de hacer algunas propuestas de otros problemas, llegamos al siguiente problema:

Problema 1-inverso

Se tienen dos láminas rectangulares de diferentes dimensiones y una de ellas tiene 50 cm de largo. Al hacer un corte en una de ellas, se obtiene tres láminas rectangulares del mismo tamaño.

i) *Dar tres ejemplos de las dimensiones de tales láminas.*
ii) *¿Es verdad que las láminas rectangulares iniciales tienen que ser figuras semejantes entre sí? ¿Por qué?*

La parte (i) de este problema también tiene infinitas soluciones, con la restricción de estar ya dada una de las dimensiones. Resultan interesantes soluciones considerando que el largo de 50 cm puede ser de la lámina grande o de la lámina pequeña. La parte (ii) lleva a examinar la semejanza entre rectángulos y a mostrar casos en los que las láminas rectangulares iniciales no son semejantes entre sí, como contraejemplos a la consideración de una respuesta afirmativa a la pregunta. Por otra parte, es posible, matemáticamente, que las láminas iniciales sean rectángulos semejantes. La alusión a "matemáticamente", es porque una de las dimensiones resultaría un número irracional. Así, las láminas podrían ser de dimensiones a y b una de ellas y de dimensiones b y $a/2$ la otra, como mostramos en la Figura 1.

Figura 1

Para que se cumpla la semejanza entre los rectángulos, debe ocurrir que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}$$

Así, $\frac{a^2}{2} = b^2$ y considerando el carácter positivo de estas variables, tenemos

$$a = b\sqrt{2}.$$

Con esta expresión, podemos dar infinitos ejemplos de dimensiones de rectángulos semejantes, tales que al "cortar" el más grande por la mitad, se obtienen tres rectángulos del mismo tamaño. En la Figura 2, ilustramos uno de tales casos:

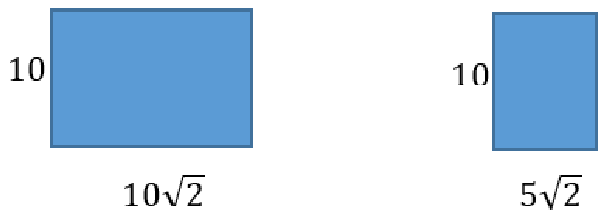

Figura 2

Podemos percibir la riqueza didáctico-matemática de este problema.

Un problema inverso para el Problema 2 puede ser:

Problema 2-inverso.

> *Las dimensiones, en metros, de dos patios rectangulares de un colegio, son a por b y c por d. Se sabe que ambos patios han sido cubiertos totalmente con baldosas de 40 cm por 40 cm, sin necesidad de partir baldosa alguna.*
>
> *i)* *Escribe posibles dimensiones de los patios.*
>
> *ii)* *¿Es posible que las dimensiones de los patios sean tales que los rectángulos correspondientes sean semejantes entre sí? ¿Por qué?*

La parte (i) parece más sencilla que el Problema 2, pero su novedad está en el uso de variables y el tener que asignarle valores verosímiles, en el contexto del problema. Así, si bien es posible que un rectángulo sea, por ejemplo, de 1,20 m de ancho y 1,60 m de largo, esto no correspondería a un patio de un centro educativo.

La parte (ii) requiere una mayor demanda cognitiva, pues aun usando el ensayo y error, se debe tener claridad sobre lo que significa que dos rectángulos sean semejantes y su relación con las propiedades de las proporciones y las fracciones. Todo esto, sin descuidar lo anotado al referirnos a (i), respecto a la verosimilitud de las dimensiones.

Dejamos como entretenimiento para el lector elaborar "problemas inversos" para el Problema 3.

En cuanto al Problema 4, en la Figura 3 representamos las láminas. Es importante advertir que solo se puede pegar completamente el lado que mide 40 cm o el lado que mide 60 cm. En cualquiera de los casos, las partes que se pegan no intervienen como sumandos para obtener el perímetro.

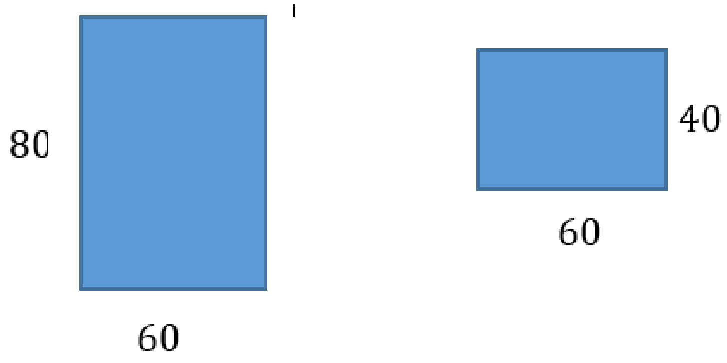

Figura 3

Por ejemplo, si se pega completamente el lado de 40 cm (Figura 4), sin importar en qué parte de un lado de la lámina rectangular grande, el perímetro del polígono no convexo que se forme será la suma de los perímetros de ambas láminas (480 cm), menos dos veces 40 cm (la parte pegada); es decir, 480 cm – 2x40 cm.

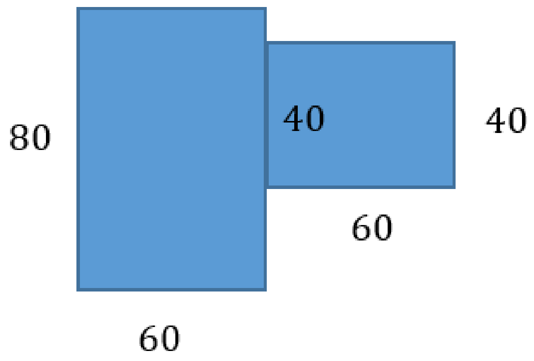

Figura 4

Así, el perímetro del polígono no convexo que se muestra, es 400 cm.

Similarmente, si se pega completamente el lado de 60 cm, sin importar en qué parte de un lado de la lámina rectangular grande, el perímetro del polígono – convexo o no convexo – que se forme, será la suma de los perímetros de ambas láminas (480 cm), menos dos veces 60 cm (la parte pegada); es decir,

480 cm – 2x60 cm = 360 cm.

Entonces, los dos únicos perímetros posibles son 400 cm y 360 cm.

Pensando en un problema inverso del Problema 4.

Al resolver el Problema 4, vemos que los perímetros se obtienen restando al perímetro total (480), en un caso dos veces 40, y en el otro dos veces 60. Así, podemos decir que los perímetros se obtienen asignando los valores 40 y 60, respectivamente, a la variable x en la función $\boldsymbol{f}$ dada por

$$\boldsymbol{f(x) = 480 - 2x}.$$

Teniendo esta expresión funcional del perímetro del polígono resultante al pegar las láminas, cabe preguntarse por la interpretación geométrica (figural) cuando a x se le da otros valores. Ciertamente, en el contexto estricto del problema, solo puede tomar los valores 40 y 60; pero en una perspectiva más amplia, sin restringirse a que las láminas se peguen solamente uniendo totalmente uno de los lados de uno de los rectángulos, x podría tomar valores en el intervalo [0; 60], pues x = 0 correspondería a un polígono no convexo formado por los dos rectángulos teniendo en común un vértice de uno de ellos (se muestra un caso en la Fig. 5); y x = 60 correspondería al polígono formado por los dos rectángulos, teniendo en común un lado de longitud 60 (mostramos un caso en la Fig. 6).

Los valores intermedios entre 0 y 60 corresponderían a los diversos polígonos no convexos formados por los dos rectángulos, teniendo en común un segmento de longitud x (mostramos un caso en la Fig.7).

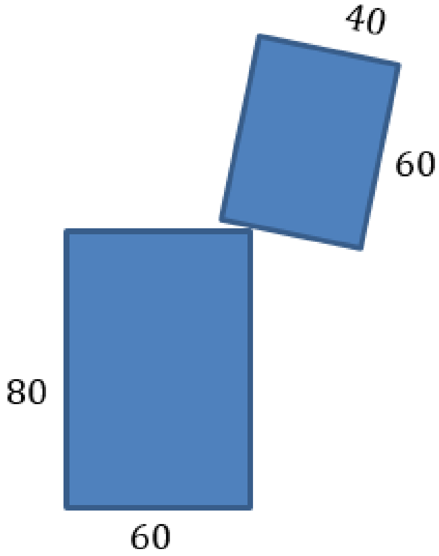

Figura 5. Cuando $x = 0$

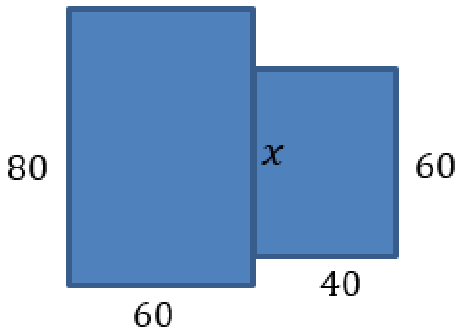

Figura 6. Cuando $x = 60$

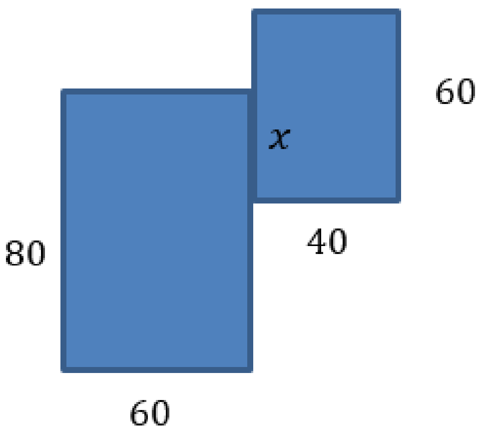

Figura 7. Cuando $x \in]0; 60[$

Luego de este análisis, hecho a partir de la estructura del Problema 4 y de las ideas fundamentales en su solución, resulta natural plantearse, como un problema inverso al Problema 4, el que se presenta al inicio de este artículo. Tal problema tiene, además de la interpretación de la función f, el requerimiento de imaginar un problema usando tal función, entonces, puede considerarse las restricciones de esta función a dominios discretos, los gráficos correspondientes, la consideración de valores óptimos, etc.

Comentarios

1. La creación de problemas inversos es también una forma de crear problemas por *variación*; es decir, a partir de problemas dados; pero las experiencias desarrolladas nos muestran que hay una mayor motivación cuando esos problemas son ya el resultado de la *elaboración*, a partir de una situación dada.
2. Crear problemas siempre es un reto a la creatividad, pero cuantos mayores sean los conocimientos y las competencias didáctico-matemáticas de los profesores, habrá mayores posibilidades de crear problemas que tengan más riqueza matemática y didáctica.
3. La creación de problemas inversos va más allá de la creación de problemas mediante modificaciones cuantitativas de la información o del requerimiento de un problema dado. Las experiencias tenidas en clases y en talleres, con matemática básica y con matemática avanzada, nos muestran la riqueza matemática y didáctica que se presenta en las reflexiones que suscitan el proceso de creación de problemas inversos; más aún, cuando el problema inicial proviene ya de la creación de un problema, a partir de una situación dada.
4. En los cuatro problemas mostrados, creados a partir de la situación dada; y en los problemas inversos creados a partir de ellos, se han hecho intervenir conceptos como perímetros y áreas de polígonos, semejanza de figuras planas, proporcionalidad, números irracionales, máximo común divisor, volumen de figuras tridimensionales, funciones, funciones afines, etc. El lector puede encontrar nuevos problemas y problemas inversos, interrelacionando de manera diferente estos conceptos o haciendo intervenir otros, ya sea libremente o con objetivos específicos para su uso en el estímulo del pensamiento matemático en clases, en evaluaciones, o en investigaciones.