REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 54. Diciembre 2018
Páginas 92-112

El Teorema de Pitágoras, un problema abierto

Manuel Barrantes López, María Consuelo Barrantes Masot, Victor Zamora Rodríguez, Álvaro Noé Mejía López

Fecha de recepción: 06/11/2018
Fecha de aceptación: 20/12/2018

Resumen	El Teorema de Pitágoras tiene un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Dentro de sus muchas aplicaciones intentamos resaltar el interés didáctico de dicha proposición en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y en particular de la Geometría. Se aborda su estudio desde el punto de vista histórico y su demostración como un problema abierto, accesible y motivante, mediante la utilización de recursos y materiales apropiados como son los puzles pitagóricos. El estudio se completa con la utilización de software libre de geometría dinámica en la construcción de las demostraciones. Para ello presentamos un muestrario de construcciones dinámicas diseñadas con GeoGebra, que complementan la utilización de los puzles pitagóricos para la prueba de dicho teorema. **Palabras claves**: Pitágoras, demostración, problema abierto, geometría dinámica.
Abstract	The Pythagorean theorem has a fundamental role in the development of mathematics. Among its many applications we try to stand out the didactic interest of this proposition in the teaching and learning of mathematics, and in particular the geometry. Its study is approached from the historical point of view and its demonstration as an open, accessible and motivating problem, through the use of resources and appropriate materials such as Pythagorean puzzles. The study is completed with the use of free software of dynamic geometry in the construction of demonstrations. For this we present a sample of dynamic constructions designed with GeoGebra, which complement the use of Pythagorean puzzles for the proof of that theorem. **Key words**: Pythagoras, proof, open problem, Dynamic Geometry.
Resumo	O teorema de Pitágoras tem um papel fundamental no desenvolvimento da matemática. Entre muitas das suas aplicações, procuramos destacar o interesse didático dessa proposição no ensino e aprendizagem da matemática e, em particular, da geometria. O seu estudo é abordado numa perspectiva históricae a sua demonstração como um problema aberto, acessível e motivador, usando recursos e materiais apropriados, como os puzzles pitagóricos. Em suplemento ao estudo, apresenta-se um conjunto de demonstrações construídas através de um software livre de geometria dinâmica (GeoGebra), que complementa o uso dos puzzles pitagóricos para a prova deste teorema. **Palavras-chave:** Pitágoras, prova, problema aberto, geometria dinâmica.

Introducción

El Teorema de Pitágoras ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Y, aunque muchas son sus aplicaciones, nuestro enfoque intenta resaltar el interés didáctico de dicha proposición en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, y en particular de la Geometría.

Por una parte, su estudio puede ser abordado desde el punto de vista histórico o puede ser tratado como un problema abierto, accesible a los alumnos y a la vez motivante, mediante la utilización de recursos y materiales apropiados como son los puzles pitagóricos. El teorema también se puede extender, con el uso de los puzles, a los casos en los que los lados del triángulo no son lados de cuadrados sino lados de otras figuras geométricas.

Por otra, ampliamos este estudio mediante la utilización de software libre de geometría dinámica. Para la prueba de dicho teorema, hemos elaborado un muestrario de construcciones dinámicas diseñadas con GeoGebra, que complementan la utilización de los puzles pitagóricos.

Los alumnos, mediante estas propuestas, no sólo profundizaran en el conocimiento de la proposición pitagórica, sino que, además, las actividades darán lugar a que tengan que realizar: reconocimiento de figuras geométricas, cálculos de áreas, semejanzas, lógica matemática, cálculos y desarrollos numéricos u otros contenidos que puedan surgir en la realización de las tareas; por ejemplo, en la última fase, los alumnos pueden adquirir un buen manejo de GeoGebra.

Las distintas sugerencias van dirigidas a profesores de Secundaria. Encontraremos actividades adecuadas para alumnos, en las que se puede tener un contacto con la proposición de manera empírica o informal; sugerimos demostraciones formales y resultados al alcance de los alumnos y otras actividades dirigidas a estudiantes para profesores y enseñantes en general, orientadas a reconocer la importancia que tiene dicha proposición no sólo en la Didáctica de la Geometría, sino en relación con otras áreas de las Matemáticas. Cada uno, como profesional de la enseñanza, deberá escoger lo más adecuado al nivel de su interés.

1- La proposición pitagórica y la historia.

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

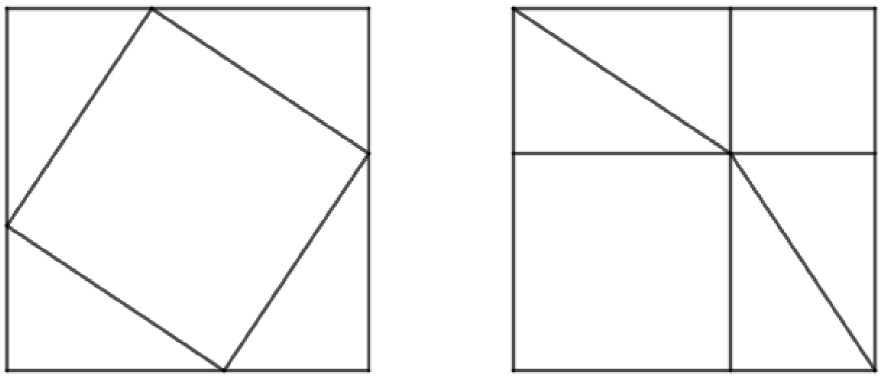
Esta celebre proposición, conocida como el Teorema de Pitágoras, la proposición pitagórica o la proposición 47 del primer libro de los Elementos de Euclides, ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Y, aunque muchas son sus aplicaciones en este campo, nuestro trabajo va orientado principalmente a resaltar el interés didáctico de dicha proposición en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y en particular de la Geometría.

No es nada nuevo afirmar que la introducción de la historia de las matemáticas en las actividades del aula enriquece bastante la enseñanza de esta materia. Una directa aproximación al aprovechamiento matemático se puede conseguir proponiendo al alumnado diferentes demostraciones clásicas de la proposición o problemas relacionados con ella, transportando a éstos a la época en las que fueron realizadas. Para ello, además de comentar la biografía del autor, diferentes autores (Bergua, 1958; Clark, 1986; Laing, 1989; Nelsen, 1993; Rosenthal,1994; Schuré, 1995; Ericksen, Stasiuk, y Frank 1995; Savora, 1996; Caniff, 1997; Barrantes, 1998, Strathern, 1999; González, 2001, 2008) tratan de estudiar o conocer la vida de Pitágoras y los pitagóricos presentando diferentes demostraciones de la proposición a lo largo de la historia, que son curiosas o pertenecen a algún matemático conocido; así como las repercusiones y aplicaciones de dicha proposición para el avance de las Matemáticas.

También muchas otras demostraciones y pruebas pueden encontrarse en la extensa bibliografía que existe sobre este tema, de la que podríamos resaltar los artículos de Yanney y Calderhead (1896, 1897, 1898, 1899) y un número suficientes de páginas web que se indican en la webgrafía final. Sin embargo, Loomis (1968) es una fuente importante en las que podemos encontrar información acerca de las distintas demostraciones del Teorema de Pitágoras. En éste se presentan 370 pruebas o demostraciones con sus correspondientes figuras realizadas de forma artesanal y sus demostraciones formales.

Es bien destacado que la traducción de la tablilla de arcilla babilonia Plimpton 322 nos muestra que el teorema era bien conocido por los matemáticos babilonios muchos siglos antes de que naciera Pitágoras (Gillings, 1972,); similar afirmación realiza Eves (1976, p. 62), aunque matizando que ... *la primera prueba general podría deberse a Pitágoras*, prueba respecto a la cual, este autor, conjetura que podría ser del tipo de disección, similar a la de la figura 1.

Esta demostración es muy fácil de realizar, recortando y colocando las figuras de los dos cuadrados de los catetos y de la hipotenusa adecuadamente, para que los alumnos observen que se cumple la proposición pitagórica. Flores (1992) realiza esta demostración, de una manera más formal, mediante el cálculo de las áreas de las figuras correspondientes de los dos cuadrados e igualación de las áreas totales.



Figuras 1 y 2. ¿Demostración original de los pitagóricos?

Para ilustrar que la proposición era conocida por geómetras anteriores a los pitagóricos, sería estimulante que el profesor trabajara con la demostración atribuida al hindú Bhaskara que nos muestra Loomis (1968) con el número 353.Dicha demostración también está recogida en la relación de pruebas del teorema realizadas con puzles (ejemplo 3) y GeoGebra, de las que hablaremos más adelante.

Por último, citar a Meavilla (1989), que incluye la demostración del matemático árabe del siglo IX Thabit Ibn Qurra. Se ofrece una sucesión de figuras en las que determinados elementos cambian de forma, se dividen, se desplazan y dan lugar a nuevas configuraciones mediante las cuales el alumno descubre la proposición, como si estuviera viendo un comic sin palabras. La demostración de Thabit Ibn Qurra también la hemos realizado mediante un puzle de tres piezas y con GeoGebra, como veremos posteriormente.

2- El teorema de Pitágoras y la metodología de laboratorio.

De todos es sabido que los materiales didácticos representan un papel muy importante en la enseñanza/aprendizaje de la Geometría en todos los niveles. Su correcta utilización, así como las actividades adecuadas para cada nivel, posibilitan que los alumnos adquieran conceptos, establezcan relaciones y conozcan diferentes métodos geométricos de acuerdo con su evolución intelectual.

Los materiales y actividades que presentamos no están orientados solamente a los alumnos de Educación Secundaria, sino también a los estudiantes para profesores (EPPs). Creemos que, si nuestro objetivo es plantear una metodología activa en nuestras aulas y que los EPPs se conciencien de ello, los profesores debemos ser los primeros en asumir ese tipo de metodología. En esta línea, en Barrantes y Barrantes (2017) se presenta una forma distinta de trabajar la didáctica de la Geometría basada en la idea de laboratorio, entendida como la oportunidad de experimentar y forma de producción propiciadora de las actividades de investigación.

Sería conveniente analizar los problemas aburridos y estériles que planteamos a los alumnos, debido a la serie de restricciones que se imponen absurdamente a dichos problemas, con las que solamente se consigue delimitar sus posibilidades. En el caso de la propiedad pitagórica, las actividades de aula, muchas veces, quedan reducidas a: comprobar si varias ternas de cuadrados cumplen la propiedad; realizar la demostración cuadriculando los cuadrados de los catetos y la hipotenusa y a la aplicación o realización de ejercicios numéricos con unas técnicas de resolución prefijadas.

Sin embargo, el teorema de Pitágoras puede ser presentado y trabajado como una situación abierta que admite muchas más posibilidades y formas de trabajo que, a su vez, dan lugar a nuevas cuestiones que predisponen a los alumnos para conocer nuevos conceptos y concebir el teorema desde una perspectiva más amplia y enriquecedora.

Los puzles de madera son un material con el que se pueden hacer una serie de actividades que trabajan, de forma motivadora, la propiedad pitagórica como un problema abierto accesible a los alumnos y motivante, en el sentido de que todos quieren manipularlos para resolver el problema. Los puzles pueden ser de un grosor aproximado de un centímetro y, atendiendo a las actividades que podíamos realizar con ellos, se pueden clasificar en tres tipos diferentes:

- Puzles que proponen diferentes demostraciones de la propiedad pitagórica.
- Puzles que amplían el teorema de Pitágoras a casos en los que los lados del triángulo no son solamente lados de cuadrados.
- Puzles que verifican que la propiedad pitagórica se puede seguir cumpliendo incluso cuando el triángulo no sea rectángulo, bajo ciertas condiciones que hay que precisar.

Estos materiales se diseñan para que sean los alumnos quienes los descubran, identifiquen las relaciones entre las diferentes figuras, y construyan sus propias demostraciones.

Describimos a continuación algunos de estos puzles, así como las actividades que se pueden realizar con ellos.

3- Puzles que proponen diferentes demostraciones de la propiedad pitagórica.

De estos puzles describiremos tres que, atendiendo al número de piezas de las que constan los llamaremos puzles de seis piezas, puzles de cinco piezas y puzles de tres piezas. Sin embargo, los alumnos pueden construir sus propios puzles, para ello basta con que las piezas seccionadas en los cuadrados de los catetos encajen en el cuadrado de la hipotenusa (Barrantes, 1998)

3.1. Puzle de seis piezas.

Éste consta de seis piezas de madera (fig. 3) que son: un triángulo rectángulo, tres cuadrados de lados los catetos y la hipotenusa del triángulo respectivamente, un paralelogramo de lados el cateto menor y la hipotenusa, y un paralelogramo de lados el cateto mayor y la hipotenusa.

Figuras 3 y 4. Puzle de seis piezas

Las actividades van encaminadas a que el alumno observe que las áreas de los dos paralelogramos son iguales a las áreas de los dos cuadrados menores, con lo que la demostración es inmediata mediante las colocaciones siguientes:

A.1- Se colocan los tres cuadrados y el triángulo sobre la caja base (figura 4).

A.2- Se colocan los dos cuadrados mayores, el triángulo, y el paralelogramo menor en la caja base (figura 5).El alumno debe relacionar el área del paralelogramo y el del cuadrado menor.

Figuras 5 y 6. Puzle de seis piezas

A.3- Se coloca en la caja el triángulo, el cuadrado mayor, el cuadrado menor y el paralelogramo mayor. Igualmente, el alumno debe relacionar el área del paralelogramo mayor y del cuadrado mediano (figura 6).

A.4- Por último, se coloca en la caja el triángulo, los dos paralelogramos y los dos cuadrados pequeño y mediano y se debe relacionar el área de los dos paralelogramos con el área del cuadrado mayor (figura 7).

A.5- Así pues, la última actividad de los alumnos será extraer una conclusión general de las actividades anteriores que relacione las áreas de los tres cuadrados.

Figura 7. Puzle de seis piezas

Los alumnos deben llegar a la conclusión de que el área de cada paralelogramo coincide con las áreas de los cuadrados sobre los catetos y que como el área de los dos paralelogramos juntos coincide con la del cuadrado mayor se cumple el teorema de Pitágoras.

3.2. Puzle de cinco piezas.

Las cinco piezas de las que consta este puzles son dos triángulos rectángulos iguales y tres cuadrados de lados, respectivamente, iguales a los catetos y la hipotenusa de los triángulos rectángulos. Como base se utilizan dos cuadriláteros (fig.8) de lado mayor la suma de las diagonales de los dos cuadrados menores y los otros tres lados son iguales a los lados del triángulo rectángulo.

Figura 8. Puzle de cinco piezas

Figuras 9 y 10. Puzle de cinco piezas

La demostración con este puzle es más intuitiva que con el anterior pues consiste en cubrir primeramente la base con los dos triángulos y los dos cuadrados menores (catetos), y posteriormente con los dos triángulos y el cuadrado mayor (hipotenusa) (figuras 9 y 10). Como en las dos actividades cubrimos el misma área queda demostrado que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos será igual al área del cuadrado de la hipotenusa.

Figuras 11 y 12. Puzle de tres piezas.

3.3. Puzle de tres piezas.

Las piezas de este puzle son dos triángulos rectángulos iguales y una pieza pentagonal (fig.11) que junto con los dos triángulos encajan perfectamente en una caja que equivale a los dos cuadrados de los catetos del triángulo rectángulo. En este caso, la demostración consiste en formar con las tres piezas primeramente los dos cuadrados de los catetos, es decir, colocar las piezas en la caja, y después, sacando las piezas de la caja, formar el cuadrado de la hipotenusa (figura 12).

Este puzle es atribuido por Meavilla (1989) a Thabit Ibn Qurra. Su principal curiosidad radica en que es el puzle de menor número de piezas que nos permite mostrar la propiedad pitagórica. Su demostración también aparece en el estudio posterior que veremos sobre las pruebas de teorema mediante GeoGebra.

4. Puzles que amplían el teorema de Pitágoras a casos en los que los lados del triángulo no son solamente lados de cuadrados.

Se puede ampliar la proposición a los casos en los que los lados del triángulo no son lados de cuadrados sino lados de otras figuras geométricas. Esto es, la propiedad pitagórica no es valida únicamente para los cuadrados de lados los catetos y la hipotenusa, sino para cualquier polígono construido sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que los tres polígonos, así construidos, sean semejantes entre sí. En efecto, como la relación de superficies entre figuras semejantes solo depende del cuadrado de uno de sus lados, las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados se van a poder expresar como kb^2, ka^2, kc^2, donde el valor de k va a depender de la forma de la figura.

Si las figuras son semejantes se va a verificar que

$$kb^2 + ka^2 = kc^2$$

donde a, b, y c son los catetos e hipotenusa, respectivamente, del triángulo rectángulo. Para mostrar esta generalización al caso de triángulos hemos construido unos puzles de tres piezas: un triángulo rectángulo y los dos triángulos que se obtienen al dividir el primero por la altura (fig. 13).


Figuras 13 y 14. Puzle triángulos para la generalización del teorema

Evidentemente los tres triángulos son semejantes (fig. 14) pues basta colocarlos en posición de Thales (dos lados de uno contienen respectivamente a dos lados del otro triángulo y el tercer lado del primero es paralelo al tercer lado del otro) y, además, superponiendo los dos pequeños (catetos) sobre el grande (hipotenusa), por construcción, la suma de las áreas de los dos menores es igual al área del mayor con lo que se cumple la generalización del teorema para dichos triángulos (fig. 15 y 16).


Figuras 15 y 16. Triángulos sobre los catetos y sobre la hipotenusa para la generalización del teorema.

Basándonos en esta generalización, en Barrantes (1998) se muestran diversos puzles (fig.17 a la fig. 20) donde los polígonos: triángulos, cuadrados, trapecios y octógonos construidos sobre los catetos han sido troceados en piezas. El alumno deberá trasladar estas piezas para comprobar que la suma de dichas áreas coincide con el área del polígono construido sobre la hipotenusa y viceversa, probando así la generalización.

Posteriormente, el alumno puede diseñar sus propios puzles sobre geoplanos, mallas cuadradas o triangulares, y construirlos después sobre cartón, madera fina o gruesa, obteniendo así sus particulares demostraciones de la generalización del teorema. Podemos hacerles observar que si nos fijamos solamente en los casos de los cuadrados obtenemos como caso particular el Teorema de Pitágoras conocido por todos (fig.18).

La generalización de la propiedad no es sólo para polígonos, sino para figuras cualesquiera que verifiquen la condición de semejanza. Así pues, los alumnos pueden comprobar que se verifica para semicírculos, cuartos de círculos, segmentos o sectores circulares.

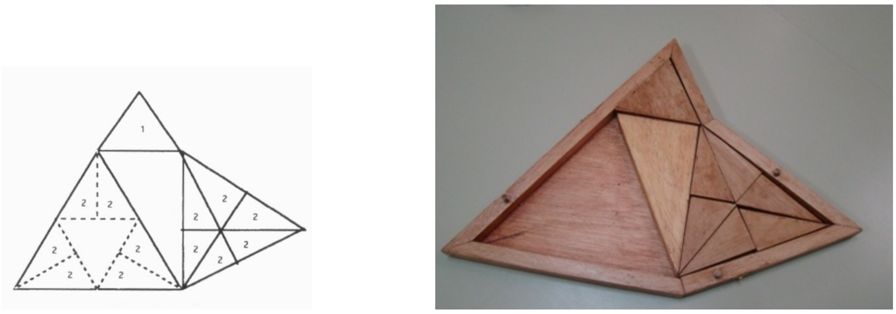


Figura 17. Puzle triangular

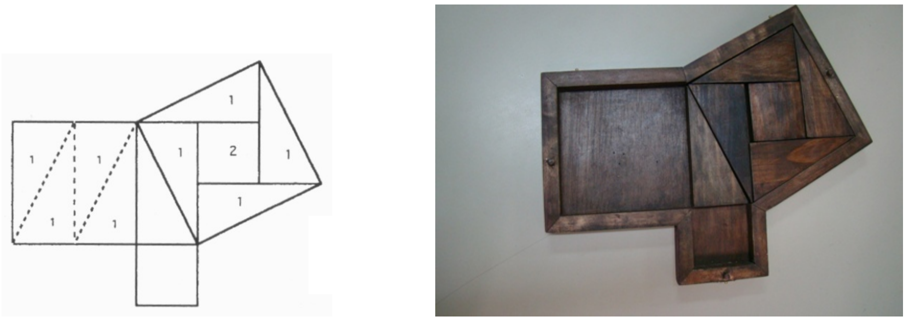


Figura 18. Puzle cuadrado

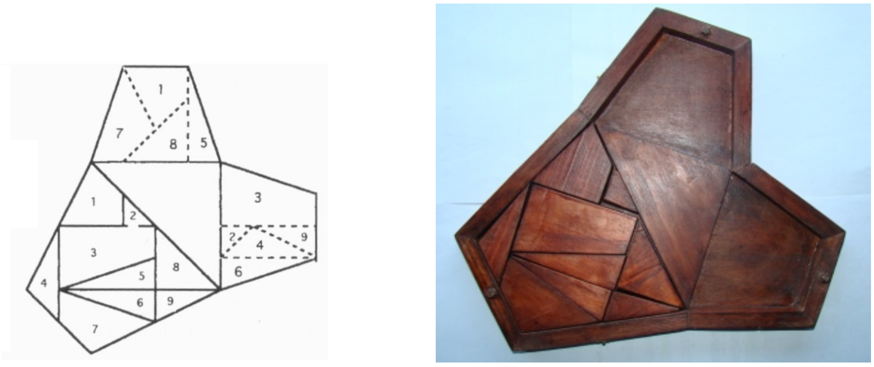


Figura I9. Puzle trapecios

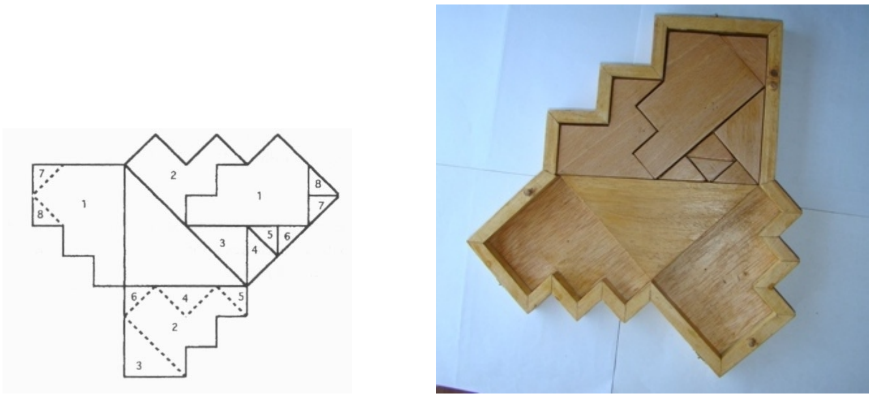
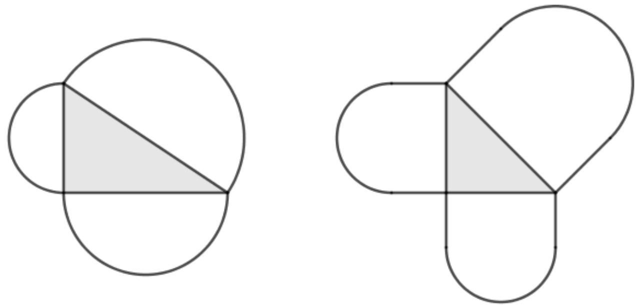


Figura 20. Puzle octógono irregular

En este caso, como el troceado en puzles ya no es posible, podemos calcular las áreas de dichas figuras derivadas del círculo. De esta forma, las actividades consistirían en construir estas figuras sobre los catetos y la hipotenusa, verificando bajo qué condiciones se sigue cumpliendo la propiedad pitagórica (fig. 21).

A partir de aquí, surge un tipo de actividades que llamamos de figuras mixtas en las que se conjugan formas poligonales con formas circulares. En este tipo de actividades, surgen figuras geométricas muy creativas y originales, sobre los lados del triángulo rectángulo, que amplían la propiedad pitagórica una vez más (fig. 22).



Figuras 21 y 22. Generalización a figuras con lados curvos

Cuando los alumnos han manejado suficientemente los materiales, podemos formalizar la generalización, como se hace en Zárate (1996) y Vasquez (2012) en donde se demuestra la ampliación a: triángulos equiláteros, semicírculos, rectángulos semejantes y el teorema general para toda terna de figuras semejantes trazadas sobre los lados de un triángulo rectángulo. Todas estas demostraciones son sencillas y adecuadas para los niveles de Secundaria.

5. Ampliación a triángulos no rectángulos

Otro camino posible a seguir es la generalización del teorema de Pitágoras a triángulos cualesquiera mediante el teorema de Pappus.

Dicho teorema afirma:

Dado un triángulo cualquiera (fig. 22), construimos dos paralelogramos p1 y p2 cualesquiera sobre los lados de un ángulo A que llama ángulo base. Consideramos el segmento H, cuyos extremos son el vértice A y la intersección de las rectas que contienen a los lados Ll y L2 de los paralelogramos pl y p2. Si construimos sobre el lado opuesto a A un paralelogramo p3 con lados paralelos y congruentes a H entonces la suma de las áreas de p1 y p2 es igual al área del paralelogramo p3, es decir:

área p1 + área p2 = área p3

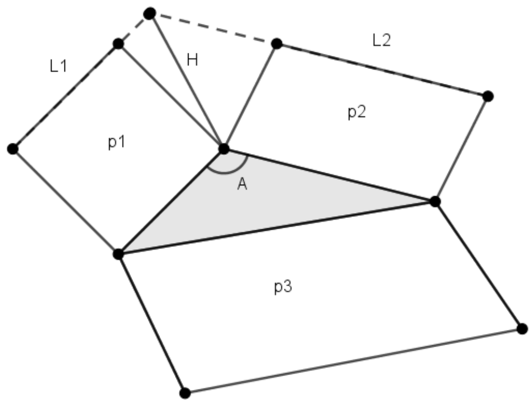


Figura 22. Teorema de Pappus

Para probar esta propiedad, se pueden construir puzles sobre mallas cuadradas teniendo en cuenta las hipótesis del teorema, o bien mostrar a los alumnos los puzles ya construidos (figuras 23 y 24) y que éstos extraigan las condiciones bajo las que se vuelve a verificar la propiedad pitagórica.

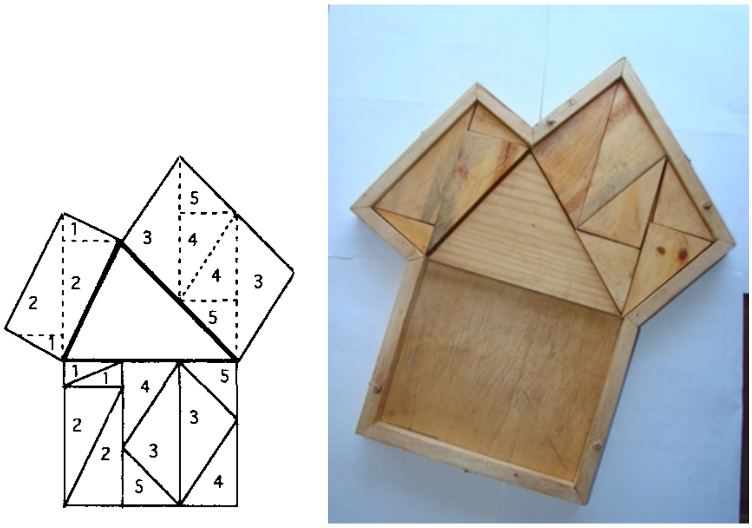
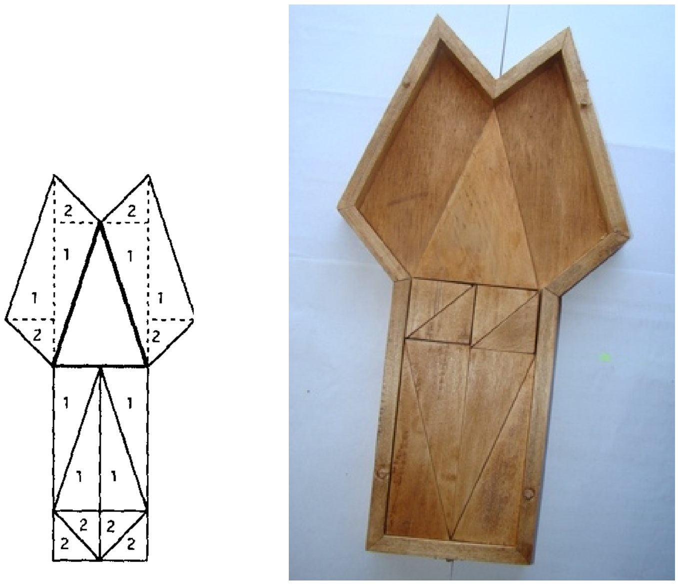


Figura 23. Puzle de Pappus



. **Figura 24. Puzle de Pappus**

La demostración formal de esta generalización aparece en Flores (1992) y en Loomis (1968) y está basada en congruencias de paralelogramos. Por su simplicidad puede ser, también, revisada por los alumnos de Secundaria.

Para concluir este apartado, es interesante resaltar que, con las actividades anteriormente mencionadas, el alumno no sólo trabaja la propiedad pitagórica, sino que además interioriza y refuerza otros contenidos geométricos como son: el conocimiento de las diferentes figuras geométricas que tiene que manejar, la noción o el cálculo de áreas, la semejanza y sus propiedades, y otros conceptos o nociones geométricas que pueden surgir en la realización de las actividades prácticas y teóricas.

6- El teorema de Pitágoras y el software de Geometría Dinámica

La geometría dinámica la entendemos como un ambiente computacional de construcción geométrica, basado en la geometría euclidiana. Este recurso se fundamenta en la tecnología y las herramientas que nos proporciona, ya que a través de ellas podemos movilizar las figuras geométricas para que adquieran dinamismo (Cabrera y Campistrous, 2007) como anteriormente hemos hecho con los puzles.

Así pues, las tecnologías proporcionan herramientas que pueden ayudar, potenciar y hacer evolucionar de un modo provocador la enseñanza de la geometría. Los procesadores geométricos han sido el primer paso en esa dirección (Costa, 2001). Un procesador de geometría dinámica es todo software que permite dibujar figuras en función de sus relaciones geométricas, y no de su apariencia. Sus construcciones son dinámicas, es decir, permiten interactuar (mover, modificar,) con las construcciones realizadas, haciendo que las relaciones geométricas se mantengan.

Con esta concepción de la enseñanza de la geometría, se evitan las figuras rígidas que se corresponden con una única forma de representación y se apuesta por que los alumnos se hagan una idea general de las figuras y que puedan comprender las propiedades geométricas, mediante un gran número de representaciones. Los softwares de geometría dinámica sirven de plataforma para que los profesores incursionen en este campo de las matemáticas y se potencian las posibilidades de representación y dinamismo (López, Alejo y Escalante, 2013). Con el paso del tiempo han surgido una gran variedad de procesadores con funcionalidades propias de la geometría clásica de los que nosotros hemos seleccionado GeoGebra.

GeoGebra es un software libre y de acceso abierto con una estética muy accesible y atractiva y un lenguaje adecuado para los dicentes. El uso de GeoGebra, a través de la guía del profesor y las experiencias de aprendizaje que suministra, permite generar experiencias de aprendizaje en las que los alumnos se pregunten el por qué, y el qué sucedería frente a ciertos hechos geométricos, aportando una oportunidad para que éstos tengan una completa apreciación de la naturaleza y el propósito de la demostración matemática.

Así pues, hemos realizado una investigación para implementar, las demostraciones del teorema de Pitágoras que hemos construido en los puzles (vistas anteriormente) y algunas más, mediante GeoGebra de forma que tengamos un recurso más para trabajar el Teorema de Pitágoras.

El proyecto se realizó en dos fases. La primera fase fue de revisión de demostraciones, además de las que teníamos, con la finalidad de buscar las adecuadas a los diferentes niveles educativos de la Secundaria. Para ello se revisaron textos, artículos y páginas de internet, algunas de las cuales se citan en las referencias y la webgrafía de este artículo. La segunda fase fue útil principalmente para realizar la selección definitiva de las demostraciones y para ir perfilando su clasificación. La formación de las variables (nivel educativo y tipo de demostración: geométrica y algebraica) fue un proceso que se sustentó en la revisión bibliográfica realizada, así como en los objetivos de la investigación.

Dentro de la extensa revisión, el texto de Loomis (1968) ha servido como guía principal junto a las demostraciones encontradas en Internet y en el repositorio de materiales de la página oficial de GeoGebra (ver webgrafía). Al igual que en la primera parte de este artículo, en este apartado también se han tenido en cuenta aquellas demostraciones de matemáticos famosos a lo largo de la historia, y que han causado un impacto en el campo de las matemáticas.

En esta parte de la investigación, la presentación se hace mediante una ficha en la que se incluye: imágenes de GeoGebra de la demostración correspondiente, el procedimiento generalizado utilizado para su construcción, una explicación justificativa y la demostración formal, como veremos posteriormente en los ejemplos.

La codificación de las construcciones dinámicas se realizó en base a las variables Así, los dígitos corresponden: El primero, enumeración de las pruebas en un orden ascendente. El segundo asigna un I o II si la prueba es geométrica o algebraica. El tercero es el nivel académico A, B y C para los contenidos de 1º, 2º y 4º de la ESO, respectivamente.

GEOMÉTRICAS		ALGEBRAICAS
1º ESO	2º ESO	4º ESO
1.Puzle1: Hipotenusa/cateto menor = 3	7.Euclides	19.Bashkara
2.Puzle 2: 30º ≤ A ≤60º y 30 º≤ B ≤ 60º	8.Liu Hui	20.Chou-Pei-Suan
3.Puzle 3: Cateto mayor/cateto menor = 2	9.Platón	21.Pappus
4.Puzle 4: Triángulo rectángulo isósceles	10.Dobriner	22.Vieta
5.Puzle 5: Lados 3, 4 y 5	11.Perigal	23.Garfield
6.Caso Particular (Loomis 4)	12.Ozanam	24.Leonardo da Vinci
	13.J. Adams	25.H. Boad
	14.Hoffmann	26.Loomis 108
	15.Loomis 2	27.Thâbit IbnQurra (a)
	16.Loomis 26	28.Thâbit IbnQurra (b)
	17.Poo-Sung-Park	
	18.A. G. Samosvat	

Cuadro 1. Demostraciones estudiadas del Teorema de Pitágoras

En el estudio general seleccionamos un total de 97 construcciones de las cuales hemos escogido 28 demostraciones del Teorema de Pitágoras, realizadas con GeoGebra, como podemos ver en el cuadro 1.

En dicho cuadro aparecen 6 pruebas dirigidas a 1º ESO (son básicamente pruebas puzles). Las 12 pruebas geométricas dirigidas a 2º ESO y las 10 pruebas algebraicas de 4º ESO, son pruebas realizadas por matemáticos célebres o personalidades de otros campos que han tenido la tentación de realizar una prueba de dicho teorema.

Como muestras para el lector, hemos seleccionado cuatro pruebas del cuadro 1 que se corresponden con los números 4, 20, 19 y 26, y que desarrollamos a continuación.

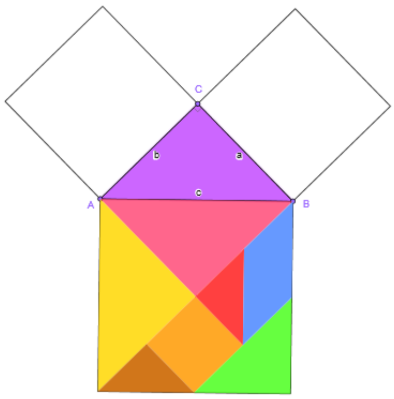
Si el lector está interesado, el resto de las pruebas clasificadas pueden ser consultadas de manera electrónica en el Libro de GeoGebra *Pruebas del Teorema de Pitágoras*, en la página web https://www.GeoGebra.org/m/j6wRRyxB.

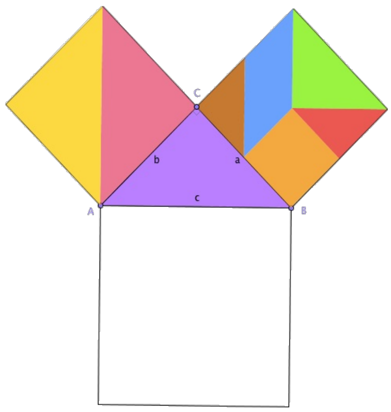
7- Ejemplos de fichas de demostraciones del teorema.

A continuación, se muestran los ejemplos de las construcciones dinámicas construidas nombrados anteriormente, cada una en su propia ficha y explicada en base a su contenido.

Ejemplo 1: Triángulo rectángulo isósceles Código: 4.I. A

Momentos





Procedimiento:

Podemos observar que las piezas del cuadrado de la hipotenusa corresponden a un tangram cuadrado de siete piezas. Luego basta con construir las piezas del geoplano cuadrado tomando como lado del cuadrado la hipotenusa. El triángulo base, que aparece en morado, es la pieza, triángulos grandes del tangram. Así pues:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (morado)

2. Se construyen un tangram cuadrado de siete piezas de lado la hipotenusa.

3. Podemos resolver a partir del cuadrado de la hipotenusa o a partir de los cuadrados de los catetos trasladando las piezas correspondientes.

Explicación: Esta demostración es válida solo en el caso de que el triángulo rectángulo inicial es isósceles por la construcción del tangram.

Demostración: Se puede hacer una demostración formal, hablando matemáticamente, pero en este caso hemos decidido hacer la prueba a partir de las propiedades del tangram.

La demostración es obvia mediante el traslado de las piezas del puzle; pero si queremos hacerla numéricamente basta con tomar como unidad de medida el triángulo pequeño rojo, podemos observar que el cuadrado, el paralelogramo y el triángulo mediano miden 2 unidades y los triángulos grandes 4 unidades. Luego el área del cuadrado sobre la hipotenusa sería 16 unidades. Tomando las medidas de los cuadrados sobre los catetos, en la segunda figura, obtenemos que miden, cada uno, 8 unidades, lo que demuestra el teorema.

Ejemplo 2: Chou Pei Suan Ching (Loomis 253) Código: 20. II.C

Chou Pei Suan Ching es una obra matemática de datación discutida, aunque se acepta mayoritariamente que fue escrita entre el 500 y el 300 a. C. Se cree que Pitágoras no conoció esta obra, aunque una demostración similar es atribuida a los pitágoricos por Eves (1976).

Procedimiento

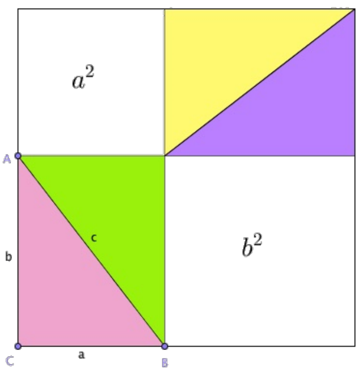
1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (rosa)

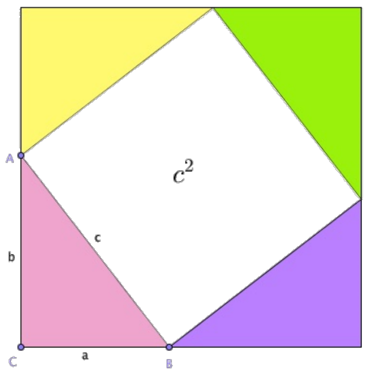
2. Se refleja con respecto a la hipotenusa obteniendo otro triángulo rectángulo (verde)

3. Se rota el rectángulo resultante 90º a la derecha y se traslada hacia arriba (amarillo, morado)

4. Así nos quedan construidos los cuadrados que se forman (blancos)

Momentos





Explicación

Después de que se reflejan, rotan y trasladan los triángulos rectángulos, se construyen 2 cuadrados blancos de lados igual a los catetos del triángulo ABC. En la segunda figura, después de trasladar todos los triángulos a las esquinas del cuadrilátero, se forma un cuadrado de lado igual a la hipotenusa del triángulo inicial. Por lo tanto, el área de este cuadrado va ser igual a la suma de los dos cuadrados formados al inicio. Es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración

Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo ABC y c su hipotenusa, además, A1 es el área del primer cuadrado antes de hacer la traslación y A2 el área del segundo cuadrado, al obtener sus áreas se obtiene:

$A1 = 4\ (a\ .\ b\ /\ 2) + a^2 + b^2$ $\qquad$ $A2 = c^2 + 4\ (a\ .\ b\ /\ 2)$

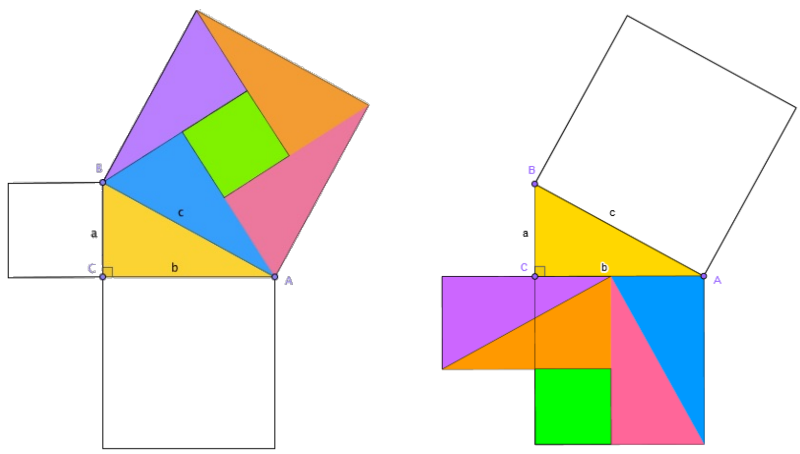
Como son el mismo cuadrado se obtiene que:

$4\ (a\ .\ b\ /\ 2) + a^2 + b^2 = c^2 + 4\ (a\ .\ b\ /\ 2) \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo 3: Demostración de Bashkara (Loomis 36). Código: 19. II. C

Es del tipo algebraica para 4º de la ESO. Bhaskara es también conocido como Bhaskara II o como Bhaskaracharya, que significa *Bhaskara el maestro*. Nació en 1114, y es probablemente el matemático hindú de la antigüedad mejor conocido. Era monje dedicado a las matemáticas y a la astronomía y aportó una demostración sencilla del Teorema de Pitágoras en su trabajo Bijaganita (cálculo de raíces).

Momentos



Procedimiento.

El cuadrado sobre la hipotenusa se divide, como indica la figura 11, en cuatro triángulos equivalentes al dado y un cuadrado de lado igual a la diferencia de los catetos.

Explicación.

Las piezas son reordenadas fácilmente para formar una figura que resulta ser la yuxtaposición de los cuadrados sobre los catetos. Esta prueba, también, puede ser utilizada en los primeros cursos de la ESO como una demostración geométrica del tipo partición de los cuadrados, como podemos ver en la figura 18.

Demostración.

Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo ABC y c su hipotenusa, además, A1 (área total de los dos cuadrados) es el área de los 4 triángulos de lados a y b y el cuadrado (cuyo lado mide b-a) construidos inicialmente y A2 el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Al comparar sus áreas se obtiene:

$$A1 = 4\ (a\ .\ b\ /\ 2) + (b - a)^2; \qquad A2 = c^2$$

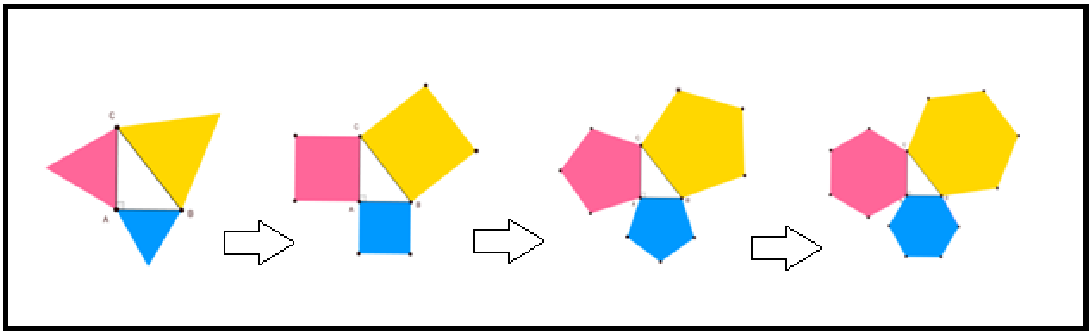
Como A1 = A2 por construcción, se tiene que:

$$4\ (a\ .\ b\ /\ 2) + (b - a)^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo 4: Prueba Loomis de ampliación del Teorema. Código: 26.II.C

Es una prueba de tipo algebraica y es una extensión del teorema clasificada en Loomis (1968) con el número 108 (algebraicas). En 1933, Loomis, matemático estadounidense, plantea una extensión del Teorema de Pitágoras en la que establece que la relación pitagórica se mantiene para cualquier polígono regular construido a partir de triángulos isósceles construidos sobre el triángulo inicial. La propiedad pitagórica no es válida únicamente para los cuadrados de lados los catetos y la hipotenusa, sino para cualquier polígono construido sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que los tres polígonos, así construidos, sean semejantes entre sí.

Momentos



Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (blanco)

2. Se construyen polígonos regulares sobre sus lados: triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos, etc.

3. Se comparan las áreas de estos polígonos para comprobar la relación pitagórica.

Explicación: La misma relación pitagórica establecida con los triángulos y cuadrados construidos a partir de los lados de un triángulo equilátero, es mantenida si construimos sobre los lados del triángulo equilátero polígonos regulares. Es decir, cualquier polígono regular de lado igual a la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los polígonos regulares construidos de lados igual a la longitud de los catetos del triángulo rectángulo.

Demostración: En efecto, como la relación de superficies entre figuras semejantes solo depende del cuadrado de uno de sus lados, las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados se van a poder expresar como kb^2, ka^2, kc^2, donde el valor de k va a depender de la forma de la figura. Si las figuras son semejantes se va a verificar que $kb^2 + ka^2 = kc^2$, donde a, b, y c son los catetos e hipotenusa, respectivamente, del triángulo rectángulo.

En el primer caso, como los triángulos son equiláteros la constante k vale:

k = ¼ de la raíz cuadrada de 3

en las demás figuras regulares:

k = n / (4 tg(180 / n)) donde n es el número de lados

8- Conclusiones

La hipótesis de nuestra investigación es que el teorema de Pitágoras es un problema abierto entendido como un problema que posibilita al alumno conocer diferentes demostraciones clásicas de la proposición pitagórica a la vez que se revaloriza la importancia de la prueba pitagórica, haciéndoles observar la cantidad de personas famosas, matemáticos o no, que se han preocupado por ella.

Pero estas demostraciones no las aprende el alumno a la manera clásica del lápiz y el papel, sino mediante distintos materiales como son los puzles o los recursos informáticos, tipo GeoGebra, de manera que el profesor y los alumnos trabajen la propiedad pitagórica de una forma activa y dinámica pudiendo además seleccionar, entra la gran variedad de pruebas que ofrecemos e incluso realizando sus propias demostraciones.

Entendemos que la geometría dinámica se ha convertido en un recurso que, combinado con el correcto uso que haga el profesor, puede favorecer el aprendizaje en los alumnos debido al dinamismo en las construcciones, lo que permite que haya una interacción entre el conocimiento, el alumno y el docente a través de las construcciones geométricas.

Las actividades dinámicas permiten explorar visualizaciones de la prueba pitagórica, favoreciendo la construcción de conocimientos, a través de la manipulación directa de los puzles o del software de geometría dinámica; acciones que serían más trabajosas utilizando lápiz y papel. Los alumnos experimentan dificultades y logros de actividades que, aunque parecen actuales, han sido planteados y resueltos hace muchos siglos.

La realización de estas actividades debe producir un cambio en las concepciones de los profesores y alumnos hacia una nueva mirada de la Geometría, distinta de la tradicional de libro y pizarra, en la que el alumno es el eje del aprendizaje de una materia básica en su vida diaria y laboral (Barrantes y Barrantes, 2017)

Evidenciamos de esta manera la importancia y posibilidades que tiene el Teorema de Pitágoras dando lugar a un sin número de demostraciones y aplicaciones que lo convierten en un auténtico problema abierto de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

9. Referencias.

Barrantes, M. (1998). *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria*. Manuales UEX, 22. Unex. Badajoz.

Barrantes, M. y Barrantes, M.C. (2017). *Geometría en la Educación Primaria*. Ed. Indugrafic digital. Badajoz.

Bergua, J. B. (1958*): Pitágoras*. Ed.Ibéricas. Madrid.

Cabrera, C. R., y Campistrous, L. A. (2007). Geometría dinámica en la escuela, ¿Mito o realidad? *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 13(45),61-79.

Caniff, P. (1997): *Pitágoras*. M.E. Editores, S.L. Madrid.

Clark, M. (1986): Pythagoras Two. *Mathematics Teaching*, 114, 11-12.España

Costa, A. (2001). Cinderella. Programas informáticos en matemáticas. La Gaceta, 4 (1), 273- 278.

Ericksen, D., Stasiuk, J., & Frank, M. (1995). Bringing pythagoras to life. *The Mathematics Teacher, 88*(9), 744-747.

Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics*. Holt, Rinehart and Winston. N. York.

Flores, A. (1992): La feria de Pitágoras. *Educación Matemática*, 40), 66-83, 4(2), 62-78.

Gillings, R. J., (1972). *Mathematics in the time of the Pharaos*. The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, Massachusetts

González, P. M (2001). *Pitágoras. El filósofo del número*. Nivola. Madrid,2001

González, P.M. (2008). El teorema de Pitágoras: Una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma*,32,103.

Laing, RA. (1989): Preparing for Pythagoras. *Mathematics Teacher*, 82(6), 271-275.

Loomis, E. Scott. (1968): *The Pythagorean Proposition*. 1927. Reprint, Classics in Mathematics Education series, Wahington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

López, A. S., Alejo, V. V. y Escalante, C. C. (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. Números, (82), 65-87.

Meavilla, V. (1989): Dos demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. *Suma*, 3,39-42.

Nelsen, R. (1993). *Proofs without word: Exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America. Washington D.C., USA

Rosenthal, 1. (1994): The converse of the Pythagorean Theorem. *The Mathematics Teacher*, 87(9), 692-693.

Savora, S. (1996): Pythagorean Triples. *Short Presentations del 8th International Congress on Mathematical Education.* Sevilla.

Schuré, E. (1995): *Los grandes iniciados*. Vol. II. REI Argentina. Buenos Aires.

Strathern, P. (1999*): Pitágoras y su teorema*. Siglo XXI de España Editores. Madrid,

Thomas, I. (1985): Matemáticos griegos. En *Enciclopedia Sigma* 1, 116-135. Ed. Grijalbo. Barcelona.

Vasquez, M.V.(2012). Una ampliación al teorema de Pitágoras. *Revista de E. Matemáticas*, 27(3)

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. American Mathematical Monthly, 3, 65-67, 110-113, 169-171 y 299-300,

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. American Mathematical Monthly, 4, 11-12, 79-81, 168-170, 250-251 y 267-269.

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. American Mathematical Monthly, 5, 73-74.

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. American Mathematical Monthly, 6 , 33-34 y 69-71

Zárate, E. (1996): Generalización del Teorema de Pitágoras. *Educación Matemática*, 8(2), 127-144.

Webgrafía

https://www.GeoGebra.org/m/j6wRRyxB

El Libro de GeoGebra “Pruebas del Teorema de Pitágoras”, creado por Álvaro Mejía, contiene 28 applets que contienen pruebas dinámico-geométricas y dinámico-algebraicas sobre la relación pitagórica. Esta es la página base de los resultados de la investigación.

https://www.GeoGebra.org

Es la página oficial de GeoGebra, software de geometría dinámica que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales.

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

Es la página web del Proyecto Gauss que brinda al profesorado una gran variedad de ítems didácticos y de applets de GeoGebra, que cubren todos los contenidos de matemáticas de Primaria y de Secundaria.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web

La web del Proyecto Descartes ofrece materiales didácticos interactivos, basados en la visualización y en la interacción con los elementos matemáticos, para los niveles de Primaria, ESO y Bachillerato

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/GeoGebra/

La página Webs interactivas de Matemáticas, agrupa diversos temas de los currículos de Matemáticas de ESO y Bachillerato en la que, mediante gráficos interactivos, el alumno recibe una ayuda significativa para la comprensión de la matemática.

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/

El sitio web Actividades con GeoGebra incluye actividades de matemática realizadas con GeoGebra en la que se facilitan recursos para la enseñanza de la geometría a nivel de la ESO y de Bachillerato.

http://tube.GeoGebra.org/student/b615817#

El Libro de GeoGebra Proofs Without Words creado por Steve Phelps, contiene 30 demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras en formato de Hojas Dinámicas.

http://www.GeoGebra.org/m/1988309

En el Libro GeoGebra Puzzles Pitagóricos, creado por Matías Arce, contiene applets con varios de los puzles pitagóricos más famosos de la historia.

https://www.GeoGebra.org/m/BnPMKV3z

El Libro de GeoGebra Teorema de Pitágoras, creado por Vicente Martín Torres, contiene 30 applets que tratan sobre demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras.

https://es.scribd.com/document/224732256/Teorema-de-Pitagoras-Algunas-demostraciones-del-pdf

Página de Fco. Javier García Capitán. Demostraciones resultantes de relaciones de semejanza de triángulos. Demostraciones basadas en propiedades métricas de la circunferencia, en la comparación de áreas y por disección.

http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/

Página de Alexander Bogomolny dedicada al teorema de Pitágoras y sus muchas demostraciones.

http://www.mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html

Página de Eric Weisstein, en la que además de algunas demostraciones, puede encontrarse una extensa bibliografía.

http://elcuadradodelahipotenusa.blogspot.com.es/

Este blog incluye 25 demostraciones del teorema dentro de los diferentes contextos históricos.

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml.
Pythagorean Theorem. Una colección de 118 enfoques para probar el teorema. Muchas de las pruebas están acompañadas por ilustraciones interactivas de Java.

Autor:

Barrantes López, Manuel
Doctor en Matemáticas. Universidad de Extremadura. España.
Profesor titular de la Universidad de Extremadura.
barrante@unex.es

Barrantes Masot, María Consuelo
Grado en Física. Universidad de Valencia. España.
conbarmas @gmail.com

Zamora Rodríguez, Victor.
Doctor en Ingeniería. Universidad de Extremadura. España
Ayudante Doctor. Facultad de Formación del Profesorado.
Universidad de Extremadura.
victor@unex.es

Mejía López, Álvaro Noé
Máster en Investigación en Didáctica de las C. Ex. y de las Matemáticas.
Universidad de Extremadura. España.