UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-17

O que é $\sqrt{-1}$? Uma perspectiva semiótica com o uso dos Experimentos Mentais no estudo dos números complexos

Willian José da Cruz

Fecha de recepción: 5/4/2021
Fecha de aceptación: 8/6/2021

Resumen	Este texto trae algunas reflexiones teóricas, resultado del proyecto de investigación teórico que trata sobre "Semiótica y Experimentos Mentales en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas". Esta investigación tiene como objetivo general investigar la existencia de una relación cognitiva entre las habilidades para interpretar un texto matemático y semiótico y las acciones necesarias para comprender ciertos elementos y/u objetos matemáticos. Nuestra intención es mostrar cómo es posible entender la existencia de $\sqrt{-1}$, de tres formas semióticas diferentes, a saber: 1 - punto en el plano coordinado; 2 - como un par ordenado; 3 - asociado a una matriz cuadrada de orden 2. **Palabras clave**: Números complejos. Transformaciones geométricas. Sistemas de representación.
Abstract	This text brings some theoretical reflections, result of the theoretical research project that deals with “Semiotics and Thought Experiments in teaching and learning in Mathematics”. This research has the general objective of investigating the existence of a cognitive relationship between the abilities to interpret a mathematical and semiotic text and the actions necessary to understand certain elements and / or mathematical objects. Our intention is to show how it is possible to understand the existence of $\sqrt{-1}$, in three different semiotic ways, namely: 1 - point in the coordinated plane; 2 - as an ordered pair; 3 - associated with a square matrix of order 2. **Keywords:** Complex numbers. Geometric transformations. Systems of representation.
Resumo	Este texto traz algumas reflexões teóricas, resultado do projeto de pesquisa teórica que trata sobre “a Semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática”. Esta pesquisa tem por objetivo geral investigar a existência de relação cognitiva entre as habilidades de interpretação de um texto matemático e semiótica e as ações necessárias à compreensão de certos elementos e/ou objetos matemáticos. Nossa intenção é mostrar como é possível entender a existência da $\sqrt{-1}$, por três maneiras semióticas distintas, a saber: 1 –

ponto no plano coordenado; 2 – como par ordenado; 3 – associado a uma matriz quadrada de ordem 2.
Palavras-chave: Números complexos. Transformações geométricas. Sistemas de representação.

1. Introdução

Construir um conceito é mostrar uma intuição não empírica, que seja de um único objeto, expressando a percepção de universalidade para todas as possíveis intuições que pertencem ao mesmo conceito. Intuições aqui são interpretadas como formas de representação de um dado conceito ou objeto.

Para Vygotsky, a "formação de um conceito se dá com uma operação intelectual que é guiada pelo uso das palavras que servem para concentrar ativamente a atenção, para abstrair certos conceitos, para sintetizá-los e simbolizá-los por meio de um signo" (D'Amore, 2007, p.204).

> A formação dos conceitos é resultado de uma complexa atividade em que todas as funções intelectuais fundamentais participam. No entanto, este processo não pode ser reduzido à associação, à tendência, à imagética, à inferência ou às tendências determinantes. Todas estas funções são indispensáveis, mas não são suficientes se não se empregar o signo ou a palavra, como meios pelos quais dirigimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e o canalizamos para a solução do problema com que nos defrontamos. (Vygotsky,1896-1934, p. 61)

Os conceitos representam perspectivas sobre uma determinada realidade. Eles são como visões de possibilidades e essas visões são possibilitadas pela aplicação dos Experimentos Mentais na Matemática e no ensino de uma forma geral.

D'Ambrosio, no prefácio do livro Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemática formais, argumenta que uma das críticas que muitos educadores matemáticos fazem aos programas de prática escolar é a apresentação formal, fria e acrítica da matemática acadêmica e pouco ou nenhum espaço é dado à criatividade e ao imaginário dos alunos (Cruz, 2018). D'Ambrosio continua afirmando que o verdadeiro ato de aprender é resultado do exercício do imaginário e da criatividade, pois foi desta forma, que a ciência progrediu ao longo da história (Cruz, 2018).

Este texto traz algumas reflexões teóricas, resultado do projeto de pesquisa teórica que trata sobre a Semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática. Este projeto se ancora na ideia de que "todo pensamento acontece por meio de signos" (Cruz, 2018, p.21). A Semiótica é a ciência responsável por estudar as relações dos signos com os seus objetos e com outros signos. Esta pesquisa tem por objetivo geral investigar a existência de relação cognitiva entre as habilidades de interpretação de um texto matemático e a semiótica e as ações necessárias à compreensão de certos elementos e/ou objetos matemáticos.

No que tange a esta apresentação, nossa intenção é mostrar como é possível entender a existência da $\sqrt{-1}$, por três maneiras semióticas distintas, com o uso do processo de experimentação mental. Essas maneiras entende os números complexos como: 1 – ponto no plano coordenado; 2 – como par ordenado; 3 – associado a uma matriz quadrada de ordem 2.

Os aspectos metodológicos que aportam esta apresentação têm por base a semiótica sob a perspectiva de Peirce (1958, 2010) e o uso dos Experimentos Mentais na Educação Matemática de Cruz (2015, 2018, 2019, 2020).

2. Matemática numa perspectiva semiótica

A realidade do conhecimento é um processo semiótico que envolve o próprio sujeito. Conceituamos a semiótica como a "ciência que estuda os signos e como eles se referem aos seus objetos e a outros signos" (Cruz, 2018, p.26.).

Signo é tudo "aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém" (Peirce, 2010, p. 46). "Uma palavra, um grito, uma pintura, um desenho, uma biblioteca, uma pessoa, uma mancha, uma quadra, um campo, são exemplos de signos" (Cruz,2018, p.31). Por exemplo, a palavra palmo é um signo que pode significar para alguns a distância que vai do dedo polegar ao mínimo. Ou pode significar uma unidade de medida inglesa que equivale a 22 cm ou a 8 polegadas.

"Conhecer é construir uma representação" (Otte, 2012, p. 14). E representação é a "característica de uma coisa em virtude da qual, para a produção de um certo efeito mental, pode ser colocada no lugar de outra coisa" (Cruz, 2018, p. 31). Não podemos transformar algo em cognição sem um símbolo. De forma geral, "a unidade do pensamento é apenas a unidade de simbolização" (Otte, 2012, p.14).

O signo é conscientemente reconhecido pelo sujeito cognoscente e, para isto, o sujeito tem de criar outros signos e interpretações do primeiro signo. Portanto, significado tem dois componentes: *objetos*, chamados de componentes extensionais e *interpretantes* dos signos chamados de componentes intensionais, ou componentes de coerência. Em consequência podemos considerar que nunca existe um significado definitivo das coisas.

Cruz, explicando os significados dos termos extensão e intensão, escreve:

> "Extensão como o objeto (caso exista) ao qual signo refere-se e intensão como o conteúdo ou sentido do signo que, às vezes, é considerado como significado do signo. Um exemplo ocorre quando a pessoa fala de água, por um lado, e H_2O por outro, que são duas intensões para mesma extensão". (Cruz, 2018, p. 46-47)

Para explicar o processo semiótico, apresentamos a figura 1. Nela, o signo (ou representâmen) é aquilo que representa algo para alguém. Quando é dirigido a alguém, cria na mente um signo equivalente, gerando um efeito interpretativo (interpretante). "O signo representa alguma coisa, o seu objeto" (Peirce, 2010, p. 46).

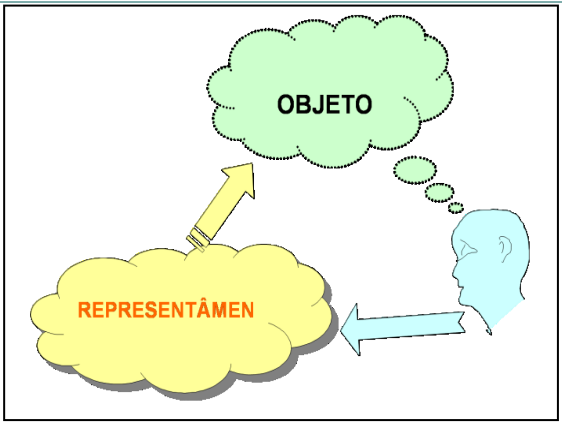

Figura 1*:* O processo semiótico

Fonte: (Cruz, 2015, p.37)

Segundo Santaella (2005, p.114) “o que define signo, objeto e interpretante, portanto, é a posição lógica que cada um desses três elementos ocupa no processo representativo”. Essa mesma autora afirma que:

> Todo signo, segundo Peirce, está encarnado em alguma espécie de coisa, quer dizer, todo signo é também um fenômeno, algo que aparece à nossa mente. Por isso, todas as coisas podem funcionar como signos sem deixarem de ser coisas. Agir como signos é um dos aspectos das coisas ou fenômenos. (Santaella, 2005, p. 33)

Todo raciocínio é uma interpretação de signos de algum tipo. E a interpretação de um signo é apenas a construção de um novo signo. Este ato interpretativo é chamado de semiose. Por exemplo: dizemos que todo número da forma $z = a + bi, a \in R, b \in R \; e \; i = \sqrt{-1}$ é um número complexo. Este mesmo número é interpretado como ponto de um plano coordenado, como pode ser visualizado na figura 2.

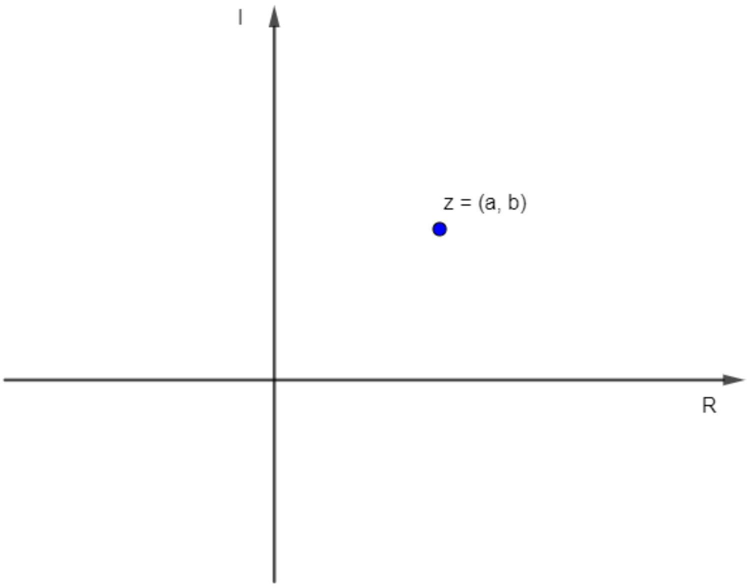

Figura 2: Ponto no plano coordenado
Fonte: O próprio autor

Semiose para Peirce (1958, 5.484) é uma ação que envolve a cooperação de três assuntos, como um sinal, seu objeto e sua influência interpretante. Santaella apresenta a análise de uma semiose dissertando que:

> Quando, na análise de uma semiose, chegamos na etapa do interpretante dinâmico, estaremos explicitando os níveis interpretativos que as diferentes facetas do signo efetivamente produzem em um intérprete, no caso, o próprio analista. Os níveis interpretativos efetivos distribuem-se em três camadas: a camada emocional, ou seja, as qualidades de sentimento e a emoção que o signo é capaz de produzir em nós; a camada energética, quando o signo nos impele a uma ação física ou puramente mental; e a camada lógica, esta a mais importante quando o signo visa produzir cognição. (Santaella, 2005, p.40)

Otte (2012) conceitua cognição como a contradição dialética entre o sujeito cognoscente e a realidade objetiva. Esta realidade refere-se a um objeto e nele busca ter "significado e sentido, o objeto deve poder ser dado de um modo qualquer" (Abbagnano, 2007, p.180). Toda cognição avança por meio da construção de uma representação adequada. Essa construção resolve a oposição entre o sujeito e o objeto dando a esta oposição uma forma. Por exemplo: O que é uma fração? Ou melhor, o que é a fração $\frac{1}{2}$? Uma resposta é dada pela representação na figura 3, isto é, o segmento AC que é a metade de um segmento AB.

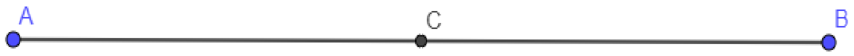

Figura 3: Fração em um segmento unitário AB.
Fonte: O próprio autor

O objeto do conhecimento é apenas uma representação. Kant (B74, B75) chamou isto de intuição. Para esse autor, a intuição e os conceitos constituem os elementos do nosso conhecimento. Esta intuição é estabelecida pela relação entre o sujeito e a realidade, se manifestando pela objetividade, mas também pela interrupção deste processo, isto é, pela resistência contra os nossos esforços de entender algo. "Um objeto matemático não existe independente de todas as suas possíveis representações, mas não deve ser confundido com alguma representação particular" (Otte, 2012, p. 16).

A ideia de signo nos ajuda a melhor compreender que as diferentes caracterizações da matemática não são tão distintas quanto pode parecer a uma primeira vista. Na verdade, elas representam aspectos complementares do pensamento matemático, pois os signos são usados referencialmente, isto é, usados para determinar coisas (ícones) e atributivamente, para indicar coisas que o sujeito pensa (índice). Também eles fornecem meios para descrições das coisas (símbolos).

Peirce, escreve que:

> um sinal tem dois graus de degeneração. Um sinal degenerado em menor grau é um obsistente ou índice, que é o sinal cujo significado de seu objeto é devido à sua condição de ter uma relação genuína com esse objeto, independente do interpretante. Um exemplo é a exclamação "Oi!" como indicativa de perigo presente, ou uma batida na porta como um indicativo

> de visitante. Um sinal degenerado em maior grau é um signo originaliano, ou ícone, que é um sinal cuja virtude significativa é devido simplesmente à sua qualidade. Tais, por exemplo, são as imaginações de como eu agiria sob certas circunstâncias, como me mostrando como outro homem seria suscetível a agir. (Peirce, 1958, 2.92 – tradução nossa)

Por exemplo: a equação $x + y = 0$ refere-se a uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano ortogonal, ou seja, é o ícone dessa reta. A equação $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ indica que a reta de equação $x + y = 0$ é uma cônica.

3. Os Experimentos Mentais uma visão geral

Os Experimentos Mentais são realizados quando não é possível ter acesso físico aos objetos considerados. Esses experimentos de um modo especial são factíveis no desenvolvimento da Matemática e de outras ciências. Por esse motivo, mereceu um olhar especial por diversos estudiosos no ramo da Filosofia da Ciência, na Matemática e, em estudos recentes, na Educação Matemática. Faremos um arrazoado sobre alguns autores que tratam sobre o tema.

Thomas Kuhn (2011), um dos mais importantes estudiosos no ramo da filosofia da ciência, conceitua Experimentos Mentais como um “instrumento analítico que auxilia os cientistas a encontrarem contradições e/ou erros conceituais, permitindo chegar a leis ou teorias diferentes daquelas que eles sustentavam anteriormente” (Cruz, 2020 p. 132). Esse mesmo autor coloca os Experimentos Mentais como uma ferramenta capaz de auxiliar na reformulação ou na compreensão de reajuste de conceitos já existentes, ajudando na percepção de dados antigos em uma nova forma de conceituação, isto é, “os Experimentos Mentais podem gerar uma mudança de paradigmas (Cruz, 2018, p.79).

Kuhn disserta que:

> Todo experimento mental bem-sucedido inclui em seu esboço alguma informação prévia sobre o mundo, essa informação não está em questão no experimento. Reciprocamente, se estivéssemos com um experimento mental real, os dados empíricos sobre os quais ele se baseia seriam bem conhecidos e amplamente aceitos antes de o próprio experimento ser ao menos concebido. Como então, baseado exclusivamente em dados familiares, um experimento mental é capaz de conduzir a novos conhecimentos ou compreensão da natureza? (Kuhn, 2011, p. 258)

O filosofo Canadense James Robert Brown, militante na filosofia da ciência, argumenta que os Experimentos Mentais estabelecem algum fenômeno e busca alguma teoria para explicá-lo (Brown, 2005). Esse autor considera que os Experimentos Mentais criam conjecturas, uma vez que estamos conjecturando, na aplicação de tais experimentos, uma explicação para os acontecimentos vividos na atividade.

Brown (2005) escreve que para entender a Matemática, por meio dos Experimentos Mentais, “temos que assumir um certo tipo de platonismo” (Cruz, 2018, p. 79), isto é, tem que haver uma certa crença na existência de objetos na Matemática, da mesma forma que acreditamos na existência de objetos na Física.

Bendegem (2003), matemático e filosofo da ciência, argumenta que os

Experimentos Mentais permitem explorar fatos imaginários, buscando entender melhor os fatos reais e as teorias que incorporam esses fatos. Esse mesmo autor sugere a substituição do termo fato por provas em Matemática. Logo, os Experimentos Mentais podem ajudar na compreensão das provas matemáticas que estamos procurando desenvolver ou descobrir (Cruz, 2020).

Mueller (1969), um estudioso da filosofia grega antiga, analisando as provas no livro "Os Elementos de Euclides", enfatiza que as "derivações euclidianas são Experimentos Mentais e esses experimentos têm a intenção de mostrar se certo tipo de objeto tem uma determinada propriedade" (Cruz, 2020 p. 133) ou se uma determinada operação é possível de ser realizada. Os Experimentos Mentais, neste caso, são considerados um espaço de meras possibilidades.

Mueller argumenta que há obstáculos em interpretar os argumentos matemáticos como Experimentos Mentais, escrevendo que:

> Em particular, pode-se perguntar como a consideração de um único objeto pode estabelecer uma afirmação geral sobre todos os objetos de um determinado tipo. Parte da dificuldade se deve, eu acho, ao fracasso em distinguir duas maneiras de interpretar declarações gerais como "Todos os triângulos isósceles têm ângulos da base iguais". Sob uma interpretação, o estado mental refere-se a (falar sobre, pressupõe) uma totalidade definida, isto é, a classe de todos os triângulos isósceles e diz algo sobre cada um deles. Sob a outra interpretação, tal totalidade definida é pressuposta e a frase tem um caráter muito mais condicional "Se um triângulo é isósceles, seus dois ângulos da base são iguais". Uma pessoa que interpreta uma generalização na segunda maneira pode sustentar que a frase "a classe de todos os triângulos isósceles" não têm sentido porque o número de triângulos isósceles é absolutamente indeterminado. (Mueller, 1969, p. 299, 300 – tradução nossa)

Esta forma de pensar nos leva a considerar que não há uma existência absoluta que possa envolver "nem a caracterização relacional dos objetos matemáticos e nem as provas matemáticas. A Matemática opera apenas com existência relativa" (Otte, 2003, p. 29).

4. Os Experimentos Mentais na Educação Matemática

Passaremos agora a conceituação dos Experimentos Mentais no campo da Educação Matemática. Cruz (2018), buscando construir uma conceituação para os Experimentos Mentais, classifica essas formas de experimentação como práticas desempenhadas pelo sujeito cognoscente, de colocar seu próprio pensamento, considerando um contexto bem definido (sistema de representação), como objeto de consideração, por meio de uma representação.

Os Experimentos Mentais na Educação Matemática servem a um duplo papel complementar: "o primeiro, mostrando a coerência do próprio conceito do ponto de vista do conteúdo; e o segundo, permitindo uma melhor compreensão das possibilidades de aplicação de tal conceito" (Cruz, 2018, p. 164).

As principais características de um Experimento Mental elencadas por Cruz (2018) são descritas como: i) - um sistema de atividades supostas, no qual as coisas são implicitamente assumidas; ii) permite o uso da intuição (representação), combinando em si, experiências e conhecimentos; iii) poderoso instrumento no aprimoramento e na compreensão sobre a natureza do conhecimento matemático; iv) serve como fatos ou formas de estabelecer algum fenômeno, permitindo buscar algumas hipóteses para explicá-lo. Esse mesmo autor dissertando sobre os Experimentos Mentais escreve que:

> A importância de sua utilidade revela-se por ser uma reflexão à base de dados conhecidos, ajudando-nos a resolver confusões em nosso modo de pensar. As verdades são consideradas sintéticas, do ponto de vista de Kant, e estão relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio diagramático, na concepção de Peirce, na busca de generalidade. (Cruz, 2018, p.167)

A possibilidade de aplicação dos Experimentos Mentais no ensino da Matemática, em especial, na compreensão do que poderia ser $\sqrt{-1}$, vem da crença de que a Matemática é uma atividade semiótica, ou seja, uma atividade de construção de diagramas, de experimentação sobre esses diagramas e de verificação dos resultados.

Para Peirce,

> diagrama é um representâmen que é predominantemente um ícone de relações e é ajudado a ser assim por convenções. Índices são também mais ou menos usados. Isto deve ser realizado sobre um sistema perfeitamente consistente de representações fundada sobre uma ideia simples e facilmente inteligível. (Peirce, 1958, 4. 418)

Este sistema de representação vai além de consistência, isto é, eles por um lado são essenciais para a construção de uma representação e por outro lado desempenham um papel normativo (Hoffmann, 2006).

Segundo Cruz,

> esse sistema de representação é caracterizado por um conjunto de convenções, cuja intenção é representar proposições e relações lógicas entre essas proposições, e indicar um conjunto de regras para a transformação de gráficos. Não há dúvida de que é preciso um sistema perfeitamente consistente de representação para mostrar implicações lógicas, e o mesmo é verdade para sistemas de representações em Matemática. (Cruz, 2019, p. 19)

Para o desenvolvimento dos Experimentos Mentais, as informações disponíveis devem permitir ao experimentador “utilizar como parte integrante de seu conhecimento aquilo que seu próprio conhecimento lhe tornara inacessível” (Kuhn, 2011, p. 281). É nesse sentido que esse processo condiciona uma nova compreensão da natureza dos objetos matemáticos ou a um novo conhecimento.

5. Existe $\sqrt{-1}$? O uso dos Experimentos Mentais

Existe $\sqrt{-1}$? Não existe número real tal que o quadrado seja igual a -1. E esta é a razão para dizermos que $\sqrt{-1}$ não existe no conjunto dos números reais. Mesmo assim buscaremos trazer a sua existência, de alguma forma. De um ponto de vista semiótico, apresentaremos, por meio de Experimentos Mentais, três maneiras distintas de fazer isto.

A maneira mais simples apresentada nas escolas de ensino médio define o número i como quantidade que obedece a leis aritméticas e algébricas, excetuando $i^2 = -1$. Se desejar pode chamá-lo de símbolo, o que, por definição, satisfaz a $i^2 = -1$. Neste caso, i é tratado algebricamente como qualquer letra ou indeterminado, que pode ser adicionado ou multiplicado. Essas operações e suas inversas obedecem às propriedades comutativa, distributiva e associativa como no campo dos números reais. A única diferença é $i^2 = -1$.

Números reais multiplicados por i como $3i$ ou $-2i$ são chamados de números imaginários ou imaginários puros. Os números da forma $z = a + bi$, sendo a e b números reais, são chamados de complexos; a é chamado de parte real e b é chamado de parte imaginária. Tanto a como b podem ser nulos. Se $a = 0$, temos um número imaginário e se $b = 0$ temos um número real, portanto, podemos concluir que números imaginários e números reais são números complexos. Esta compreensão não parece ser estranha, pois, por exemplo, todo número inteiro positivo e negativo é um tipo de número racional. Quando nós ampliamos um sistema numérico, queremos que os números que construímos se integrem aos números que já conhecemos.

Mas, uma vez que não existem números reais que satisfaz a solução da equação $x^2 = -1$, legitimamos a simples introdução de um quadrado cujo resultado é -1? Não seria uma trapaça? Parece que algum número como $\frac{1}{0}$ nos causa estranheza. “Se $\frac{1}{0}$ é estranho, como podemos ter certeza de que $\sqrt{-1}$ está ok?” (Hersh, 1997, p.275). Uma primeira resposta seria que os números complexos apresentam uma teoria poderosa que não tem sido contraditada. Isto seria o mesmo que dizer que “nunca tivemos problemas até agora e nunca teremos problemas” (Hersh, 1997, p. 275). Uma defesa dúbia, afirma Hersh (1997).

Para resolver tal problema, vamos renunciar a “introduzir ou criar” o quadrado de um número igual a -1. Ao invés disso, vamos encontrá-lo, por três maneiras distintas, como anunciado anteriormente. Cada uma dessas maneiras é um aspecto semiótico que envolve processos extensivos e intensivos, isto é, leva em consideração o contexto e as atividades ou ações desenvolvidas nesse mesmo contexto.

Destacamos as três maneiras, apoiando-se em Hersh (1997, p. 275) como: 1 – Um ponto em um plano de coordenadas x e y, o qual indicaremos por “x O y”. 2 – Um par ordenado de números reais; 3 – Uma matriz 2 por 2 de números reais;

5.1. Um ponto em um plano de coordenadas x e y, o qual indicaremos por “x O y”.

Após séculos de ceticismo, os matemáticos aceitaram os números complexos como pontos no plano “x O y”, afirma Hersh (1997). O complexo $2 + 3i$, por exemplo, é associado ao ponto com coordenadas $x = 2$ e $y = 3$. Desta forma, qualquer número complexo pode ser determinado por uma coordenada no plano e qualquer ponto no plano pode ser indicado por um número complexo. Aplicaremos uma experimentação mental, cujas representações e atividades serão desenvolvidas com o software de geometria dinâmica GeoGebra.

Adição: Para exemplificar, vamos adicionar os números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = -3 + 2i$. Começamos por representar os complexos z_1 e z_2 como pontos do plano coordenado e na caixa de entrada do GeoGebra, indicamos a soma. O resultado é o ponto que nomeamos como $z_1 + z_2$, na figura 4.

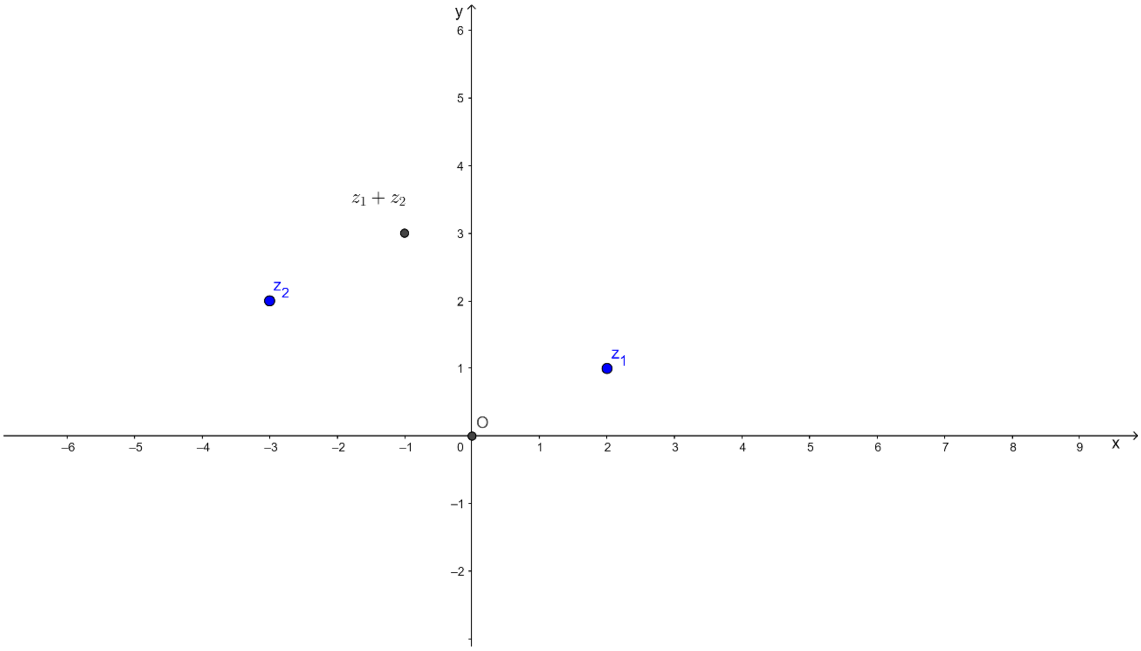

Figura 4: Adição de complexos
Fonte: O próprio autor

Tomamos o vetor $\overrightarrow{Oz_2}$ e verificamos na figura 5 que $z_1 + z_2$ é o resultado da translação de z_1 segundo o vetor $\overrightarrow{Oz_2}$. Isto acontece da mesma forma, se tomarmos o vetor $\overrightarrow{Oz_1}$ e transladarmos z_2 segundo esse vetor.

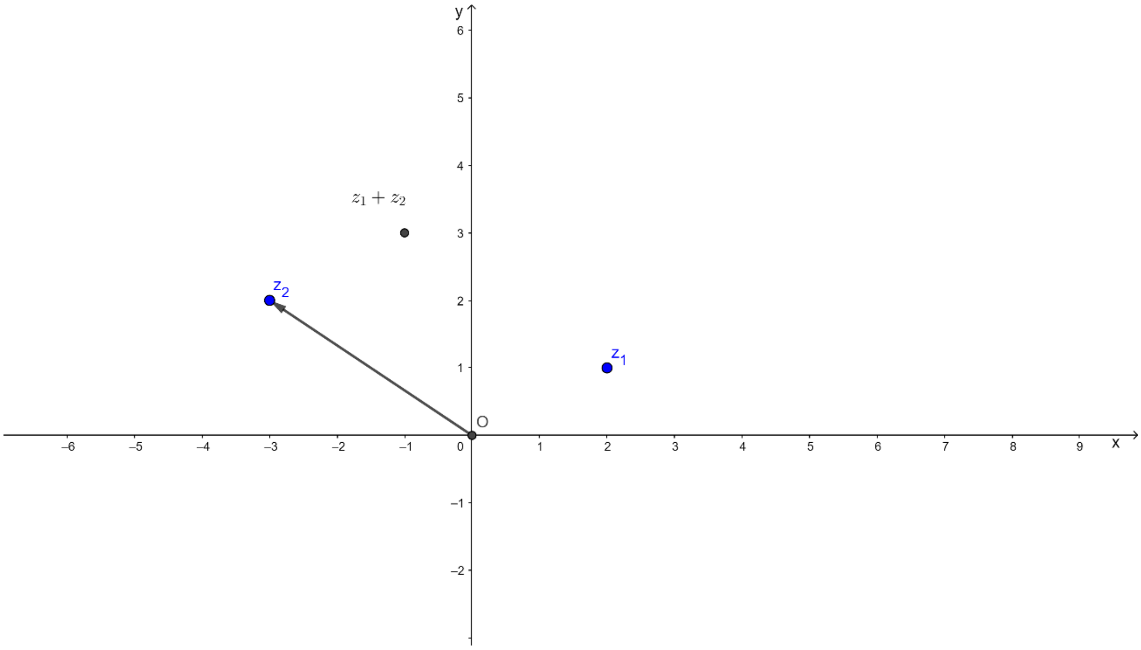

Figura 5: Translação
Fonte: O próprio autor

Portanto, adição é deslocamento. Se movimentarmos z_1 ou z_2, vamos perceber que a mesma operação será válida, quaisquer que sejam z_1 e z_2. Isto significa que para somar um número complexo z_1 com um número complexo z_2, deslocamos ou transladamos z_1 segundo o vetor com origem na origem do plano coordenado e extremidade em z_2, ou vice-versa.

Multiplicação: Para a multiplicação, procedemos inicialmente, da mesma forma que a adição, isto é, marcamos os complexos z_1 e z_2 no GeoGebra e em seguida, na caixa de entrada indicamos a multiplicação desses dois números. Vamos multiplicar, por exemplo, os números complexos $z_1 = 2 + i \; e \; z_2 = -3 + 2i$. O resultado está apresentado na figura 6.

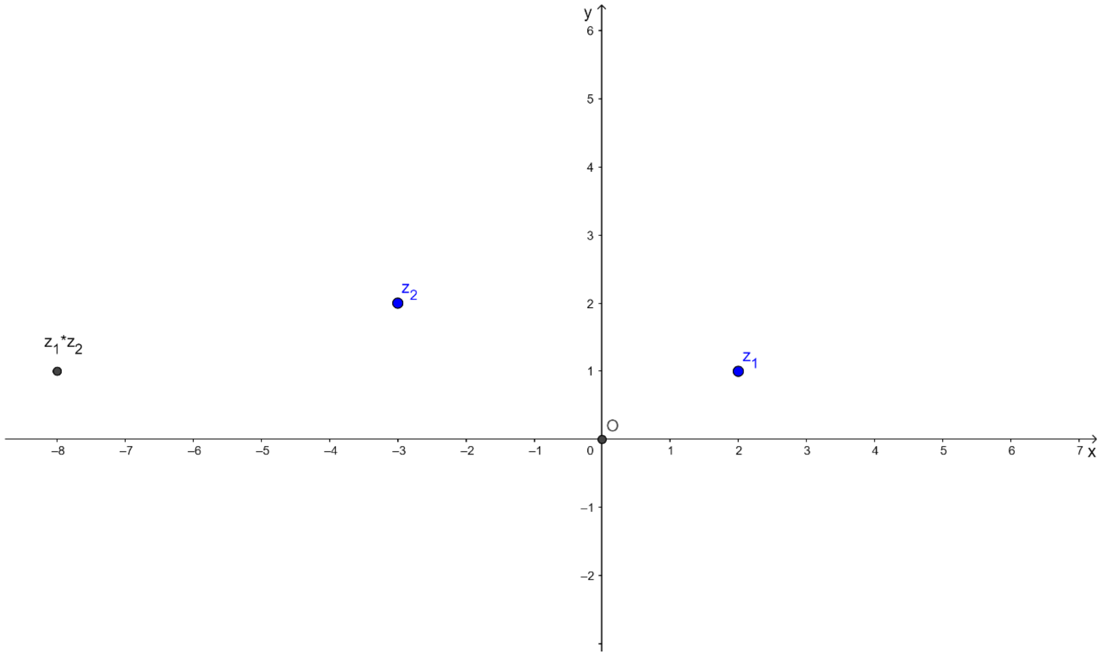

Figura 6: Multiplicação de complexos
Fonte: O próprio autor

Um dado interessante que percebemos, na figura 7, é que o ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{Oz_1}$ e $\overrightarrow{Oz_1 \cdot z_2}$ é igual ao ângulo formado pelo eixo Ox (positivo) e o vetor $\overrightarrow{Oz_2}$. Consideramos esses ângulos sempre no sentido anti-horário.

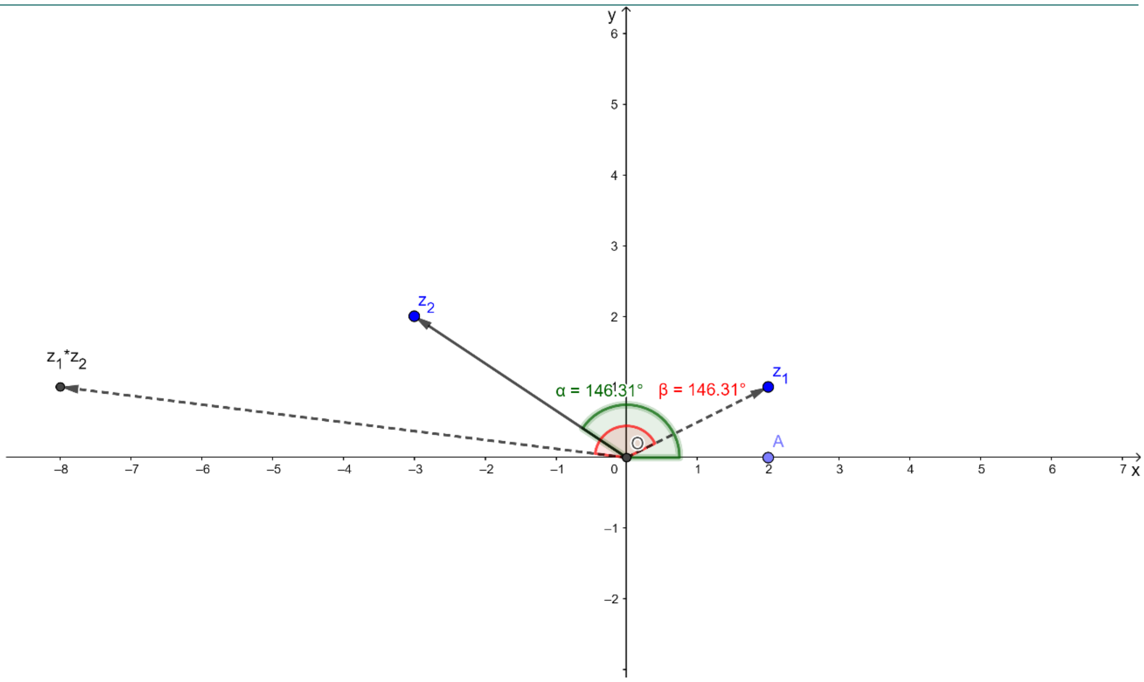

Figura 7: Rotação
Fonte: O próprio autor

Portanto, de z_1 para a linha do resultado $z_1 \cdot z_2$ houve uma rotação em torno da origem cujo ângulo de rotação formado pela parte positiva do eixo Ox e o vetor $\overrightarrow{Oz_2}$. Mas para chegar à multiplicação de fato, percebemos que em relação ao resultado da rotação, o ponto foi deslocado a partir da origem, uma quantidade de vezes correspondente à norma do vetor $\overrightarrow{Oz_2}$. Esta transformação, apresentada na figura 8, chamamos de homotetia.

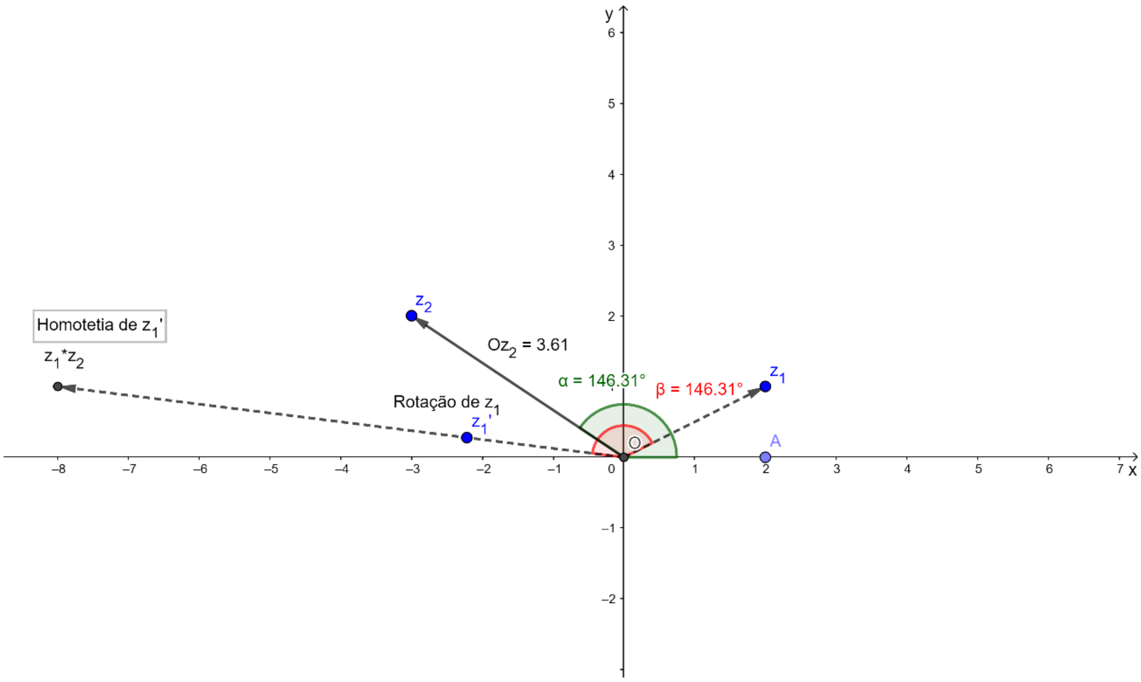

Figura 8: Homotetia
Fonte: O próprio autor

Portanto, multiplicar significa esticar e girar. Essas transformações acontecem mesmo se movimentarmos no GeoGebra z_1 e z_2. Isto quer dizer que fazemos uma rotação em torno da origem do plano coordenado e uma homotetia[1] do resultado da rotação com centro na origem do plano coordenado e razão de homotetia igual ao módulo do vetor formado por um dos complexos considerados.

As características dos Experimentos Mentais estavam presentes em todo o processo, desde a representação dos números complexos como ponto no plano coordenado, passando pela suposição da ideia de vetores, na intuição em representar as ações desenvolvidas nas duas operações, na verificação dos resultados, no aprimoramento do nosso conhecimento matemático e no estabelecimento do fenômeno que nos permitiu pensar as operações dos números complexos como operações geométricas. As operações de adição e multiplicação de números complexos passaram a ser operações geométricas elementares, por meio de transformações isométricas (translação e rotação) e homotetia, sempre com base na origem do plano coordenado.

Passamos agora a discutir, com base na operação e nas conceituações dadas, a multiplicação do número complexo $z_3 = i$, por ele mesmo. Note que $i = 0 + 1i$, evidenciando que $x = 0$ e $y = 1$. O ponto correspondente a i está localizado no eixo y. Podemos chamar o eixo y de eixo imaginário. A unidade imaginária i está lá, acima da origem. O eixo x é chamado de eixo real.

A norma do vetor que vai da origem ao ponto i é igual a 1 e o ângulo que ele faz com eixo real (parte positiva do eixo real) é 90°. Multiplicando $i \times i$, faremos uma rotação do vetor de extremidade em i sob um ângulo de 90° em torno da origem do sistema coordenado e uma homotetia de razão igual a 1 e vamos verificar o resultado desta transformação vetorial na figura 9.

[1] Uma homotetia é uma transformação do plano em si mesmo que associa cada ponto P do plano, em relação a um centro O e uma razão K (k diferente de zero) a um ponto P' em que: a)se k>0 então P'pertence à semirreta OP e OP'=k.OP; b)se k<0 então P'pertence à semirreta oposta de OP e OP'= |k| OP; Se k>1 dizemos que houve uma **ampliação**. Se 0<k<1 dizemos que houve uma **redução**. Se k=1 temos a transformação identidade. Se k<0 temos uma homotetia inversa. Um caso particular de homotetia inversa é a simetria central (rotação de 180º) de fator k= -1.

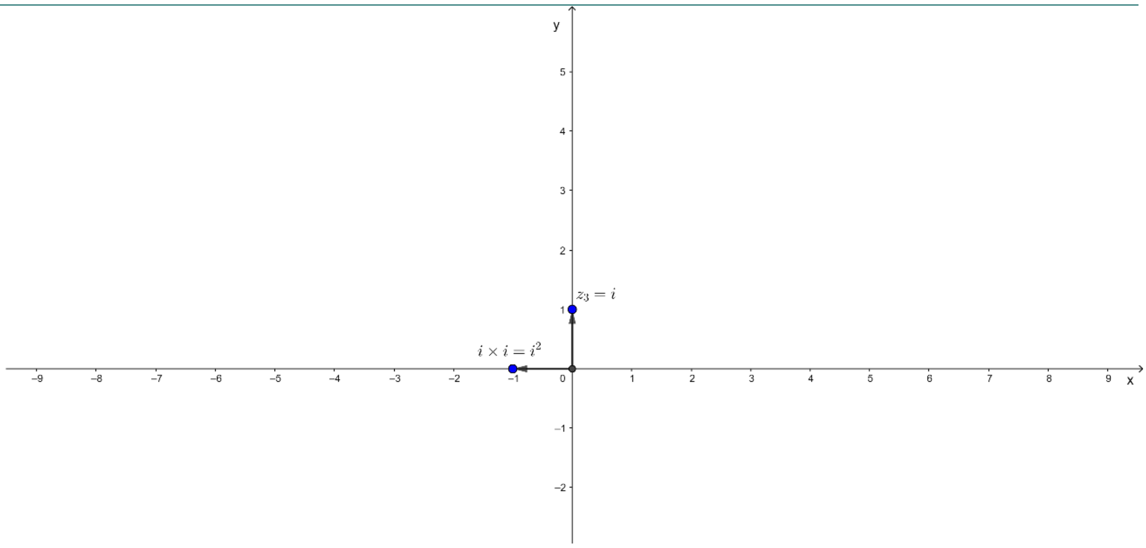

Figura 9: $i \times i$
Fonte: O próprio autor

O experimento nos indica que $i \times i = i^2$ está no eixo real a uma unidade à esquerda da origem. Isto mostra que o resultado é o ponto de coordenadas $(-1{,}0)$. Portanto, o número complexo resultado desta multiplicação é $-1 + 0i$, ou simplesmente -1. Mostramos então, geometricamente que $i^2 = -1$. Hersh (1997) afirma que a geometria era a parte mais venerada da matemática. Esse mesmo autor complementa dizendo que a identificação dos números complexos por meio da geometria, tornou esses números mais respeitáveis.

5.2. Um par ordenado de números reais

Pode-se considerar que os números complexos são definidos por leis de operações aritméticas, formando assim, como afirma Hersh (1997, p.276), "um sistema algébrico independente, definido a priori por sua interpretação geométrica".

> A associação dos números complexos aos pontos do plano foi enfatizada por Gauss como por nenhum outro matemático antes dele, mas o passo decisivo para que o estatuto dos números complexos fosse firmemente estabelecido foi dado com a introdução da noção de vetor. Esse conceito apareceu na Inglaterra, no século XIX, nos trabalhos de W.R. Hamilton. (Roque, 2012, p. 410)

O matemático Irlandês William Rowan Hamilton, tratando da construção dos números complexos, define esses números como pares ordenados de números reais (Hersh, 1997). Hamilton definiu igualdade de pares ordenados, soma e multiplicação, das seguintes formas: Dados dois pares ordenados (a, b) e (c, d).

Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \ e \ b = d$.

Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Multiplicação: $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Hamilton não tirou essa forma de multiplicar do nada, ele deve ter pensado na multiplicação dos números $a + bi$ e $b + di$ e levou o resultado para sua forma de par ordenado. Tudo isto parece trivial. No entanto, Hamilton "se livra do suspeito i e substitui pelo inocente (0,1)" (Hersh, 1997, p. 277). Desta forma, o quadrado de i será igual a $(0,1) \times (0,1)$, isto é:

$$(0,1) \times (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0).$$

Portanto,

$$i^2 = (-1,0).$$

Deve-se verificar as leis aritméticas que os números complexos compartilham com os números reais. As leis comutativas da adição e multiplicação, as leis associativas para adição e multiplicação e a lei distributiva da multiplicação em relação a soma. Essas verificações são desenvolvidas por cálculos diretos, de acordo com o interesse de quem quiser realizar.

Note que no par ordenado, quando o segundo componente do par é 0, esse par se comporta como um número real. O zero na segunda posição não atrapalha, por exemplo, a identidade multiplicativa para os números complexos na forma de par ordenado é $(1,0)$, pois $(a,b) \times (1,0) = (a,b)$ e o 1 é a identidade multiplicativa para os números reais, portando $(1,0) = 1$. O par (-1,0), é algebricamente o mesmo que o número real -1, assim como a identidade aditiva (0,0) é algebricamente o mesmo que o número real zero. Logo, podemos concluir que $i^2 = (-1,0) = -1$.

Um detalhe importante a ser percebido nesta forma de apresentar $i^2 = -1$, apesar de ser uma maneira semiótica interessante, é que esta ação não se qualifica como um Experimento Mental, pois não mostra algum aspecto característico desse tipo de experimento. Consideramos, apesar de importante, que são calculações apenas, que respeitam o que foi previamente definido para as operações com pares ordenados.

5.3. Uma matriz 2 por 2 de números reais

Uma outra maneira de construir $i^2 = -1$ é usando matrizes quadradas de ordem 2 de números reais. Este outro aspecto semiótico, nos traz outras interpretações. Por exemplo, o complexo $a + bi$ corresponderá a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, isto é, os elementos da matriz serão os números reais a e b.

A soma de dois números complexos neste caso, será dada pela soma de matrizes e a multiplicação da mesma forma. Isto quer dizer que o papel usual da álgebra matricial corresponde ao papel usual da adição e multiplicação de números complexos, ou seja, se considerarmos os números complexos $a + bi$ e $c + di$, podemos associá-los respectivamente às matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$.

Adição: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix}$ que corresponde ao número complexo $(a + c) + (b + d)i$.

Multiplicação: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$ que corresponde ao número complexo $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Neste caso, aplicamos um Experimento Mental, que olha para a estrutura matricial e busca analogias com os números complexos. As características dos

Experimentos Mentais se mostram na suposição de considerar um número complexo associado a uma matriz e no desenvolvimento do raciocínio diagramático por meio do sistema de representação das matrizes, isto é, baseamo-nos na estrutura operacional e conceitual das matrizes. Logo, representando os números complexos na forma matricial, estabelecemos um fenômeno e buscamos explicações que nos deram condições de pensar os números complexos e os respectivos resultados das operações de adição e multiplicação. Construída esta ideia, vamos pensar agora na multiplicação de $i \times i$.

O número complexo $i = 0 + 1i$ corresponde a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. O nosso objetivo é encontrar $i^2 = i \times i$. Este resultado será dado pela multiplicação da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ por ela mesma, logo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A matriz que é resultado deste produto de matrizes corresponde ao número complexo $-1 + 0i = -1$. Portanto $i^2 = -1$. Desta forma encontramos a $\sqrt{-1}$ interpretando -1 como uma matriz quadrada de ordem 2. O que podemos dizer sobre a existência de $\sqrt{-1}$?. “Isso existe se interpretarmos -1 de alguma maneira” (Hersh, 1997, p. 278).

6. Conclusão

Entendemos que Matemática não é um jogo de xadrez, pois sempre leva à construção de generalizações. Generalizações, neste caso, são as ações desenvolvidas em uma proposição particular, para se chegar a uma proposição mais geral. Mas só é possível tal generalização se pudermos representar o imaginário, o impossível ou o irracional (no sentido de não existir na razão imediata). E isto fortalece a nossa convicção de que “todo pensamento acontece por meio de signos” (Cruz, 2018, p.21).

Cruz (2018) afirma “que a visão que se tem hoje da Matemática a caracteriza como um determinado tipo de raciocínio, expressando-a como um amontoado de fórmulas, sendo a matemática consistida de afirmações”. Mas não foi sempre assim. Na verdade, as provas matemáticas até o final do século XVIII eram algum tipo de Experimentos Mentais. Toda epistemologia Kantiana é baseada neste fato.

Esses experimentos estão relacionados com o nosso aparato conceitual e uma realidade objetiva, por isto a crença de que os Experimentos Mentais desempenham um papel importante no processo de pensamento matemático e na aprendizagem também.

Analisando as três formas distintas de apresentar $i^2 = -1$, podemos fazer um contraste entre a aplicação dos Experimentos Mentais com a forma de apresentar os números complexos como um par ordenado de números reais. A construção dos “pares ordenados”, por exemplo, usou uma estrutura algébrica criada especificamente para a construção dos números complexos. Não qualificamos esta forma de apresentação como um Experimento Mental, pois os dados já estavam todos explícitos na apresentação do problema e não conseguimos identificar as características dos Experimentos Mentais neste processo.

No Experimento Mental “ponto no plano coordenado”, construímos a referência à base de um argumento especulativo, isto é, os números complexos se transformaram em vetores e as operações se transfizeram em isometrias e/ou homotetia. No Experimento Mental “Matrizes de ordem 2”, a construção de números complexos por matrizes utilizou algo já conhecido, uma das características dos Experimentos Mentais, adequando esses números a um caso particular de matrizes, com o detalhe de ter os elementos da diagonal principal iguais e os elementos da diagonal secundária simétricos.

O fato essencial, é que a Matemática não é simplesmente um conhecimento de algoritmos. A Matemática tem a necessidade de idealização e de generalização. Temos que criar novos conceitos e novas ideias (Cruz, 2018).

Na Matemática construir diagramas permite ganhar uma intuição das coisas, que de outra maneira não seria possível. O pensamento diagramático se traduz na dinâmica de aplicação dos Experimentos Mentais responsáveis por permitir a produção de novas ideias.

7. Referências bibliográficas

Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de Filosofia*. 5ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

Bendegem, J. P. V. (2003). Thought experiments in mathematics: anything but proof. *Philosophical, p. 9 – 33.*

Brown, J. R. (2005). *The Laboratory of the mind: Thought experiments in the natural sciences*. This edition published in the Taylor & Francis e- Library.

Cruz, W. J. (2015). Experimentos Mentais e provas matemática formais. São Paulo: *UNIAN, 2015, 233 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós Graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo*.

Cruz, W. J. (2018). *Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemáticas formais*. Curitiba: Appris.

Cruz, W. J. (2019). O raciocínio diagramático e os experimentos mentais numa perspectiva semiótica*. Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 24, n. 62, p. 6-28.*

Cruz, W. J. (2020). Matemática é criação ou descoberta? A importância dos Experimentos Mentais*. UNIÓN [en línea], 15(57), 121-137. Recuperado el 05 de abril de 2021, de https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/70*

D’Amore, B. (2007). *Elementos da didática da matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Hersh, R. (1997*). What is Mathematics really*? Oxford University Press, Inc.

Hoffmann, H. G. M. (2006). Seeing problems, seeing solutions. Abduction and diagrammatic reasoning in a theory of scientific discovery. *Georgia Institute of Technology: School of Public Policy.*

Kant, I. (2013). *Crítica da razão pura.* Tradução e notas de Fernando Costa Mattos, 3 ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes.

Kuhn, T. S. (2011). *A tensão essencial*. São Paulo: Editora UNESP, p. 257 – 282.

Mueller, I. (1996). Euclid's Elements and the Axiomatic Method. *Brit. F. Phil. Sci. 20 (1969), Printed in Great Britain,* p. 289-309.

Otte, M. (2012). *A realidade das Idéias*: Uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática. Cuiabá: EDUFMT.

Otte, M. F. (2003). Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico. São Paulo: Educação Matemática Pesquisa*: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, n.1, pp. 13 – 55.

Peirce, C. S. (1958). CP = *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP).*

Peirce, C. S. (CP). (2010). *Semiótica*. Trad. Jose Teixeira Coelho Neto. 4ª ed. São Paulo: Perspectiva.

Roque, T. (2012). *História da Matemática*: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar.

Santaella, L. (2005). *Semiótica aplicada*. São Paulo: PioneiraThomson Learning.

Vygotsky, L. S. (1896 – 1934). *Pensamento e Linguagem*. Edição: Ridendo Castigat Mores. Fonte Digital www.jahr.org.

Autor:

Willian José da Cruz é Professor efetivo do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora - MG (UFJF - Brasil). Doutor em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN); Mestre em Educação Matemática pela UFJF. Coordenador do curso de Matemática Integral da UFJF. Contatos:
williancruz990@gmail.com ou willian.jose.cruz@ice.ufjf.br ...