UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 100-108

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Distribuciones muestrales en poblaciones binomiales: Dificultades de comprensión por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato

Nuria Begué, Carmen Batanero, Mª Magdalena Gea y Danilo Díaz-Levicoy

Fecha de recepción: 23/07/2019
Fecha de aceptación: 27/08/2019

Resumen	Una de las principales dificultades en el estudio de la inferencia estadística es la comprensión del concepto de distribución muestral. En este trabajo se resumen de las principales dificultades descritas en la investigación sobre el tema y se analiza su comprensión por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato. Con esta finalidad se estudian la media y el rango de cuatro valores proporcionados por estudiantes de tres cursos diferentes a una tarea relacionada con la distribución binomial. Los resultados muestran una comprensión razonable del valor esperado, aunque algunos estudiantes muestran el sesgo de equiprobabilidad. La comprensión de la variabilidad en el muestreo es pobre, pero mejora con la edad. **Palabras clave**: Distribución muestral, comprensión, Educación Secundaria y Bachillerato
Abstract	A main difficulty in the study of statistical inference is the understanding of the concept of sampling distribution. In this work, we summarize the main difficulties described in the research on the subject and analyze its comprehension by secondary and high school students. For this purpose, the mean and range of four values provided by students of three different courses to a task related to the binomial distribution are studied. The results show a reasonable understanding of the expected value, although some students show the equiprobability bias. The understanding of sampling variability is poor, but improves with age. **Keywords:** Sampling distribution, understanding, secondary and high school.
Resumo	Uma das principais dificuldades no estudo da inferência estatística é a compreensão do conceito de distribuição amostral. Neste trabalho, resumimos as principais dificuldades descritas na pesquisa sobre o tema e analisamos sua compreensão por alunos do Ensino Médio. Para tanto, estuda-se a média e o intervalo de quatro valores fornecidos por alunos de três cursos diferentes a uma tarefa relacionada à distribuição binomial. Os resultados mostram uma compreensão razoável do valor esperado, embora alguns alunos mostrem o viés de equiprobabilidade. O entendimento da variabilidade e pobre, mas melhora com a idade. **Palavras-chave:** Distribuição amostral, compreensão, Ensino Médio.

1. Introducción

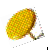
La comprensión del muestreo y de las características de las muestras es parte de la cultura estadística pues establece un vínculo entre estadística y probabilidad y permite comprender las situaciones de muestreo que aparecen en la vida cotidiana (Burrill y Biehler, 2011).

El actual diseño curricular español (MECD, 2015) incluye el estudio del muestreo ya desde el comienzo de la Educación Secundaria Obligatoria y el de la distribución muestral en el Bachillerato de Ciencias Sociales. Dicha distribución muestral es un concepto fundamental en la inferencia frecuencial, donde se utiliza para la construcción de intervalos de confianza y la realización de contrastes sobre los parámetros que describen las poblaciones.

Sin embargo, la investigación previa describe errores en la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes. En este trabajo se describen las principales dificultades asociadas al tema y se presentan los resultados del análisis de una tarea dirigida a la evaluación de las mismas en estudiantes españoles de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

2. Principales dificultades en la comprensión de distribuciones muestrales

Son varios los trabajos que analizan las dificultades de los estudiantes con la distribución muestral, por ejemplo, Ben-Zvi, Bakker y Makar (2015) o Makar y Rubin (2018). Una de las principales es que los estudiantes no siempre diferencian las tres distribuciones que intervienen en un proceso de muestreo (Harradine et al., 2011, Kadijevich, Lipson, 2003). Consideremos, para describirlas, la tarea presentada en la Figura 1, tomada de Gómez. (2014) que hemos usado en este trabajo y también en nuestra investigación previa (Begué, Batanero y Gea, 2018).

Tarea. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo . Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño vacía una caja de 100 chinchetas y obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un resultado que te parezca probable para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Figura 1. Tarea de lanzamiento de chinchetas (Gómez, 2014)

En una situación de muestreo se parte de una población, en la que estudiamos una cierta variable aleatoria, que queda especificada por una distribución teórica de probabilidad. En la tarea mostrada en la Figura 1, consideramos un experimento aleatorio con dos tipos de sucesos: que la chincheta caiga hacia arriba (éxito) o hacia abajo (fracaso) y nos interesamos por la variable aleatoria "número de éxitos en n ensayos", que se describe mediante la distribución Binomial B(n,p). Dicha distribución depende de dos parámetros: n=número de ensayos y p= probabilidad de ocurrencia del éxito. Por tanto, la variable "número de chinchetas que caerán hacia arriba en la caja" sigue la distribución binomial B(100, 0,68).Otros ejemplos de la distribución binomial serían el número de partidarios a un cierto partido político en un grupo de personas, el número de productos defectuosos en un lote o el número de aprobados de una clase en un examen.

Si tomamos una muestra aleatoria de la población, obtenemos algunos valores de la variable, pero no todos. Por ello, podemos considerar una variable estadística en la muestra con su correspondiente distribución de datos. En la tarea propuesta en la Figura 1, si cuatro alumnos vacían sucesivamente la caja de chinchetas, cada uno puede obtener un valor diferente del número de chinchetas con la punta hacia arriba; por ejemplo, se podrían obtener los valores 67, 65, 70, 71. Estos cuatro valores constituyen una muestra de cuatro elementos de la distribución binomial B(100, 0,68) y tiene una distribución diferente de la distribución en la población. Así, mientras la media en la población de partida μ sería igual a 68, la media $\bar{x}$ de los datos de esta muestra es igual a 68,25. Si no conociésemos el valor de μ, se usaría $\bar{x}$ para estimar su valor.

La muestra anterior 67, 65, 70, 71, es sólo una de las posibles muestras de cuatro valores de la distribución binomial B (100, 0.68) en cada una de las cuales la media muestral podría variar. Por tanto, se puede definir una nueva variable aleatoria $\overline{X}$ para describir todas las posibles medias muestrales citadas. La distribución de esta nueva variable se denomina *distribución muestral de la media* y permite la construcción de intervalos de confianza o la realización de contrastes de hipótesis. Estas mismas tres distribuciones aparecen en cualquier otro problema de muestreo; por ejemplo, nos podemos interesar por la media en una población normal y entonces tendríamos la distribución normal en la población, la distribución de datos en una muestra y la distribución de la media de una población normal. El trabajo conjunto con estas distribuciones tiene una gran complejidad conceptual, por lo que los alumnos las suelen confundir.

Por otro lado, los estudiantes parecen comprender que la media de la muestra se acerca a la de la población. Pero no entienden las implicaciones del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la media muestral. Tversky y Kahneman (1982) hablan de insensibilidad al tamaño de la muestra, que sería uno de los sesgos asociados a la heurística de la representatividad, también descrita por estos autores.

Shaughnessy, Ciancetta y Canada (2004) investigaron la comprensión del muestreo en una población binomial de 272 estudiantes (10-19 años), pidiéndoles dar el número de sucesos de un cierto tipo en una muestra de 10 elementos y otra de 100 elementos. Los autores identifican tres niveles progresivos en el razonamiento sobre el muestreo: 1) el nivel de razonamiento aditivo (el más frecuente), que consiste en considerar las diferentes muestras como subconjuntos disjuntos de la población y utilizar en las estimaciones únicamente, la frecuencia absoluta, sin tener en cuenta la proporción del suceso; este es el nivel más frecuente de los estudiantes de acuerdo a Saldanha y Thompson (2002),; 2) el nivel de razonamiento proporcional, en el que se utilizan proporciones al realizar estimaciones y se comprende el valor esperado de la distribución muestral; y 3) el nivel de razonamiento distribucional (el menos frecuente) donde se integran las ideas de valor esperado y de variabilidad, al realizar estimaciones.

En Begué, Batanero y Gea (2018) planteamos a un grupo de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria, cuatro tareas de muestreo, una de las cuales es la presentada en la Figura 1. En el trabajo actual nos restringimos a unta tarea, pero completamos el anterior con un grupo de estudiantes de Bachillerato y con el estudio de las diferencias de comprensión mostradas en los tres grupos de estudiantes.

3. Metodología

El estudio que describimos en este trabajo se llevó a cabo con tres grupos de estudiantes: 157 de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años; en total 9 grupos), 145 de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria (15-16 años; en total 8 grupos) y 234 de 2º curso de Bachillerato. Todos los alumnos cursaban sus estudios en centros públicos diferentes en las ciudades de Huesca y Zaragoza; estos centros y los profesores de los estudiantes colaboraron en nuestro trabajo con autorización de los directores.

Se propuso a los estudiantes la tarea presentada en la Figura 1, que completaron individualmente por escrito, como una actividad en la clase de matemáticas. Las respuestas obtenidas (cuatro valores de la distribución binomial B(100, 0.68) para cada estudiante), se codificaron. Para cada estudiante se obtuvo la media aritmética y el rango de los cuatro valores dados, que se analizan a continuación.

4. Comprensión del valor esperado en la distribución muestral

Como se ha indicado, en la tarea mostrada en la Figura 1, el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba es una variable aleatoria binomial, B(100, 0,68). En consecuencia, el número esperado de chinchetas que caerán con la punta hacia arriba en la muestra de 100 elementos es $n\hat{p}$ = 68 y su desviación típica, $\sigma = \sqrt{n\widehat{p}\,(1-\widehat{p}\,)}$= 4,66. Al tratarse de un valor grande de ensayos, se puede aproximar esta distribución mediante la distribución normal N (68, 4.66).

La distribución muestral de la media puede entonces aproximarse también mediante una distribución normal N(68, σ/√4), es decir N(68, 2.33) ya que la suma de valores de una distribución normal es también normal y la media se obtiene a partir de una suma dividida por una constante. Utilizando dicha aproximación normal de la distribución de la media muestral obtenemos el intervalo que contiene el 95% de los valores centrales, que es [63,3-72,7]. Consideraremos, entonces, que los estudiantes tienen una buena comprensión del valor esperado de la distribución muestral si la media de los cuatro valores propuestos se sitúa en este intervalo. Por ejemplo, sería adecuada la respuesta del estudiante que indica los valores 67, 65, 70, 71, puesto que su media es 68,25. Pero no lo sería la del estudiante que responde 32, 43, 57, 50, pues su media es 45,5, muy alejada de la media teórica de la población.

	2ºESO (n=157)	4ºESO (n=145)	2º Bach (n=234)
Estimación aceptable del valor esperado [63.3-72.7]	28,6	33,1	44,3
Equiprobabilidad [45- 55]	26,8	23,4	17,7
Otros valores	38,2	38,7	38,0
No completa	6,4	4,8	4,7

Tabla 1. Porcentaje de estudiantes por grupo según valor medio de las cuatro estimaciones

En la Tabla 1 presentamos el porcentaje de estudiantes cuyos valores medios en la respuesta a la tarea planteada se sitúan en el intervalo de estimación aceptable o en otros intervalos. Hemos considerado, en especial, los estudiantes cuyo valor medio se acerca mucho al 50%, al proporcionar cuatro valores muy cercanos al mismo. Dichos estudiantes no se guían por el valor dado en el enunciado de la tarea para estimar la probabilidad de que la chincheta caiga con la punta hacia arriba. Estarían considerando los dos posibles sucesos como equiprobables, es decir, caerían en el sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992).

Observamos que sólo el 28,6% de los estudiantes de 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria el 33,1% de los de 4º curso y el 44,3% de los de Bachillerato dan respuestas cuyos valores medios se incluyen en el intervalo aceptable de estimación, aunque el porcentaje de respuestas aceptables va aumentando con el curso. Hay un porcentaje apreciable de estudiantes que caen en el sesgo de equiprobabilidad, aunque dicho porcentaje disminuye con el curso escolar. El número de alumnos que no responde o que proporciona otro tipo de valores es similar en todos los grupos.

4. Comprensión de la variabilidad. Distribución muestral del rango

Al responder a la tarea planteada, no sólo es importante que la media de los cuatro valores se acerque a la teórica, sino que se debe tener en cuenta una variabilidad adecuada de los elementos de la muestra, que se puede deducir del rango obtenido a partir de los cuatro valores dados. La distribución muestral del rango en muestras de cuatro elementos no es normal, ni tampoco aproximadamente, pero se puede simular fácilmente, como mostramos en la Figura 2. Dicha figura muestra la simulación de los rangos obtenidos en 10000 muestras aleatorias de cuatro elementos de la distribución binomial B(100, 0,68), utilizando el programa Fathom. A partir de esta distribución muestral empírica podemos ver que el 95% de los valores centrales del rango varían entre 3 y 18, intervalos que incluye las respuestas de variabilidad aceptable.

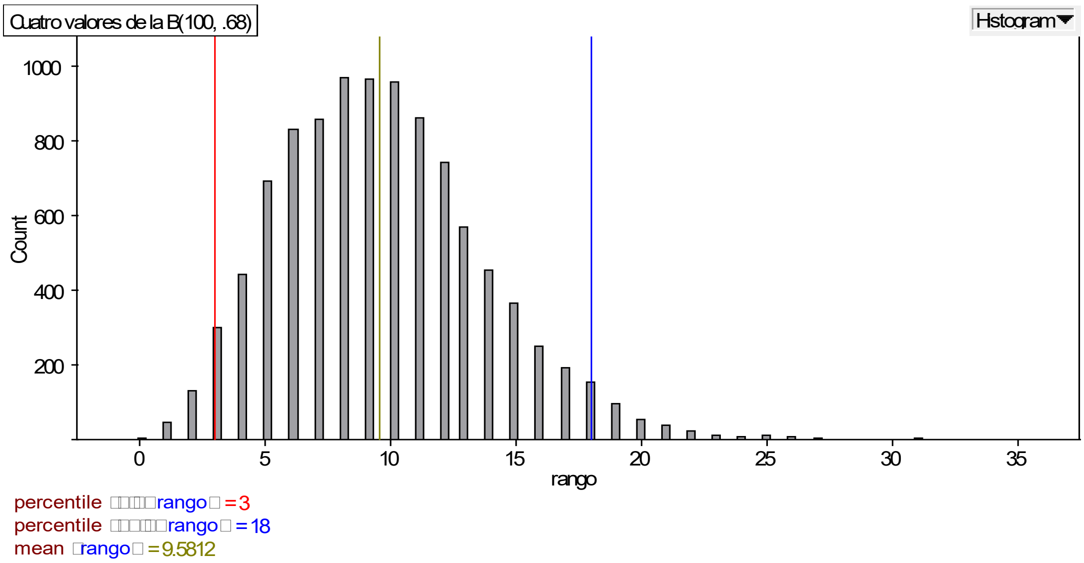


Figura 2. Distribución muestral empírica de los rangos en muestras de 4 elementos de la B (100, 0,68)

Fuente: producida por los autores

Variabilidad	2ºESO (n=157)	4ºESO (n=145)	2º Bach (n=234)
Estimación aceptable [3-18]	20,3	29,5	40,8
Estimación de una variabilidad muestral excesiva >18	62,4	56,6	42,8
Alta concentración <3	10,8	9	11,8
No completa	6,4	4,8	4,7

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes por grupo según intervalo en que se sitúa el rango de las cuatro estimaciones

Los resultados del análisis de los rangos de los cuatro valores producidos por cada estudiante se presentan en la Tabla 2, donde vemos que son minoría los estudiantes que conceden una variabilidad adecuada en este ítem, a pesar de que se consideran 100 repeticiones del experimento, lo que sería una muestra grande. Por tanto, los estudiantes no alcanzan el razonamiento distribucional sobre el muestreo (Shaughnessy et al, 2004), pues no tienen en cuenta simultáneamente el valor esperado y la variabilidad. En general, los estudiantes conceden una variabilidad excesiva al muestreo, en contra de lo que indica la teoría estadística, aunque también en lo que se refiere a la variabilidad la comprensión parece mejorar con la edad. Esto lo vemos en la disminución del porcentaje de estudiantes con variabilidad excesiva con el curso y el aumento de las respuestas con variabilidad aceptable.

5. Significación de las diferencias

Con objeto de analizar si las diferencias entre los resultados en Bachillerato y los obtenidos en los cursos anteriores son estadísticamente significativas, presentamos en la Tabla 2 las medias y desviaciones típicas del valor medio y el rango de dicho valor medio en las cuatro estimaciones de cada estudiante en cada uno de los grupos con el error de muestreo y el número de estudiantes que responden al ítem en cada grupo. Observamos muy poca diferencia en el valor medio, siendo el correspondiente al 4º curso algo más alto, es decir, más próximo a la probabilidad teórica, aunque aún muy diferente de ella. Por el contrario, hay una diferencia notable, de casi 7 puntos, en el rango de las cuatro estimaciones, entre los estudiantes de Bachillerato y los de 2º y de 4 puntos con los estudiantes de 4º curso, que indica que sus estimaciones tienen menor variabilidad.

	Curso	N	Media	D. típica.	Error muestreo
Media	2º	147	56,920	13,7228	1,1318
	4º	138	58,899	11,6006	,9875
	Bachiller	234	57,579	16,7599	1,0956
Rango	2º	147	32,07	22,499	1,856
	4º	142	26,68	20,764	1,743
	Bachiller	234	22,55	20,680	1,352

Tabla 3. Estadísticos de la media y el rango por curso

Para comprobar si estas diferencias observadas son estadísticamente significativas se ha realizado la prueba del análisis de varianza tomando el grupo de estudiantes como variable independiente. Al analizar la diferencia de medias se obtuvo un calor F= 0,672 con 2 g.l. que no fue estadísticamente significativa, mientras que el analizar la diferencia de rangos se obtuvo F:9,095, con 2 g.l. que corresponde a un valor p<0,001 y por tanto estadísticamente significativo. En consecuencia, la comprensión de valor esperado es similar en los grupos; en general buena, salvo el grupo de estudiantes que razona de acuerdo al sesgo de equiprobabilidad. Por otro lado, parece que al progresar el curso los estudiantes visualizan mejor la disminución de variabilidad en las muestras grandes

5. Implicaciones didácticas

Los diseños curriculares actuales permiten comenzar la enseñanza del muestreo desde la etapa secundaria, donde la tarea que analizamos en este trabajo puede ser implementada y discutida con los estudiantes, para hacerles comprender sus ideas correctas e incorrectas sobre el muestreo.

El análisis de los resultados del estudio, aunque muestra mejora de la comprensión con el curso, también indica que queda un camino para recorrer si queremos que los estudiantes alcancen plena comprensión del concepto de distribución muestral. Hoy día es sencillo realizar actividades de simulación; en nuestro caso, hemos mostrado la simulación de la distribución muestral del rango utilizando Fathom, pero también hay muchos recursos interactivos de simulación en internet. Es importante invertir un tiempo de enseñanza en la exploración de estos recursos con los estudiantes, ya que los posibles errores de comprensión del muestreo y distribución muestral, se arrastran posteriormente en el estudio de la inferencia.

Agradecimiento: Proyecto EDU2016-74848-P y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 291-303.

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M.M.. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 63-79

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57–69). New York: Springer.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011).Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 235-246).Springer

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 557-568.

Lipson, K. (2003). The role of the sampling distribution in understanding statistical inference. *Mathematics Education Research Journal, 15*(3), 270-287.

Makar, K. y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi (Ed.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261-294). Cham: Springer.

Saldanha. L. y Thompson, P. (2002) Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics, 51,* 257-270.

Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 177-184). Bergen, Noruega: International Group for the Psychology of Mathematics Education

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), Judgement under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 117-128). Nueva York: Cambridge University Press.

Well, A. D., Pollastsek, A.y Boyce, S. J. (1990). Understanding the effects of the sample size on the variability of the means. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 47,* 289-312.

Zacks, S. (2014). *Parametric statistical inference: basic theory and modern approaches*. London: Elsevier.

Autores

Nuria Begué, Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesora de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Zaragoza (UNIZAR), Zaragoza, España, nbegue@unizar.es

Carmen Batanero Bernabeu: Catedrática de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, España. Fue miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction) y Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). batanero@ugr.es

María M. Gea: Profesora de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, España. Es coordinadora del Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Danilo Díaz-Levicoy, Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada (UGR). Profesor en la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Católica del Maule (UCM), Talca, Chile. dddiaz01@hotmail.com