

www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica

Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa, José Ortiz Buitrago

Fecha de recepción: 09/11/2018
Fecha de aceptación: 15/04/2019

<p>Resumen</p>	<p>Se presenta un trabajo de revisión y análisis dirigido a caracterizar, desde una perspectiva didáctica, el escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman un curso de resolución de problemas geométricos en ambientes de geometría dinámica; específicamente el caso de experiencias vinculadas a la demostración en Geometría. Las tareas se organizaron según el esquema: Construir → Explorar → Conjeturar → Validar. La resolución de problemas fue la principal estrategia de enseñanza y aprendizaje junto con el uso del Cabri II y el plegado de papel. Se corrobora la importancia de acercar los futuros profesores de matemática a la didáctica de la Geometría escolar.</p> <p>Palabras clave: Didáctica de la Geometría, demostración geométrica, formación inicial de profesores de matemática, razonamiento geométrico de Van Hiele.</p>
<p>Abstract</p>	<p>A review and analysis work is presented aimed at characterizing, from a didactic perspective, the scenario and the learning experiences that make up a course of solving geometric problems in environments of dynamic geometry; specifically the case of experiences related to the demonstration in Geometry. The tasks were organized according to the scheme: Build → Explore → Conjecture → Validate. Problem solving was the main teaching and learning strategy along with the use of Cabri II and paper folding. The importance of bringing future teachers to the didactic of school geometry is highlighted.</p> <p>Keywords: Didactic of Geometry, geometric demonstration, pre-service mathematics teachers, Van Hiele Theory.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Um trabalho de revisão e análise é apresentado visando caracterizar, a partir de uma perspectiva didática, o cenário e as experiências de aprendizagem que compõem um curso de resolução de problemas geométricos em ambientes de geometria dinâmica; especificamente o caso de experiências relacionadas à demonstração em Geometria. As tarefas foram organizadas de acordo com o esquema: Build → Explore → Conjecture → Validate. Resolução de problemas foi a principal estratégia de ensino e aprendizagem, juntamente com o uso do Cabri II e dobra de papel. A importância de trazer futuros professores de matemática para a pedagogia da geometria escolar é corroborada.</p> <p>Palavras-chave: Didática geométrica, demonstração geométrica, formação inicial de professores em matemática, Teoria de Van Hiele.</p>

1. Introducción

La preparación para enseñar Geometría es un asunto que involucra a los formadores de los futuros profesores de Matemática y, en este sentido, se han puesto en juego ciertas acciones dirigidas al desarrollo de competencias para la enseñanza de la Geometría en estudiantes de instituciones de formación docente, como puede apreciarse en Iglesias (2000), quien asumió el diseño y desarrollo de una propuesta integrada por elementos innovadores y de comprobado potencial didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, tales como: (a) el uso de un software de Geometría Dinámica; (b) la aplicación del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, y (c) el enfoque de resolución de problemas. Esta propuesta se materializó a través de un curso sobre *Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora* (en adelante, RPG-AC), el cual fue incorporado, como curso optativo de integración al diseño curricular 1996, aún vigente, de la especialidad de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay).

De modo que, ante la necesidad de comprender los diversos aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos relacionados con la demostración en ambientes de Geometría Dinámica, se ha llevado a cabo un trabajo de revisión y análisis documental dirigido a caracterizar, desde una perspectiva didáctica, el escenario y las experiencias de aprendizaje que conforman el curso de RPG-AC; experiencias especialmente vinculadas a la demostración en Geometría.

Cabe señalar que la integración de los componentes antes mencionados en un programa de formación de futuros profesores de Matemática se justifica porque el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele ha brindado a los docentes de Matemática una teoría coherente para entender y orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría (Jaime y Gutiérrez, 1990; Corberán, 1994; Gutiérrez, 2000; De Villiers, 2010; Aravena Díaz y Caamaño Espinoza, 2013) y, además, su aplicación es significativa en el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje asistidos por los software de Geometría Dinámica (SGD) (Iglesias, 2000). Estos son herramientas tecnológicas que permiten propiciar la construcción del conocimiento geométrico a través de diferentes etapas: (a) exploración de construcciones geométricas, (b) el reconocimiento de patrones o regularidades (propiedades invariantes en una construcción sometida a una transformación), (c) la formulación de conjeturas y (d) la validación de tales conjeturas. Así, pues, en correspondencia con la evolución histórica de la Geometría, los participantes evidenciarían que la intuición precede a los aspectos formales del conocimiento geométrico, sustituyéndose así la aproximación excesivamente rigurosa y axiomática a la Geometría en el ámbito escolar (Luengo González, Blanco Nieto, Mendoza García, Sánchez Pesquero, Márquez Zurita y Casas García, 1997), que ha ocasionado rechazo a esta área de la Matemática. Asimismo, la resolución de problemas geométricos está estrechamente vinculada con el desarrollo de las habilidades asociadas con cada uno de los niveles de razonamiento geométrico propuestos en el modelo de Van Hiele y con el uso de un SGD, asumido este como una herramienta para elaborar y explorar construcciones geométricas.

También es importante tener en cuenta que los conocimientos matemáticos son algo más que la simple sucesión lógica de definiciones y deducciones que constituyen el marco formal del asunto. Según Mills y Tall (1988), en la investigación

matemática, en primer lugar, es necesario desarrollar una estructura en la cual se vinculan ciertas ideas antes que ellas se ordenen en una sucesión lógico - deductiva precisa; por consiguiente, es fundamental proporcionar a los estudiantes las bases cognitivas sobre las cuales los teoremas puedan ser construidos y demostrados.

En este orden de ideas, a continuación se abordara la caracterización de las experiencias de aprendizaje que han conformado el curso de RPG-AC (Iglesias, 2014), teniendo como referencia las actividades propuestas en tres (3) de los talleres realizados, como se muestra la Tabla 1, enfatizando en las construcciones geométricas con regla y compás en un ambiente de Geometría Dinámica (AGD), por tratarse de un asunto presente en cada uno de estos talleres.

Fases de Aprendizaje	Taller nº 1	Taller nº 2	Taller nº 3
Información	Revisar una presentación sobre la caracterización y relevancia histórica de las construcciones geométricas con regla y compás en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.	Leer y analizar el artículo <i>“Explorando ángulos y triángulos con doblado de papel”</i> (Arrieché e Iglesias, 2010).	Siguiendo el esquema de construir, explorar, conjeturar y validar, se plantearon problemas relacionados con el estudio de las definiciones y propiedades de los cuadriláteros concíclicos o circunscribibles y cuadriláteros inscribibles.
Orientación Dirigida	Realizar algunas construcciones con regla y compás, haciendo uso del Cabri – Géomètre II y, luego, elaborar las macros correspondientes.	Realizar la construcción de la herramienta triangular tanto con doblado de papel como en un ambiente de Geometría Dinámica.	
Explicitación	Analizar las construcciones geométricas con regla y compás previamente realizadas, lo cual implicaba la identificación de las definiciones y propiedades geométricas involucradas en cada una de tales construcciones	Analizar las construcciones geométricas previamente realizadas y dar respuesta a las preguntas planteadas en el artículo.	
Orientación Libre	Aplicar los conocimientos geométricos en la realización de construcciones geométricas con regla y compás, dados los objetos iniciales y los objetos finales, sin presentar, en forma explícita, un procedimiento que conduzca a una construcción consistente	Seleccionar la construcción de un objeto geométrico con doblado de papel y, luego, realizar la construcción equivalente con regla y compás en un AGD.	
Integración	Presentar, por escrito y en forma oral, los aspectos relevantes del trabajo realizado en las fases previas.	Presentar, por escrito y en forma oral, los aspectos relevantes del trabajo realizado en las fases previas.	

Tabla 1. Actividades didácticas propuestas en los talleres que conformaron el curso de RPG-AC

2. Las Construcciones con Regla y Compás en un Ambiente de Geometría Dinámica

Las construcciones con regla y compás han ocupado un puesto relevante en la enseñanza de la Geometría tanto por su utilidad práctica como por su contribución al desarrollo teórico.

Euclides, matemático griego, nos legó una manera de organizar el conocimiento aritmético y geométrico, haciendo uso del método axiomático; es decir, “una presentación lógica de la Geometría en la forma de una cadena de proposiciones basadas en unas cuantas definiciones y suposiciones iniciales” (Siñeriz, 2000, p. 194). Cabe recordar que, en la antigua Grecia, la Geometría abandonó su carácter empírico-práctico, adquiriendo así un carácter lógico-deductivo; teniéndose como punto de inflexión la publicación de una obra compilatoria del conocimiento matemático intitulada Elementos. En la versión actualizada y traducida al español por la Editorial Gredos, los Elementos son un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 465 proposiciones distribuidas en 13 libros. Estos trece libros abarcan los siguientes temas (libros): (a) Geometría Plana (I al IV). (b) Proporcionalidad (V y VI). (c) Aritmética (VII al IX). (d) Inconmensurabilidad (X). (e) Geometría del Espacio (XI al XIII).

Entre los métodos utilizados en los Elementos destaca el procedimiento de construcción de figuras con regla y compás; tales construcciones - como lo señala Siñeriz (2000) - no tenían por objetivo “la realización efectiva de la construcción, sino mostrar por un encadenamiento lógico de proposiciones que algo es construible con regla y compás” (p. 195). Las primeras tres proposiciones del Libro I sirven para ilustrar la metodología de trabajo empleada en los Elementos de Euclides y el uso de la regla y el compás: (I.1) Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados. (I.2) Transportar un segmento a un punto dado (como extremo). (I.3) Dados dos segmentos, cortar del mayor un segmento igual al menor. Cabe señalar que, para los antiguos geómetras griegos, la regla era ilimitada, sin marcas y tenía un solo borde y el compás era un instrumento que solo trazaba circunferencias de centro dado pasando por un punto dado; en otras palabras, ningún instrumento podía usarse para transportar distancias. Esto significa que la regla no podía marcarse, y que el compás había de tener la característica que si una de sus patas se levantaba del papel, el instrumento se cerraba. A diferencia del compás euclídeo, el compás moderno conserva su abertura y, por tanto, puede utilizarse para transportar distancias. Es necesario indicar que las primeras tres proposiciones del Libro I de Euclides establecen la equivalencia entre el compás euclídeo y el compás moderno.

Dada la relevancia histórica del tema, el primer taller del curso de RPG-AC se centró en el estudio de las construcciones geométricas con regla y compás en un ambiente de Geometría Dinámica, ya que, esto permitiría a los participantes: (a) Familiarizarse con los botones de herramientas disponibles en el Cabri Géomètre II (en adelante, Cabri II). (b) Realizar una construcción consistente con regla y compás de un(os) objeto(s) geométrico(s), a partir de un(os) objeto(s) inicial(es) dado(s). (c) Reconocer relaciones geométricas entre los objetos que conforman una construcción con regla y compás. (d) Identificar las definiciones y propiedades geométricas involucradas en cada una de las construcciones realizadas.

Para ello, las actividades propuestas – como se muestra en la Tabla 1 – se organizaron siguiendo las fases de aprendizaje propuestas en el modelo de Van Hiele; destacando que una vez realizada una exposición sobre la caracterización y relevancia histórica de las construcciones geométricas con regla y compás en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, se entregó una hoja de trabajo que contemplaba las actividades dirigidas y las actividades libres. Para su descripción es necesario tener en consideración que en una construcción geométrica, se pueden identificar los siguientes elementos: (a) Objetos iniciales (lo dado), (b) Procedimiento de construcción que incluye los objetos auxiliares, y (c) Objetos finales (lo que se quiere construir). Además, en los SGD, los objetos geométricos suelen ser clasificados atendiendo a dos criterios distintos, pero relacionados entre sí: modo de construcción y grados de libertad (Bainville, 2003).

En atención al modo de construcción, se establece la siguiente clasificación: (a) Objetos Elementales, entre los cuales se distinguen los objetos libres (punto, recta y circunferencia) y los objetos definidos por puntos (segmento, recta definida por dos puntos, semirrecta, vector, triángulo definido por tres puntos no alineados, polígonos y circunferencia definida por el centro y otro punto). (b) Objetos construidos: son todos aquellos objetos que pueden construirse haciendo uso de los botones construcciones y macro-construcciones.

En atención a los grados de libertad que poseen al ser desplazados sobre la hoja de trabajo, los objetos se clasifican en: (a) Objetos bases: Los objetos libres y los puntos construidos por objetos. (b) Objetos dependientes: Los objetos construidos (salvo los puntos definidos por objetos) y los objetos definidos por puntos. Esto es relevante, ya que, por ejemplo, al trazar la mediatriz de un segmento dado, haciendo uso del Cabri II, se establece una relación de dependencia entre el segmento dado (objeto inicial que funciona como un objeto base) y su correspondiente mediatriz (objeto dependiente).

Actividades dirigidas: Lea atentamente el procedimiento señalado en cada una de las actividades propuestas y, luego, aplíquelo haciendo uso del Cabri II.	
1. Construcción de un “compás”.	OBJETO(S) INICIAL(ES) DADO(S)
2. Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento.	PROCEDIMIENTO DADO
3. Construcción de un ángulo que mida 60° usando solamente regla y compás.	
4. Construcción de un ángulo que mida 45° usando solamente regla y compás.	
5. Trazado de la bisectriz de un ángulo dado.	OBJETOS FINAL(ES) POR CONSTRUIR
6. División de un segmento de recta en n partes iguales.	

Tabla 2. Actividades dirigidas propuestas en el Taller nº 1 del curso de RPG-AC

En las actividades dirigidas, como se muestra en la Tabla 2, a partir de los objetos iniciales, se indica el procedimiento a seguir para construir el objeto deseado; por ende, los participantes solo necesitan seguir el procedimiento indicado y utilizar adecuadamente los botones de herramientas disponibles en el Cabri II para realizar una construcción consistente. Sin embargo, el docente debe procurar que los estudiantes centren su atención en las relaciones existentes entre los objetos

que conforman tal construcción y este es el punto clave para aproximarse al proceso de demostración en Geometría. Para ilustrar lo aquí planteado, se tomará como referencia la actividad dirigida nº 6, División de un segmento de recta en n partes iguales:

1. Trace el segmento AB.
2. Trace una semirrecta con origen en el punto A y que no esté contenida en el segmento AB.
3. Con el compás, haga centro en A y con una abertura arbitraria, trace un arco de circunferencia que corte a tal semirrecta en el punto 1. Utilizando la misma abertura de compás, haga centro en 1 y trace un arco de circunferencia que corte a la semirrecta en el punto 2. Así, sucesivamente, hasta trazar n divisiones en tal semirrecta.
4. Enumere los puntos de corte del 1 al n .
5. Une el punto n con el punto B.
6. Trace rectas paralelas al segmento nB que pasen por los puntos $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$.
7. Determina los puntos de corte de estas rectas paralelas con el segmento AB.
8. ¿En cuáles definiciones y propiedades geométricas se sustenta esta construcción?

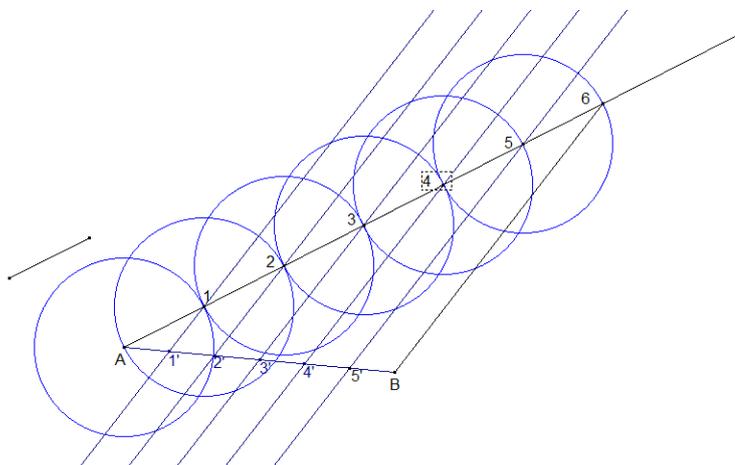


Figura 1. División de un segmento en n partes iguales (en este caso, $n = 6$).

Esta actividad requería de la aplicación de los criterios de semejanza para triángulos, ya que, los triángulos Aii' , con $i: 1, 2, 3, 4, 5$ y $A6B$ son semejantes (ver Figura 1). Cabe señalar que, al revisar las construcciones realizadas por los cinco grupos de trabajo, se observó que siguieron el procedimiento dado y las herramientas utilizadas se corresponden con lo requerido en cada uno de los pasos como se muestra en la Tabla 3; solo hubo variaciones en el número de partes en las que dividieron el segmento AB.

Instrucciones dadas	Herramientas empleadas
---------------------	------------------------

1. Trace el segmento AB.	A B	Punto Punto Segmento: A, B
2. Trace una semirrecta con origen en el punto A y que no esté contenida en el segmento AB.	Punto	Semirrecta: A Punto Segmento: , _
3. Con el compás, haga centro en A y con una abertura arbitraria, trace un arco de circunferencia que corte a tal semirrecta en el punto 1. Utilizando la misma abertura de compás, haga centro en 1 y trace un arco de circunferencia que corte a la semirrecta en el punto 2. Así, sucesivamente, hasta trazar n divisiones en tal semirrecta.	C ₁ 1 C ₂ 2 C ₃ 3 C ₄	Círculo (Compás): A, _ Punto (Punto(s) de intersección): , _ Círculo (Compás): 1, _ Punto (Punto(s) de intersección): , _ Punto (Punto(s) de intersección): , _ Círculo (Compás): 2, _ Punto (Punto(s) de intersección): , _ Punto (Punto(s) de intersección): , _ Círculo (Compás): 3, _ Punto (Punto(s) de intersección): , _
4. Enumere los puntos de corte del 1 al n	4 C ₅ 5 C ₆ 6	Punto (Punto(s) de intersección): , _ Círculo (Compás): 4, _ Punto (Punto(s) de intersección): , _ Punto (Punto(s) de intersección): , _ Círculo (Compás): 5, _ Punto (Punto(s) de intersección): , _ Punto (Punto(s) de intersección): , _
5. Une el punto n con el punto B.		Segmento: B, 6
6. Trace rectas paralelas al segmento nB que pasen por los puntos n - 1, n - 2, ..., 2, 1.	L ₅ L ₄ L ₃ L ₂ L ₁	Recta (Recta paralela): 5, _ Recta (Recta paralela): 4, _ Recta (Recta paralela): 3, _ Recta (Recta paralela): 2, _ Recta (Recta paralela): 1, _
7. Determina los puntos de corte de estas rectas paralelas con el segmento AB.	5' 4' 3' 2' 1'	Punto (Punto(s) de intersección): , _ Punto (Punto(s) de intersección): , _

Tabla 3. Correspondencia entre el procedimiento dado y las herramientas empleadas

En cuanto a las respuestas dadas a la pregunta: ¿En cuáles definiciones y propiedades geométricas se sustenta esta construcción?, pudiera decirse que el grupo n° 1 hace referencia a la aplicación de la generalización del teorema de Thales, aunque no lo aplican en forma explícita; previamente realizan un resumen del procedimiento empleado (entre corchetes), lo cual es un rasgo atribuido a los esquemas de argumentación fáctico: “[Cuando la semirrecta que tiene origen en A y no contiene el segmento AB, es dividida en (n) partes iguales con la longitud del segmento auxiliar PQ y luego se traza el segmento Bn, procedemos a trazar rectas paralelas a Bn que pasen por todos y cada uno de los puntos en lo que hemos dividido la semirrecta An]. Entonces el teorema de Thales nos permite asegurar que los puntos de intersección entre las paralelas al segmento Bn están dividiendo en n partes iguales al segmento AB”. Cabe recordar que la generalización del teorema de Thales establece que: Si dos rectas r y s en un plano se cortan por varias rectas paralelas, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los segmentos correspondientes en la otra. Los segmentos que se

determinan en una de ellas son proporcionales a sus correspondientes en la otra recta.

El grupo nº 2 trabajó con la división del segmento AB en tres partes iguales (ver Figura 2), siguiendo el procedimiento indicado por la facilitadora del curso de RPG-AC.

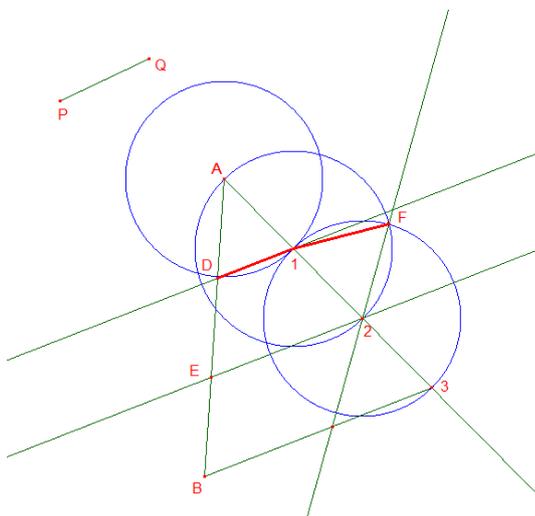


Figura 2. División de un segmento en tres partes iguales (grupo nº 2)

Nótese que los puntos D, 1 y F no están alineados y, por ello, los ángulos $\angle D1A$ y $\angle F12$ no son ángulos opuestos por el vértice, aunque en ciertos casos pareciera que sí lo son. Por ende, como se comenta en la Tabla 4, donde se da a conocer la justificación dada por el grupo nº 2, se basan en premisas falsas, posiblemente dejándose llevar por su percepción visual, en vez de las relaciones existentes entre los objetos geométricos que intervienen en la construcción realizada. Además, sirve para ilustrar cómo es posible establecer conclusiones válidas a partir de premisas falsas, permitiendo probar lo que se pide (en este caso que $AD = DE = EB$).

Justificación dada	Observaciones
<ol style="list-style-type: none"> 1. Los segmentos A1 y 12 son congruentes; por hipótesis (por construcción ambos segmentos tienen longitud PQ) 2. El segmento 1F es congruente con el segmento D1; por hipótesis "segmento auxiliar" 3. El ángulo D1A es congruente con el ángulo F12; por ser ángulos opuestos por el vértice 4. Los triángulos A1D y 21F son congruentes; criterio de congruencia LAL, afirmaciones 1,2 y 3 5. Los ángulos AD1 y 2F1 son congruentes; por partes correspondientes de triángulos congruentes, afirmación 4 6. La recta DF es una secante del segmento AB y la recta GF; por hipótesis 7. El segmento AB y la recta GF son paralelos; 	<p>El segmento 1F es radio de la circunferencia C2 (1, PQ) y D1 no es radio de circunferencia alguna; aunque, en la Figura 2, pareciera que la circunferencia C1 (A, PQ) pasa por D. Además, los puntos D, 1 y F no están alineados y, por ello, los ángulos $\angle D1A$ y $\angle F12$ no son ángulos opuestos por el vértice.</p> <p>Por lo tanto, no es posible garantizar que los triángulos AD1 y 2F1 son congruentes por el postulado LAL y que, por partes correspondientes de triángulos congruentes (PCTC),</p>

<p>Si una recta es secante de otras dos y sus ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas, afirmaciones 5 y 6</p> <p>8. Los segmentos ED y F2 están contenidos en el segmento AB y la recta GF respectivamente, por información de la figura</p> <p>9. Los segmentos AD y F2 son congruentes; afirmación 4.</p> <p>10. Los segmentos ED y F2 son paralelos; afirmaciones 7 y 8</p> <p>11. Los segmentos D1 y E2 son paralelos; por hipótesis</p> <p>12. Los segmentos los segmentos DF y E2 son paralelos; afirmaciones 2 y 11</p> <p>13. El cuadrilátero DF2E es un paralelogramo; afirmaciones 10 y 12</p> <p>14. Los segmentos DE y F2 son congruentes; propiedad de paralelogramo, afirmación 13</p> <p>15. El segmento DE es congruente con el segmento AD; afirmaciones 9 y 14</p> <p>16. La recta DF es paralela al segmento B3; por hipótesis</p> <p>17. El ángulo D1A es congruente con el ángulo B3A; definición de ángulos correspondientes</p> <p>18. El ángulo G32 es congruente con el ángulo B3A; son el mismo ángulo</p> <p>19. El ángulo G32 es congruente con el ángulo F12; afirmaciones 3, 17 y 18</p> <p>20. Los ángulos 12F y 32G son congruentes; ángulos opuestos por el vértice</p> <p>21. Los segmentos 12 y 23 son congruentes; hipótesis</p> <p>22. El triángulo 23G es congruente con el triángulo 12F; afirmaciones 19, 20 y 21; criterio de congruencia LAL</p> <p>23. Los segmentos G2 y 2F son congruentes; afirmación 22</p> <p>24. Los segmentos G2 y BE están contenidos en el segmentos AB y la recta GF respectivamente; por información de la figura</p> <p>25. Los segmentos G2 y BE son paralelos; afirmaciones 7 y 24</p> <p>26. Los segmentos E2 y BG son paralelos; hipótesis</p> <p>27. El cuadrilátero BE2G es un paralelogramo; afirmaciones 25 y 26</p> <p>28. Los segmentos BE y G2 son congruentes; propiedad de los paralelogramos, afirmación 27</p> <p>29. Los segmentos BE y DE son congruentes; afirmaciones 14 y 22</p> <p>30. Los segmentos AD, DE y EB son congruentes; afirmaciones 15 y 29</p>	<p>los ángulos AD1 y 2F1 lo sean.</p> <p>Por lo cual, no están dadas las condiciones para aplicar el teorema AIP (ángulos alternos congruentes – rectas paralelas) en 7 y garantizar que los segmentos ED y F2 son paralelos en 10. Por lo tanto, se van estableciendo conclusiones válidas a partir de premisas falsas, siendo posible llegar a lo que se pide demostrar:</p> <p style="text-align: center;">$AD = DE = EB$</p> <p>Nótese que la demostración estuvo centrada en probar que los triángulos AD1, 2F1 y 2G3 son congruentes y que los cuadriláteros DF2E y BE2G son paralelogramos, lo cual hubiera sido valido, si por el punto 2 hubiesen trazado una paralela al segmento AB (ver afirmaciones nº 13, 22 y 27 y Figura 2).</p> <p>Sin embargo, se considera que utilizan un esquema de argumentación analítico, ya que, construyen una cadena lógico – deductiva sustentada en definiciones y propiedades geométricas conocidas.</p>
--	---

Tabla 4. Justificación dada por el grupo nº 2 en la actividad dirigida nº 6

Los integrantes del grupo nº 3 siguieron las instrucciones y emplearon las herramientas de construcción adecuadas, pero no respondieron la pregunta

formulada con lo cual no es posible la identificación de esquema de argumentación alguno.

El grupo nº 4 procedió a dividir al segmento AB en nueve partes iguales, observándose, al revisar la construcción, que existe correspondencia entre los pasos del procedimiento de construcción y las herramientas empleadas. A partir de la construcción y aplicando el teorema PAC garantizan por el criterio de semejanza AA que los triángulos indicados son semejantes y, por partes correspondientes de triángulos semejantes, que los pares de lados correspondientes son proporcionales:

“Por el teorema de Thales, sean \overline{AB} y \overline{An} dos rectas que se intersecan en el punto A, asimismo dichas rectas cortan a un conjunto n de rectas paralelas, formando así $\Delta A1'1$, $\Delta A2'2$, $\Delta A3'3$, $\Delta A4'4$, $\Delta A5'5$, $\Delta A6'6$, $\Delta A7'7$, $\Delta A8'8$, ΔABn . Estos triángulos tienen un ángulo común A, además los ángulos con vértice en los puntos 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', B son iguales por ser ángulos correspondientes entre rectas paralelas cortadas por una secante. Por el segundo criterio de semejanza (AA), se tiene $A1'1 \sim \Delta A2'2 \sim \Delta A3'3 \sim \Delta A4'4 \sim \Delta A5'5 \sim \Delta A6'6 \sim \Delta A7'7 \sim \Delta A8'8 \sim \Delta ABn$, en consecuencia:

$$\frac{A1}{A1'} = \frac{12}{1'2'} = \frac{23}{2'3'} = \frac{34}{3'4'} = \frac{45}{4'5'} = \frac{56}{5'6'} = \frac{67}{6'7'} = \frac{78}{7'8'} = \frac{8n}{8'B}$$

Por ende, queda determinada así la división del \overline{AB} en n partes proporcionales”.

Sin embargo, no demuestran que $A1' = 1'2' = 2'3' = 3'4' = 4'5' = 5'6' = 6'7' = 7'8' = 8'B$. Se considera que sería sencillo hacerlo conociendo que, por ser radios de circunferencias congruentes, los segmentos A1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 y 8n son congruentes y operando aritméticamente se llega a lo que se quiere demostrar. También, se observan ciertas imprecisiones en el uso del lenguaje porque hablan de ángulos iguales en vez de ángulos congruentes, así como la división del segmento AB en n partes proporcionales en vez de su división en n partes iguales. Se observa el uso de un esquema de argumentación analítico, asumiendo como hipótesis las condiciones que se deducen de la construcción realizada. Cabe señalar que el teorema PAC establece que: Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, cada dos ángulos correspondientes son congruentes; el criterio de semejanza AA señala que: si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces ambos triángulos son semejantes y, por partes correspondientes de triángulos semejantes, los tres pares de lados correspondientes son proporcionales.

El grupo nº 5 dividió el segmento AB en cuatro partes iguales, siguiendo el procedimiento indicado; en cuanto a la justificación dada, esta es similar a la presentada por el grupo nº 4; por ende, se estaría en presencia de un esquema de argumentación analítico sustentado en las relaciones entre los objetos que intervienen en la construcción (radios de circunferencias congruentes y rectas paralelas cortadas por una secante).

Cuatro de los cinco grupos reconocieron que la división de un segmento en n partes iguales se sustenta en la generalización del teorema de Thales. Este tema

junto con la semejanza de triángulos fue estudiado por los participantes en el curso de Geometría II.

Actividades libres: Describa un procedimiento para realizar una construcción geométrica consistente con R y C que les permita construir la figura geométrica señalada.	
1. Construcción de un triángulo dadas las longitudes de sus tres lados.	OBJETO(S) INICIAL(ES) DADOS
2. Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.	PROCEDIMIENTO POR ESTABLECER
3. Construcción de un triángulo dadas las medidas de un par de ángulos y la longitud del lado comprendido entre ellos.	
4. Construcción de un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial).	
5. Construcción de un triángulo equilátero ABC dado uno de sus lados.	
6. Construcción de un rombo PQRS dadas sus diagonales PR y QS.	OBJETOS FINAL(ES) DADOS

Tabla 5. Actividades libres propuestas en el Taller nº 1 del curso de RPG-AC

En las *actividades libres*, como se muestra en la Tabla 5, a partir de los objetos iniciales, los participantes tienen que establecer un procedimiento que les permita realizar una construcción consistente con regla y compás del (los) objeto(s) final(es). Por ende, los participantes requieren establecer relaciones entre lo conocido y lo que les piden construir a partir de lo que conocen (definiciones y propiedades), para lograr establecer el procedimiento a seguir y, además, garantizar que el objeto construido es el esperado y no otro. Para ilustrar esta situación, se tendrá como referencia la actividad libre nº 4, construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial), la cual admite diferentes formas de construcción y, por ende, diferentes formas de validación. En la Tabla 6, a modo de ejemplificación, se muestra el procedimiento de construcción nº 1.

Al revisar los informes escritos y los correspondientes archivos .fig (con la opción “mostrar la descripción”), se notó lo siguiente: (a) Cada uno de los grupos de trabajo inicia la construcción, teniendo en cuenta el objeto inicial: un lado del cuadrado; (b) además, en la descripción del procedimiento empleado para construir el cuadrado, dado uno de sus lados, emplean un vocabulario apropiado; (c) las herramientas empleadas se corresponden con lo establecido en cada uno de los pasos que conforman el procedimiento de construcción; (d) no justifican que la construcción realizada sea consistente; en algunos casos, se limitan a verificar empíricamente que el cuadrilátero construido es un cuadrado, ya sea, midiendo la longitud de cada uno de sus lados o marcando a cada uno de sus ángulos internos. Cabe decir que, en el Cabri II, cuando se marca un ángulo que resulta ser un ángulo recto, se coloca la marca acostumbrada.

Construcción nº 1	
Procedimiento	Comentarios

<p>Dado un segmento de extremos A y B Se traza una recta L_1 perpendicular al segmento AB en A. Entonces el ángulo con vértice en A es un ángulo recto.</p>	<p>Este procedimiento garantiza que, en el cuadrilátero ABCD se cumple que:</p>
<p>Con el compás, haciendo centro en A y pasando por el punto B, se traza una circunferencia C_1 que corta a la recta L_1 en D. Así, los segmentos AB y AD son congruentes por ser radios de una misma circunferencia.</p>	<p>$AB = AD = DC$ y que los ángulos $\angle DAB$ y $\angle ADC$ son rectos.</p>
<p>Se traza una recta L_2 perpendicular al segmento AD en D. De modo que el ángulo con vértice en D es un ángulo recto.</p>	<p>Haría falta probar que $AB = AD = DC = CD$ y que los ángulos $\angle DCB$ y $\angle CBA$ son ángulos rectos.</p>
<p>Con el compás haciendo centro en D y pasando por el punto A, se traza una circunferencia que corta a la recta L_2 en C. Así se cumple que $AD = DC$ (por ser radios de la circunferencia C_2).</p>	<p>En efecto, se conoce que, en un plano E, las rectas AB y L_2 son perpendiculares a la recta L_1 y, por ende, se tiene que $AB \parallel L_2$. Como, además, $AB = DC$ y el segmento DC está contenido en la recta L_2, se cumple que, en el cuadrilátero ABCD, los segmentos AB y DC son paralelos y congruentes y, por tanto, tal cuadrilátero es un paralelogramo. Asimismo, se conoce que en un paralelogramo ambos pares de lados y ángulos opuestos son congruentes, con lo cual se establece que: $AD = BC$, $m(\angle DCB) = 90^\circ$ y $m(\angle CBA) = 90^\circ$.</p>
<p>Se traza el segmento CD.</p>	

Tabla 6. Construcción de un cuadrado dado uno de sus lados

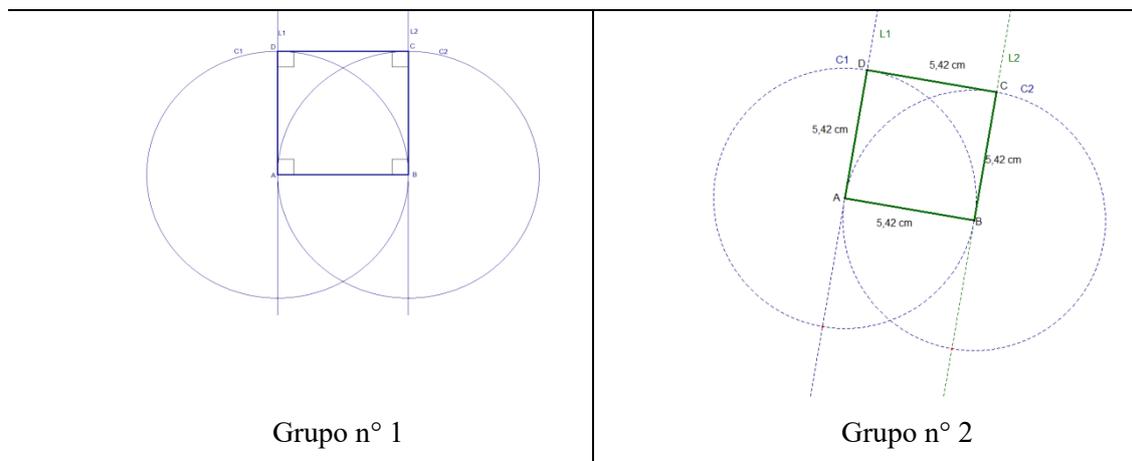


Figura 3. Verificación empírica de los atributos relevantes de un cuadrado

En la Figura 3, nótese que el grupo n° 1 verifica (marcándolos) que los ángulos internos del cuadrilátero ABCD son rectos, mientras que el grupo n° 2 verifica que los lados de tal cuadrilátero son congruentes entre sí. Ambos grupos, según el caso, no verifican que se satisfaga el otro atributo relevante para que el cuadrilátero ABCD sea un cuadrado [los lados de un cuadrado son congruentes entre sí (grupo n° 1) y sus cuatro ángulos internos son rectos (grupo n° 2)].

La construcción realizada por el grupo n° 4 también se corresponde con las realizadas por los grupos n° 1 y 2; pero, en este caso, no realizan verificación alguna (ni de la longitud de cada uno de los lados del cuadrilátero ABCD, ni de la medida de cada uno de sus ángulos internos).

El grupo nº 5 presentó la siguiente descripción del procedimiento de construcción empleado:

1. Se coloca el lado AB (lado del cuadrado que se da como dato) en la posición de la base.
2. Por los extremos del segmento AB se trazan dos rectas perpendiculares al segmento.
3. Mediante dos arcos de circunferencia con el radio de la longitud del segmento dado, se traza una por el punto A y la otra por el punto B, cortando las rectas perpendiculares.
4. Se unen los cuatro puntos y se obtiene el cuadrado pedido.

Cabe preguntarse: ¿Qué significa que “se coloca el segmento AB en la posición de la base”? ¿Esto significa que lo colocan en posición horizontal? Pareciera que la presentación de las figuras geométricas en posiciones clásicas es una idea arraigada en la mente de los profesores en formación, a pesar de lo discutido en clases. Sin embargo, en el informe escrito, el grupo nº 5 agrega a la descripción el siguiente comentario (así lo denominan):

“Nótese que la figura construida es un cuadrado, ya que, al partir de un lado para construir los otros tres, trazamos rectas perpendiculares a dicho segmento dado y luego sobre ellas copiamos la medida del segmento inicial AB con el compás, los segmentos AD y BC son congruentes entre sí por ser (**radios de**) circunferencias de un mismo radio, y que su vez son congruentes con el segmento AB. Luego unimos los puntos D y C que (**y el segmento DC**) es congruente con el segmento AB, en conclusión al ser todos sus lados iguales y poseer cuatro ángulos rectos por ser los segmentos DA perpendicular con el segmento AB, CB perpendicular con AB y los segmentos DA perpendicular con el segmento DC, CB perpendicular con DC, con lo que por definición el paralelogramo es un cuadrado”.

Lo colocado entre paréntesis y en negritas ha sido agregado para mejor seguimiento de las ideas aquí planteadas. En el comentario, dan por cierto que los ángulos con vértice en los puntos C y D son rectos y $CD = AB$ (lo que falta por demostrar); pero no lo demuestran como una consecuencia lógica de las relaciones establecidas entre los objetos que conforman esta construcción. Pudiera decirse que los integrantes del grupo nº 5 manifiestan un esquema de argumentación fáctico, al centrar su comentario en un recuento del procedimiento de construcción del cuadrado ABCD.

El grupo nº 3 siguió una construcción distinta a las previstas por los investigadores, ya que se limitó a trabajar con las herramientas que le permitiera trazar líneas rectas y circunferencias (tal como si estuvieran trabajando con regla y compás en un entorno de lápiz y papel); cabe advertir que en el Cabri II se dispone de botones de herramientas que permiten trazar de manera inmediata, por ejemplo, rectas perpendiculares o rectas paralelas, lo cual no es posible si se está trabajando solo con regla y compás (sin emplear las escuadras disponibles en un juego geométrico) (ver Figura 4). Este grupo no realizó verificación empírica alguna, ni justificó la validez de esta construcción.

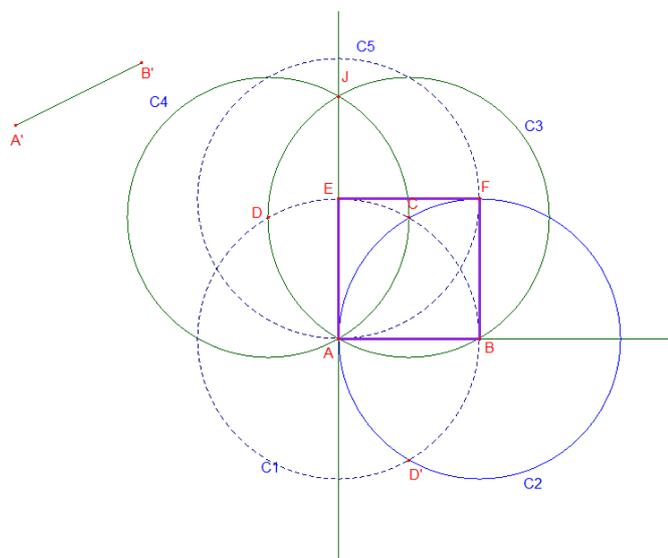


Figura 4. Construcción de un cuadrado realizada por el grupo n° 3

3. Construir, explorar, conjeturar y validar

Teniendo en cuenta que los estudiantes para profesores de Matemática, desde una perspectiva del aprendizaje situado, necesitan participar en tareas cercanas al quehacer matemático, susceptibles de ser puestas en práctica en el ámbito de la educación básica, las tareas matemáticas propuestas en el curso de RPG-AC se han organizado siguiendo el esquema:

Construir → Explorar → Conjeturar → Validar

Esquema que además ha sido tomado en consideración por otros educadores matemáticos como Alsina Catalá, Fortuny Aymemí y Pérez Gómez (1997), Perry Carrasco, Camargo Uribe, Samper de Caicedo y Rojas Morales (2006) y Flores (2007). Como se mostró en la Tabla 1, en el curso de RPG-AC se ha enfatizado en las construcciones geométricas con regla y compás haciendo uso de un SGD como el Cabri II y las construcciones geométricas con doblado de papel, ya que para realizar una construcción consistente, se requiere tener en cuenta las relaciones existentes entre los elementos que conforman una construcción (objetos iniciales, auxiliares y finales), para garantizar que se ha construido el objeto esperado, a partir de las condiciones dadas.

Según Alsina Catalá et al. (1997, p. 126), “el análisis de cuestiones métricas o algebraicas con la ayuda de Cabri permite inducir descubrimientos muy interesantes siguiendo, esencialmente, el proceso: Diseñar → Explorar → Modelizar → Conjeturar → Definir → Argumentar → Demostrar”. Por ello, identifican siete (7) tipos de actividades geométricas con Cabri: (a) *Diseño* (manejar las herramientas disponibles en el software); (b) *Exploración* (seguir o elaborar procedimientos para construir figuras geométricas, incluyendo el reconocimiento de atributos relevantes); (c) *Modelización* (encontrar una estructura matemática que dote de sentido a una construcción o transformación geométrica); (d) *Formulación de conjeturas* (hallar una afirmación formal a partir de un descubrimiento); (e) *Definición* (nombrar y asignar caracterizaciones); (f) *Argumentación* (dar conjeturas en una manera

descriptiva), (g) *Acercamiento deductivo* (validar haciendo uso de inferencias lógicas). Si bien los autores distinguen entre argumentación y acercamiento deductivo (demostración), reconocen el papel que juegan las prácticas argumentativas en una clase de Geometría ya que entre los indicadores de la argumentación (como Cabri – actividad), mencionan formular razonamientos basados en casos y generalizaciones simples, hacer sentencias declarativas y explicitar experiencias interesantes. Estos indicadores servirían de base para establecer razonamientos deductivos con inferencias lógicas que permitan probar una conjetura.

Asimismo, Perry Carrasco et al. (2006), al presentar una caracterización de la actividad demostrativa a través de manifestaciones de desempeño de las acciones realizadas por los participantes en un curso de Geometría Plana en la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá – Colombia), reconocen el fuerte lazo que habría que establecer entre la producción de una demostración formal y algunas acciones de carácter heurístico vinculadas con el proceso para la producción de una justificación (explicación, prueba y demostración formal). Además, señalan que la argumentación es el razonamiento asociado a todas las acciones que conforman la actividad demostrativa y, por ello, sirve de puente entre las acciones de proceso y producto.

Para Perry Carrasco et al. (2006, p. 27), entre las acciones de carácter heurístico, se encuentran:

1. *Visualización*: “Mirada sobre la representación gráfica que se enfoca”.
2. *Exploración*: “Acción visible sobre la representación gráfica para estudiar una situación con un propósito específico relacionado con la solución del problema”.
3. *Conjeturación*: “Establecimiento de un enunciado, del que se tiene seguridad, expresado en forma general, como una implicación”.
4. *Verificación*: “Acciones visibles sobre la representación gráfica para poner a prueba la conjetura establecida”.
5. *Análisis*: “Formulación de relaciones de dependencia entre propiedades geométricas presentes en la situación”.

Flores (2007) diseñó un experimento de enseñanza con profesores de Matemática del bachillerato en México, haciendo uso del Geometer’s Sketchpad, que incorporó actividades de construcción, de análisis y de discusión. Según el autor,

Las actividades de construcción incluyen la explicación del por qué funciona la construcción, es decir, implican un proceso de formación y prueba de conjeturas; éstas son las más importantes de la propuesta, pues en ellas se tiene que poner atención a las relaciones entre los elementos que las conforman y el proceso de construcción en sí (p. 74).

Por ende, en el taller nº 3 del curso de RPG-AC, siguiendo el esquema de construir → explorar → conjeturar → validar, se plantearon problemas relacionados con el estudio de las definiciones y propiedades de los cuadriláteros concíclicos o circunscribibles y cuadriláteros inscribibles. Se trata de un tema no contemplado en los programas de los cursos de Geometría I y Geometría II, pero que se consideraba susceptible de ser abordado por los participantes en función de los conocimientos previos. Este taller se organizó en torno a siete (7) actividades; en la

Tabla 7, a modo de ilustración, se muestran las dos primeras. Cabe señalar que, para la realización del taller nº 3, los participantes del curso de RPG-AC se reorganizaron y conformaron tres grupos de trabajo.

Las actividades propuestas en el taller nº 3 comparten ciertos rasgos que Flores (2007) considera relevantes para las actividades a ser realizadas en un AGD: las propiedades geométricas pueden obtenerse como conjeturas a partir de la exploración de las construcciones realizadas, pero la validación de tales conjeturas no es inmediata; aunque, por lo general, exigen la puesta en práctica de conocimientos y habilidades geométricas vinculadas con la Geometría Plana (conceptos y propiedades que se estudian en los cursos previos del área de Geometría).

Nº	Actividades	Comentarios
1	<p>Construya una circunferencia con centro en O y radio r. Trace una cuerda AB correspondiente a dicha circunferencia. La cuerda AB subtiende dos arcos de circunferencia: ACB y ADB. Construya el cuadrilátero $ACBD$. Se dice que el cuadrilátero $ACBD$ es concíclico o circunscrible. Establezca la definición de cuadrilátero concíclico.</p>	<p>Se pretendía que, a partir de la construcción del cuadrilátero $ACBD$, se estableciera la definición de cuadrilátero concíclico, lo cual exige el reconocimiento de sus atributos relevantes. Uno de ellos: los vértices de un cuadrilátero concíclico pertenecen a una misma circunferencia.</p>
2	<p>Mida cada uno de los ángulos internos del cuadrilátero $ACBD$. Sume las medidas de sus ángulos opuestos. ¿Qué concluye? ¿Puede validar tal conjetura?</p>	<p>Teniendo como referencia el cuadrilátero previamente construido, se marcan cada uno de sus ángulos internos y, luego, se miden, obteniendo que las sumas de las medidas de los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico es 180°. La clave de la validación de esta conjetura está en reconocer que, por ejemplo, la diagonal AB descompone al cuadrilátero $ABCD$ en dos triángulos, así como conocer y aplicar la propiedad que los ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia son congruentes.</p>

Tabla 7. Actividades propuestas en el taller nº 3 del curso de RPG-AC

Los tres grupos demostraron tener dominio técnico de las herramientas disponibles en el Cabri II; se observa como el grupo nº 1 construyó una circunferencia con centro en O y radio r , donde r es la longitud de un segmento auxiliar, para así usar la opción *Círculo (Compás): O, r* ; mientras que, los grupos nº 2 y 3 emplearon la opción *Círculo: O, P* , donde O es el centro de la circunferencia y P un punto por el cual pasa. También se observa que el grupo nº 1 trazó la cuerda AB y ubicó los puntos C y D , pero no marcó - en forma explícita - los arcos ACB y ADB , cual sí lo hicieron los grupos nº 2 y 3. Para construir el cuadrilátero $ACBD$, los grupos nº 1 y 3 trazaron cada uno de sus lados AC , CB , BD y AD , mientras que el grupo nº 2 empleó la opción polígono: $ACBD$. También se observa que quizá teniendo en cuenta la siguiente actividad, los grupos nº 1 y 3 trazaron la otra diagonal CD del cuadrilátero, así que también que el grupo nº 3, procedió a marcar diversos ángulos (ver Figura 5).

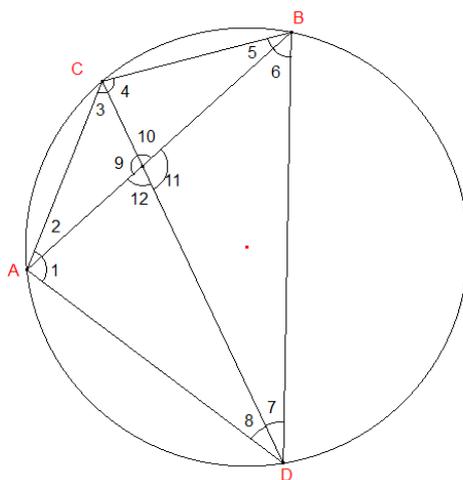


Figura 5. Construcción del cuadrilátero concíclico ACBD realizada por el grupo nº 3

Al leer las definiciones de cuadrilátero concíclico, se observa que los tres grupos reconocen que sus vértices pertenecen a una misma circunferencia y, además, los grupos nº 2 y 3 establecen que un cuadrilátero concíclico está inscrito en una circunferencia, con lo cual lo reconocen como parte de la clase de los polígonos inscritos en una circunferencia.

La actividad nº 2 establecía lo siguiente: Mida cada uno de los ángulos internos del cuadrilátero ACBD. Sume las medidas de sus ángulos opuestos. ¿Qué concluye? ¿Puede validar tal conjetura? Al marcar y medir los ángulos internos de un cuadrilátero concíclico o circunscribible (ver Figura 6), se observa que la suma de las medidas de sus ángulos opuestos es 180° ; por ende, se puede decir que: En un cuadrilátero concíclico o circunscribible, los ángulos opuestos son suplementarios.

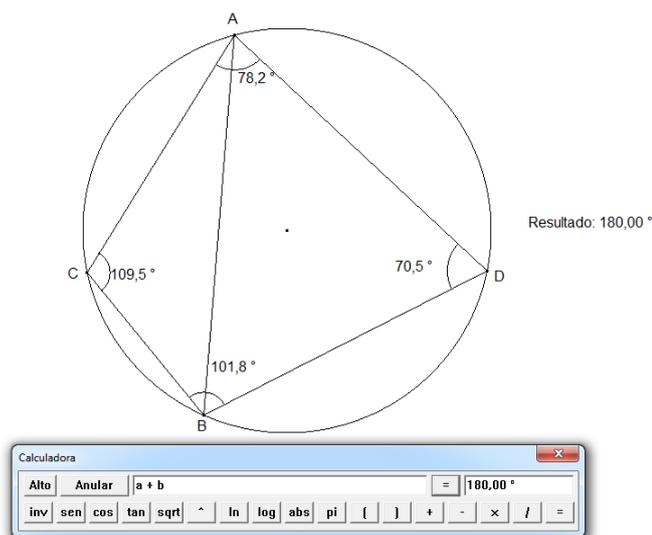


Figura 6. En un cuadrilátero concíclico o circunscribible, los ángulos opuestos son suplementarios (verificación empírica)

En los informes escritos dieron las siguientes respuestas: (Grupo nº 1) *De la medición de los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico se concluye que son suplementarios*; (Grupo nº 2) *Concluimos que la suma de las medidas de los ángulos opuestos es 180° ; es decir, los ángulos opuestos son suplementarios. Según esto en un cuadrilátero concíclico se cumple que sus ángulos opuestos son suplementarios*; (Grupo nº 3) *Que la adición de los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico son suplementarios*. Cabe señalar que, con el Cabri II, es posible marcar y medir los ángulos internos del cuadrilátero ACBD y, luego, con la opción calculadora, seleccionar las medidas de los pares de ángulos opuestos, calcular su suma y obtener como resultado 180° . De esta manera, si se arrastra el vértice de uno de los ángulos, se observa que varía su medida, pero la suma sigue siendo 180° (ver Figura 6). Esto ayuda a convencerse que el resultado obtenido no es fortuito, sino que puede ser entendido como una propiedad que satisfacen los cuadriláteros concíclicos. Así, una vez establecida la conjetura, cada uno de los grupos se dedicó a validarla; de esta manera, se evidencia dominio de los usos heurísticos del Cabri II.

El grupo nº 1, teniendo en cuenta la figura abajo indicada (ver Figura 7), presentó la siguiente justificación:

1. Podemos observar que los $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle BAD$ por ser ángulos inscritos a una misma circunferencia. Ángulos a los cuales llamaremos (1).
2. De igual forma podemos concluir que los ángulos $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle CDA$ a los cuales llamaremos (2).
3. Ahora podemos concluir que los ángulos $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle ABD$ a los cuales llamaremos (3).
4. Por último podemos concluir que los ángulos $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CDB$ a los cuales llamaremos (4).
5. Ahora bien toda esta relación de congruencia de los ángulos nos va a permitir validar la conjetura que los ángulos opuestos de un cuadrilátero concíclico son suplementarios. Ya que si consideramos el triángulo $\triangle CAD$ podemos detallar que la suma de la medida angular de los ángulos 3, 2 con el ángulo de vértice A es igual a 180 por propiedad de los triángulos y por la relación de congruencia que hemos establecido antes la suma de la medida angular de 2 y 3 es igual al ángulo con el vértice B, por lo tanto los ángulos con vértice en A y B son suplementarios, y un análisis análogo establece que los ángulos con vértices en D y C son suplementarios.

Justificación basada en la identificación de pares de ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia y la aplicación de la propiedad que establece que dos o más ángulos inscritos a un mismo arco de circunferencia son congruentes. En los primeros cuatro pasos de la prueba, identifica cuatro pares de ángulos congruentes por la razón antes mencionada. Luego, conociendo que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, establece que, en el $\triangle ACD$:

$$m(\sphericalangle CAD) + m(\sphericalangle 3) + m(\sphericalangle 2) = 180^\circ,$$

donde, por el postulado de adición de ángulos, $m(\sphericalangle 3) + m(\sphericalangle 2) = m(\sphericalangle CBD)$; llegando a que: $m(\sphericalangle CAD) + m(\sphericalangle CBD) = 180^\circ$. Nótese que, según la Figura 7 elaborada por el grupo nº 1, en el $\triangle ACD$, se tiene que: $\sphericalangle 3 = \sphericalangle ACD$ y $\sphericalangle 2 = \sphericalangle ADC$; mientras que en el $\triangle BCD$, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle CBA$ y $\sphericalangle 3 = \sphericalangle DBA$.

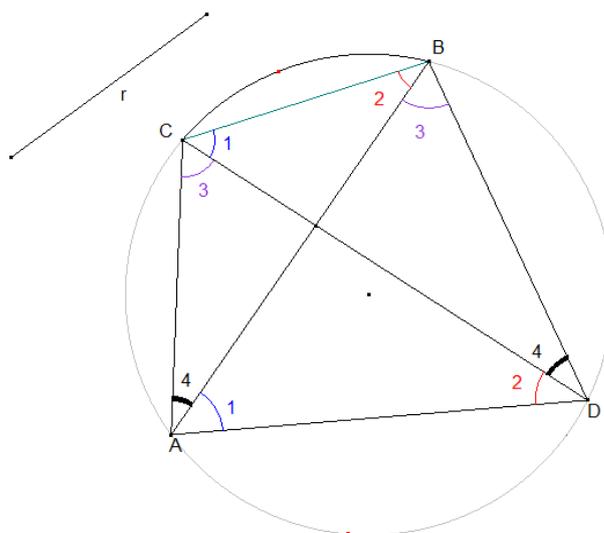


Figura 7. Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 1, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios

El grupo nº 2 inicia la prueba señalando que “*utilizaremos la relación entre ángulos inscritos y centrales que abren el mismo arco de circunferencia*” y escriben las siguientes igualdades:

$$m(\angle BDA) = \frac{1}{2}m(\angle BOA) \text{ y } m(\angle ACB) = \frac{1}{2}m(\angle AOB)$$

Sumando estas ecuaciones se obtiene:

$$m(\angle BDA) + m(\angle ACB) = \frac{1}{2}m(\angle BOA) + \frac{1}{2}m(\angle AOB)$$

$m(\angle BDA) + m(\angle ACB) = \frac{1}{2}(m(\angle BOA) + m(\angle AOB))$; por propiedad distributiva

$$m(\angle BDA) + m(\angle ACB) = \frac{1}{2}(360^\circ); \text{ los dos arcos forman la circunferencia}$$

$$m(\angle BDA) + m(\angle ACB) = 180^\circ ; \text{ operando}$$

Quedando demostrado que en un cuadrilátero concíclico los ángulos opuestos son suplementarios.

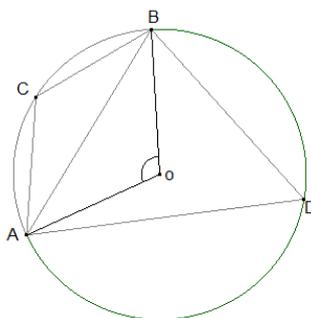


Figura 8. Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 2, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios.

En la Figura 8, se observa que $\angle BDA$ está inscrito en el arco de circunferencia BDA y $\angle BOA$ es el correspondiente ángulo central, así como también $\angle ACB$ está inscrito en el arco de circunferencia ACB y $\angle AOB$ es el correspondiente ángulo central. Cabe recordar que un ángulo central es cualquier ángulo con vértice en el centro de la circunferencia y, en consecuencia, sus lados están determinados por radios de tal circunferencia; mientras que un ángulo inscrito a un mismo arco de circunferencia tiene vértice en un punto perteneciente a tal arco y sus lados cortan a la circunferencia en los extremos del arco. Además, aplican que la medida de un ángulo inscrito a un arco de circunferencia es la mitad de la del correspondiente ángulo central. Nótese que, aunque no lo señalan en el desarrollo de la prueba, los ángulos centrales $\angle BOA$ y $\angle AOB$ se asumen como diferentes, ya que se considera la orientación con respecto a las agujas del reloj siendo por ello que afirman que

$$m(\angle BOA) + m(\angle AOB) = 360^\circ.$$

El grupo nº 3, teniendo como referencia la figura mostrada en la Figura 9, identificó hipótesis y tesis y, procedió a presentar la siguiente prueba siguiendo el esquema de afirmaciones y razones.

1. El cuadrilátero ABCD es concíclico; por hipótesis.

2. Por construcción auxiliar se traza la diagonal CD, dividiendo el cuadrilátero en cuatro triángulos.

3. Así por propiedad de la cuerda se tiene:

Con respecto a la cuerda AC. $\angle 8 \cong \angle 5$

Con respecto a la cuerda CB. $\angle 7 \cong \angle 2$

Con respecto a la cuerda AD. $\angle 6 \cong \angle 3$

Con respecto a la cuerda DB. $\angle 1 \cong \angle 4$

Entonces sustituyendo: El $\angle 1$ por el $\angle 4$, el $\angle 3$ por el $\angle 6$, $\angle 5$ por el $\angle 8$ y el $\angle 2$ por el $\angle 7$.

4. Tomando el $\triangle ACB$:

$m(\angle C) + m(\angle 7) + m(\angle 8) = 180^\circ$; por suma interna de ángulos de un triángulo.

$$m(\angle C) = 180^\circ - m(\angle 7) - m(\angle 8); \text{ despejando } m(\angle C).$$

5. Tomando el $\triangle ADB$:

$m(\angle D) + m(\angle 4) + m(\angle 6) = 180^\circ$; por suma interna de ángulos de un triángulo.

$$m(\angle D) = 180^\circ - m(\angle 4) - m(\angle 6); \text{ despejando } m(\angle D).$$

6. Así $m(\angle ACB) + m(\angle ADB) = 180^\circ$, ya que, sustituyendo se tiene:

$$180^\circ - m(\angle 7) - m(\angle 8) + 180^\circ - m(\angle 4) - m(\angle 6) = X$$

$$- m(\angle 7) - m(\angle 8) - m(\angle 4) - m(\angle 6) + 360^\circ = X$$

$$360^\circ - X = m(\angle 7) + m(\angle 8) + m(\angle 4) + m(\angle 6)$$

$$360^\circ - X = 180^\circ$$

$$360^\circ - 180^\circ = X$$

7. Así se cumple que $m(\angle ACB) + m(\angle ADB) = 180^\circ$
8. Tomando el $\triangle ACD$:
 $m(\angle A) + m(\angle 6) + m(\angle 8) = 180^\circ$; por suma interna de ángulos de un triángulo.
 $m(\angle A) = 180^\circ - m(\angle 6) - m(\angle 8)$; despejando $m(\angle A)$.
9. Tomando el $\triangle BCD$:
 $m(\angle B) + m(\angle 4) + m(\angle 7) = 180^\circ$; por suma interna de ángulos de un triángulo.
 $m(\angle B) = 180^\circ - m(\angle 4) - m(\angle 7)$; despejando $m(\angle B)$.
10. Así $m(\angle CAD) + m(\angle CBD) = 180^\circ$. Sustituyendo se tiene:
 $180^\circ - m(\angle 6) - m(\angle 8) + 180^\circ - m(\angle 4) - m(\angle 7) = 180^\circ$
 $360^\circ - m(\angle 6) - m(\angle 8) - m(\angle 4) - m(\angle 7) = 180^\circ$
 $180^\circ = m(\angle 6) + m(\angle 8) + m(\angle 4) + m(\angle 7)$.
11. Ser verifica que $m(\angle CAD) + m(\angle CBD) = 180^\circ$
12. Queda demostrado entonces que $m(\angle ACB) + m(\angle ADB) = 180^\circ$ y $m(\angle CAD) + m(\angle CBD) = 180^\circ$; por pasos 7 y 11.

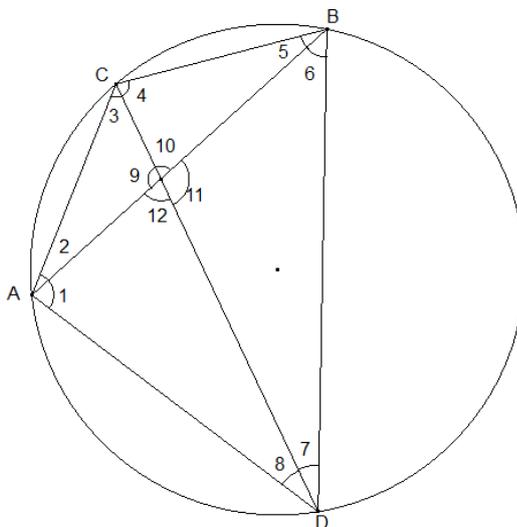


Figura 9. Cuadrilátero concíclico elaborado por el grupo nº 3, en el cual se basan para probar que los ángulos opuestos son suplementarios

Cuando hacen referencia, en el paso 3, a la propiedad de la cuerda, se refieren a que una cuerda de una circunferencia determina dos arcos; así, por ejemplo, la cuerda AC determina los arcos CBA y CPA (donde el punto P pertenece a la circunferencia, pero no al arco CBA); y que, además, dos o más ángulos inscritos en un mismo arco de circunferencia son congruentes como lo son $\angle CBA$ y $\angle ADC$ con respecto al arco CBA. También aplican que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° . En los pasos nº 6 y 10, calculan las sumas

de las medidas de los pares de ángulos opuestos del cuadrilátero ACBD, en función de las relaciones establecidas en los pasos 4 y 5, así como 8 y 9 respectivamente.

Se considera que los tres grupos presentaron pruebas de la conjetura formulada en la actividad nº 2 y que manifestaron un esquema de argumentación analítico, procurando presentar una serie de afirmaciones encadenadas lógicamente y debidamente justificadas, haciendo referencia a definiciones y propiedades geométricas conocidas.

4. Consideraciones Finales

El curso de RPG-AC ha sido asumido como *un escenario formativo e investigativo*, ya que, por una parte, forma parte como curso optativo de integración del plan de estudio del componente de formación especializada de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay y, por otra parte, es el contexto donde se ha abordado el estudio de las competencias matemáticas y didácticas que ponen en juego los participantes cuando realizan ciertas tareas (Iglesias, 2014).

Desde la planificación de las actividades de enseñanza y aprendizaje que lo conforman, el curso de RPG-AC se ha sustentado en el *planteamiento de tareas didáctico – matemáticas*, orientadas a la resolución de problemas geométricos, haciendo uso de un SGD como el Cabri II o al diseño de una unidad didáctica con contenidos geométricos para educación media (Iglesias y Ortiz, 2015).

Así, teniendo como referencia el mapa de enseñanza y aprendizaje (MEA) propuesto por Orellana Chacín (2002) y los componentes del análisis didáctico para la fase de diseño (Gómez, 2007; Rico y Fernández-Cano, 2013; Ortiz, Iglesias y Paredes, 2013), se planificaron tres talleres relacionados con los siguientes temas: (a) construcciones geométricas con regla y compás; (b) equivalencia entre dos maneras distintas de construir una figura; (c) cuadriláteros concíclicos y cuadriláteros inscribibles (ver Tabla 1).

De esta manera, se ha valorado el papel que han jugado las construcciones con regla y compás en el desarrollo teórico y las aplicaciones prácticas de la Geometría Euclidiana, procurando que así lo entiendan los participantes en el curso de RPG-AC. En este sentido, se considera clave identificar en una construcción geométrica los siguientes elementos: (a) lo dado (objetos iniciales); (b) el procedimiento de construcción (incluyendo los objetos auxiliares); (c) lo que se quiere construir (objetos finales). En atención a los elementos conocidos y lo planteado en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, las actividades se clasificaron en actividades dirigidas y actividades libres. Además, en estas actividades se emplearon los métodos de construcción mencionados por Siñeriz (2000): (a) el método de los dos lugares; (b) el método de la figura auxiliar y (c) el método de la figura semejante.

Para desarrollar la noción de equivalencia entre una construcción con doblado de papel y una construcción con regla y compás de una misma figura geométrica, se lograron identificar tres ideas matemáticas relevantes: (a) superposición de figuras geométricas; (b) correspondencia entre figuras geométricas y (c) puntos y rectas construibles (Arrieché e Iglesias, 2010; Iglesias, 2014).

Las actividades se organizaron siguiendo el esquema construir → explorar → conjeturar → validar, el cual se considera apropiado para emprender acciones de

carácter heurístico como las planteadas por Alsina Catalá et al. (1997) y Perry Carrasco et al. (2006), especialmente cuando se sigue un enfoque de resolución de problemas y se incorpora el uso de un SGD.

La resolución de problemas geométricos vinculados con los temas seleccionados para cada uno de los talleres planificados fue la principal estrategia de enseñanza y aprendizaje junto con el uso del Cabri II y el plegado de papel (en el taller nº 2).

Con el diseño de una unidad didáctica con contenidos geométricos, basándose en la noción de análisis didáctico, se ha pretendido que los participantes – como profesores en formación - abordaran la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría escolar (Iglesias y Ortiz, 2015); problemática entendida, atendiendo a lo propuesto por Azcárate Goded (2004) como un *ámbito de investigación profesional* (AIP).

Bibliografía

- Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J.M. y Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Síntesis, Madrid.
- Aravena Díaz, M. y Caamaño Espinoza, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule, Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (2), 139 – 178.
- Arrièche, B. e Iglesias, M. (2010). Explorando ángulos e triángulos com dobraduras em papel. *Boletim GEPEM*, 57, 105-117.
- Azcárate Goded, P. (2004). *Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos*. Ponencia presentada en el Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Universidade da Coruña.
- Bainville, E. (2003). *Cabri Géomètre II Plus. Manual del usuario*. Cabrilog, Grenoble, Francia.
- Corberán, R. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. C.I.D.E., M.E.C., Madrid.
- De Villiers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3), 400 - 431.
- Flores, A.H. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato. *Educación Matemática*, 19 (1), 63-98.
- Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas. En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España.
- Gutiérrez, A. (2000). Aportaciones de la investigación psicológica al aprendizaje de las matemáticas en secundaria. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 24, 23 – 33.
- Iglesias, M. (2000). *Curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad

- Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.
- Iglesias, M. (2014). *La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio con Futuros Docentes de Matemática*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.
- Iglesias, M. y Ortiz, J. (2015). Competencias didácticas exhibidas por futuros profesores de Matemática. En J. Sanoja de Ramírez y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VIII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VII Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 352 – 367). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay, Venezuela. Recuperado el 16 de octubre de 2018 de <http://www.asovemat.org.ve/memorias.php>
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 295 – 384). Sevilla: Alfar.
- Luengo González, R., Blanco Nieto, L., Mendoza García, M., Sánchez Pesquero, C., Márquez Zurita, L. y Casas García, L.M. (1997). *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*. Síntesis, Madrid.
- Mills, J., Tall, D. (1988). From the visual to the logical in mathematics. *Bullettin of I.M.A.*, 21 11/12 Nov – Dec, 176 – 183.
- Orellana Chacín, M. (2002). ¿Qué enseñar de un Tópico o de un Tema? *Enseñanza de la Matemática* 11(2), 21- 42.
- Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 – 308). Comares, Granada, España.
- Perry Carrasco, P., Camargo Uribe, L., Samper de Caicedo, C. y Rojas Morales, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 1 - 22). Comares, Granada, España.
- Siñeriz, L. E. (2000). Los griegos, la heurística, la regla y el compás. En R.S. Abrate y M. D. Pochulu (comps.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática* (pp. 193 – 215). Universidad de Villa María; Argentina.

Autores:

Martha de las Mercedes Iglesias Inojosa: Profesora de Matemática con Maestría en Enseñanza de la Matemática y Doctorado en Educación; Integrante del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática Usando Nuevas Tecnologías y del Núcleo de Investigación en Educación Matemática de la UPEL IP. de Maracay; Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática. mmiglesias@gmail.com

José Ortiz Buitrago: Profesor de Matemática con Doctorado en Educación Matemática. Coordina la línea de investigación en Pensamiento Algebraico y Educación Matemática. Investigador adscrito a la Unidad de Investigación del Ciclo Básico de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo, Núcleo Aragua y el Núcleo de Investigación en Educación Matemática de la UPEL IP. de Maracay. Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática. joseortiz.facesuc@gmail.com