UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 115-121

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Sistemas lineales y "problemas inversos"

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Crea un problema a partir de la siguiente situación:

Paco tiene cierta cantidad de monedas, solo de dos denominaciones.

El problema debe ser tal que se resuelva usando un sistema de dos ecuaciones lineales y que su solución sea que Paco tiene 9 monedas de la denominación mayor y 15 monedas de la denominación menor.

Este problema surgió de un taller con estudiantes de profesorado de matemática, en un curso en la Facultad de Educación. En este artículo se explicitan las actividades previas y se muestran las potencialidades didácticas y matemáticas al desarrollarlas, teniendo como marco la creación de problemas en los procesos de aprendizaje de las ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Se puede percibir, que se pide la creación de un "problema inverso", pues ya se sabe cuál debe ser la respuesta. Ya me referí a la creación de "problemas inversos" en el artículo del número anterior. En este caso, la tarea es usar la situación para construir un problema en el contexto extra matemático descrito, de modo que se resuelva usando un sistema de ecuaciones lineales y que, al resolverlo, una de las variables tenga el valor 9 y la otra el valor 15. En un contexto intra matemático, se trata de construir un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea, digamos, el par ordenado (9; 15). Poner el contexto extra matemático conlleva una mayor reflexión; por una parte, por el cuidado que se debe tener con la coherencia entre las expresiones verbales y las algebraicas que correspondan al contexto, y por otra, por el adecuado fraseo, para la claridad del enunciado.

A continuación, describimos las actividades previas para proponer este problema. Cabe mencionar que los participantes del taller tienen entre sus conocimientos previos que las ecuaciones de la forma $ax + by = K$, con a, b y K números reales cualesquiera, tienen como representación geométrica a una recta, con la única restricción que a y b no pueden ser ambos iguales a cero (Esto solo podría ser si K = 0 y tendríamos 0 = 0 para todos los valores de x y de y):

Actividad 1: Graficar dos ecuaciones lineales con dos variables, ambas en un mismo plano cartesiano.

Pedir la construcción de sistemas que correspondan a rectas

i) Que se intersequen en un punto

ii) Que se intersequen en más de un punto
iii) Que no se intersequen.

Actividad 2. Reconocer expresiones verbales cuya expresión algebraica es una ecuación lineal con dos variables.

Actividad 3. Dadas diversas situaciones, en contextos extra matemáticos, encontrar expresiones verbales relacionadas con tal situación, cuyas formalizaciones algebraicas sean ecuaciones lineales con dos variables.

Actividad 4. Dada una ecuación lineal de dos variables, encontrar enunciados verbales correspondientes a contextos extra matemáticos, cuya expresión algebraica sea la ecuación dada.

Actividad 5. Dado un par ordenado de números reales, encontrar sistemas de dos o más ecuaciones cuya solución sea el par ordenado dado.

Actividad 6. Dada una situación de contexto extra matemático, y un par ordenado de números reales, crear un problema en tal contexto, cuya solución sea tal par ordenado.

Ejemplos y comentarios

A continuación, daré algunos ejemplos o comentarios sobre las experiencias didácticas, poniendo énfasis en las actividades más directamente vinculadas con la creación de problemas.

Sobre la *Actividad 1*:

Lo que más llamó la atención de los participantes fue el pedido de dos ecuaciones lineales cuyas gráficas se intersequen en más de un punto. A continuación, algunas expresiones:

- *Eso es imposible.*
- *Claro, dos rectas se cortan solo en un punto.*
- *O en ningún punto, cuando son paralelas*.

La pregunta ¿qué pasaría si dos rectas tuvieran dos puntos en común? los llevó a concluir que se trataría de la misma recta y a partir de eso, luego de reflexionar en sus grupos de trabajo, propusieron sistemas lineales como

$$2x + 3y = 12$$
$$4x + 6y = 24$$

O un sistema, con menor evidencia de la proporcionalidad directa de los coeficientes y del término independiente, como

$$6x - 10y = 8$$
$$9x - 15y = 12$$

Sobre la *Actividad 2*:

Algunas expresiones verbales para analizar si corresponden o no a una ecuación lineal con dos variables:

- *El producto de dos números es 12*
- *La suma de dos números es 10*

- *Por 3 kilos de papas y 4 kilos de arroz, se pagó 23,30 soles.*
- *Solo con billetes de 20 soles y de 50 soles, Carlos tiene 590 soles*
- *El perímetro de un terreno rectangular es 190 metros.*

Sobre la *Actividad 3*:

Algunas situaciones en contextos extra matemáticos, a partir de las cuales se pidió encontrar expresiones verbales que se puedan formalizar como una ecuación lineal con dos variables.

a) Niños y adultos que ingresan a un teatro, pagando entradas diferentes
b) En una tienda venden triciclos y bicicletas
c) En una bodega se venden botellas de yogurt y botellas de jugo y tienen precios diferentes.

Esta actividad no fue fácil, pero finalmente hicieron sus propuestas. Por ejemplo, a partir de (a) propusieron:

a1) El total de personas que ingresó al teatro, entre niños y adultos, fue 120

a2) Para ingresar al teatro, los niños pagaron 6 soles y los adultos 10 soles, y en total en la boletería recibieron 680 soles

a3) Los niños pagan 4 soles y los adultos 10 soles, pero la boletería habría recibido la misma cantidad de dinero si el precio de entrada para niños se reduce a la mitad y el precio de entrada de adultos se aumenta en la mitad.

Hubo una marcada tendencia a crear problemas, pero la idea no era esa; sin embargo, dejé libertad a que propongan algunos problemas; así, considerando a1 y a2 quisieron determinar el número de niños y de adultos. Al obtener un valor negativo para una de las variables, tomaron conciencia que al crear un problema hay que tener sumo cuidado al establecer las condiciones (la información) en el problema.

Sobre la *Actividad 4*:

Dada una ecuación, se tenía que encontrar expresiones verbales cuya formalización sea esa ecuación.

- Se partió de la ecuación

$$4x + 3y = 32$$

y se pidió encontrar algún contexto extra matemático en el cual la ecuación tenga sentido. Ante el silencio, propuse considerar la compra de dos productos en una bodega. Surgió entonces la expresión verbal:

> *Se compra x botellas de jugo a 4 soles cada una y y paquetes de galletas a 3 soles cada uno, y en total se paga 32 soles.*

Que, efectivamente, al formalizarla, se obtiene la ecuación dada. Luego tomó la forma más coloquial de

> *Se compra cierta cantidad de botellas de jugo a 4 soles cada una y también cierta cantidad de paquetes de galletas a 3 soles cada uno, y en total se paga 32 soles.*

Otro contexto para la misma ecuación: "autos, triciclos y número de ruedas"

Surgió la expresión verbal:

> En una *tienda de venta de carros y triciclos para niños, en total hay 32 ruedas colocadas.*

Se aclaró que debe entenderse que cada carro tiene 4 ruedas colocadas y cada triciclo 3 ruedas colocadas.

- Otra ecuación de partida:

$$5\,x - 3y \;=\; 40$$

Surgió la siguiente expresión verbal:

> *La diferencia de lo que se pagaría por cierta cantidad de piñas, a 5 soles cada una y lo que se pagaría por cierta cantidad de papayas a 3 soles cada una, es 40 soles.*

Una ecuación equivalente a la dada, llevó también a una expresión equivalente del enunciado anterior.

Ecuación equivalente:

$$5\,x = \;3y + \;40$$

Expresión verbal:

> *Por cierta cantidad de piñas a 5 soles cada una, pagué lo mismo que habría pagado por cierta cantidad de papayas a 3 soles cada una, más 40 soles.*

Sobre la *Actividad 5*:

En esta actividad estuvieron cinco estudiantes de profesorado de matemáticas. Pedí que cada uno diga en voz alta dos números reales entre −9 y 9. Los fui anotando en la pizarra, dividida en cinco franjas verticales. Luego di forma de pares ordenados a cada par de números escritos en cada franja de la pizarra y pedí a los estudiantes que cada uno, individualmente o comunicándose con un(a) compañero(a) escriba un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución sea el par ordenado formado con los números que él (o ella) dio.

Al inicio hubo cierto desconcierto, pero pronto reaccionaron favorablemente y cada estudiante hizo lo pedido y explicó cómo obtuvo el sistema que mostró. Entonces pedí que cada uno escriba otro sistema de dos ecuaciones, que también tenga como solución el mismo par ordenado. En la Figura 1, mostramos el trabajo personal de una de las alumnas, para obtener sus dos sistemas lineales con dos incógnitas, cuya solución es el par ordenado (5; −2).

Como se puede observar, esencialmente escribe de manera arbitraria la parte algebraica de cada ecuación del sistema y para obtener el término constante de cada ecuación, reemplaza en cada expresión algebraica los valores de x y de y (en este caso x =5; y = −2). También se puede observar que la alumna hace un trabajo simultáneo de "verificación" de que, al resolver el sistema que propone, la solución será, efectivamente, el par (5; −2).

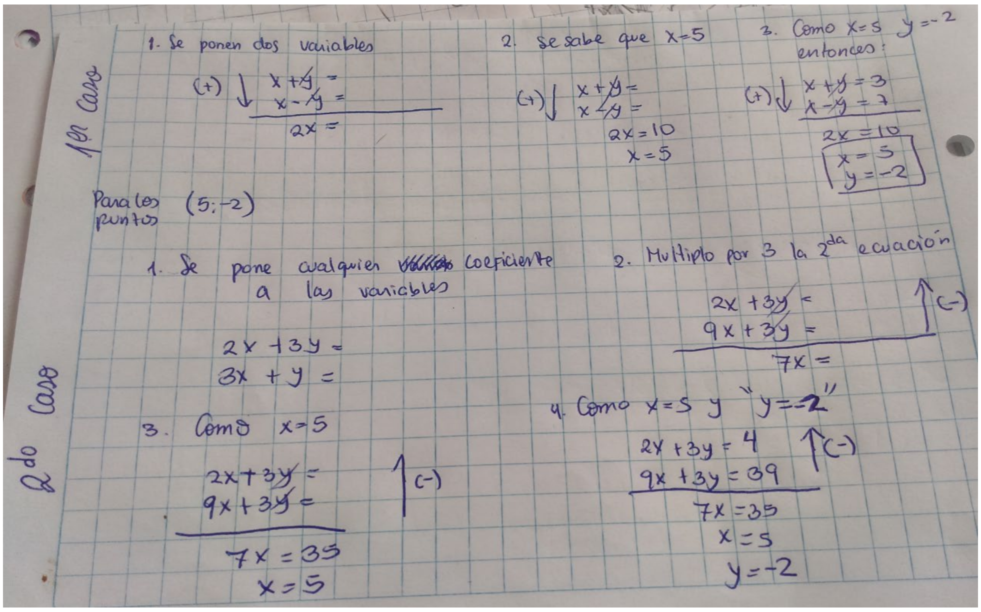

Figura 1. Construyendo sistemas lineales cuya solución es (5, −2)

Cabe mencionar, como lo hice notar en el taller, que ningún participante usó registros gráficos para crear sus sistemas. Pedí que se grafiquen las rectas correspondientes a cada sistema de ecuaciones dado, usando un mismo sistema de coordenadas. En cada caso se tenía cuatro rectas que pasan por un mismo punto y así quedaron evidenciados sistemas de cuatro ecuaciones lineales, con dos incógnitas y con solución única, como se muestra en la Figura 2, usando GeoGebra, para el caso presentado en la Figura 1. Ciertamente, fue la ocasión para que los estudiantes construyan también sistemas lineales de dos variables y más de dos ecuaciones, cuyo conjunto solución es vacío, por representarse mediante rectas que no pasan, todas, por un mismo punto.

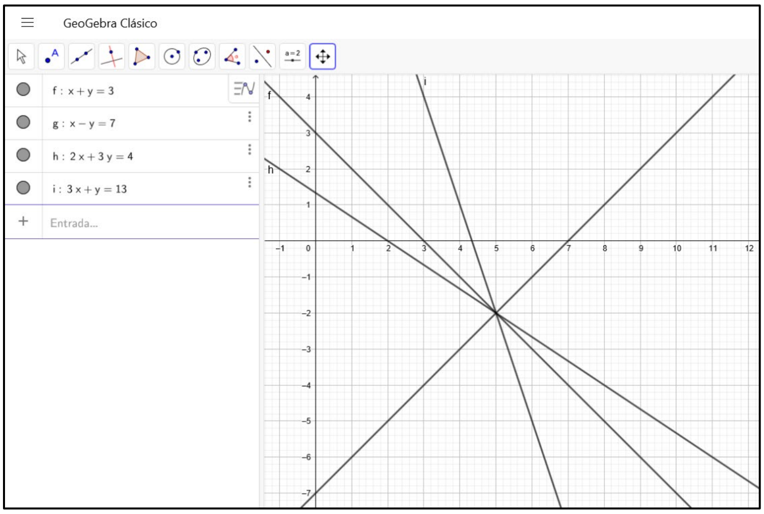

Figura 2. Representación gráfica de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya solución es (5; −2)

El sistema lineal de cuatro ecuaciones con dos incógnitas que se ha construido, es:

$$x + y = 3$$
$$x - y = 7$$
$$2x + 3y = 4$$
$$3x + y = 13$$

Sobre la *Actividad 6*:

A continuación, transcribo los problemas que crearon tres de los estudiantes de profesorado, ante la situación planteada al inicio de este artículo, que la reproduzco para facilitar la lectura:

> *Crea un problema a partir de la siguiente situación:*
>
> *Paco tiene cierta cantidad de monedas, solo de dos denominaciones.*
>
> *El problema debe ser tal que se resuelva usando un sistema de dos ecuaciones lineales y que su solución sea que Paco tiene 9 monedas de la denominación mayor y 15 monedas de la denominación menor.*

- Problema 1:

Paco tiene en su alcancía x monedas de 1 sol y z monedas de 2 soles y así ha reunido 33 soles en total. Si al número de monedas de 1 sol se le añade tres monedas, se obtiene el doble de la cantidad de monedas de 2 soles que tiene Paco.

El sistema que este alumno resuelve, es

$$x + 2z = 33$$
$$x + 3 = 2z$$

Así obtiene $z = 9$, $x = 15$, como se pidió.

- Problema 2:

Paco tiene solo monedas de dos denominaciones y en total son 24. Si su mamá le duplica la cantidad de monedas de denominación mayor, el total de monedas será 33. ¿Cuántas monedas de cada denominación tiene Paco?

El sistema que esta alumna resuelve, es

$$x + y = 24$$
$$2x + y = 33$$

Así obtiene $x = 9$, $y = 15$, como se pidió.

- Problema 3:

Paco recibe de su mamá cierta cantidad de monedas de 5 soles y otra cantidad de monedas de 2 soles. La suma de los valores en soles por ambas denominaciones, es 75 soles y la diferencia de estos valores es 15 soles. Hallar la cantidad de monedas de cada denominación.

El sistema que este alumno resuelve, es

$$5x + 2y = 75$$
$$5x - 2y = 15$$

Así obtiene $x = 9$, $y = 15$, como se pidió.

Comentarios generales

1. La descripción de las actividades desarrolladas en esta experiencia didáctica, con los ejemplos y algunos comentarios, pueden ser útiles para el diseño de tareas en el marco de la creación de problemas de matemáticas, considerando otros objetos matemáticos. Son actividades que pueden realizarse como parte de las clases; sin embargo, también pueden integrarse en las estrategias *Episodio, Problema Pre, Problema Pos* (EPP) y *Situación, Problema Pre, Problema Pos* (SPP), que forman parte de mi propuesta para talleres de formación de profesores (Malaspina, 2017). El lector queda invitado a desarrollar actividades similares y a investigar.

2. Considero que este tipo de actividades en cursos y talleres de formación de profesores, contribuye a fortalecer sus competencias didáctico matemáticas en relación a la modelización matemática; y al desarrollarlos con estudiantes, a iniciarlos en experiencias orientadas al uso del álgebra como una herramienta para la modelización de situaciones de contexto extra matemático.

3. En el caso específico de los sistemas de ecuaciones lineales, observé una gran tendencia a trabajar restringiéndose al registro algebraico; algo que también es frecuente cuando se trabaja con funciones. Con la dinámica de creación de problemas se llegó a considerar y a visualizar casos de sistemas con más ecuaciones que variables, cuya solución es única, transitando entre los registros algebraico y gráfico.

Referencia

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.*), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*
Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf