UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 60. Diciembre 2020
Páginas 289-297

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Creando una representación numérica. Experiencias didácticas con profesores de primaria en formación

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Julio y Zoila representan las cantidades de canicas que tienen, haciendo agrupaciones y reagrupaciones de tríos y usando solamente los símbolos

I , **Γ** y **Δ**

Julio dice que tiene **IΔΓ** *canicas y Zoila dice que tiene* **IΓI** *canicas. ¿Cuál de estos números es par?*

Este problema surgió en una clase a futuros profesores de primaria. Se origina al reflexionar sobre el conteo y el uso de símbolos para representar cantidades, e ilustra la importancia de dar sentido a la regla, muy conocida y usada, de reconocer la paridad de un número con solo observar la paridad de su cifra correspondiente a las unidades.

Los símbolos usados fueron adoptados en una clase presencial con estudiantes de profesorado de primaria, al buscar una forma de representar las cantidades de los elementos de ciertos conjuntos, usando muy pocos símbolos, que no sean parte de los que normalmente usamos. La experiencia fue adaptada para una clase remota en estos tiempos de confinamiento, y su realización fue muy satisfactoria. La intención es brindar a los futuros profesores de primaria una vivencia que los lleve a imaginar lo que significa para los niños representar cantidades usando los conocidos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 cuyos nombres tienen que memorizar para identificarlos. Es natural preguntarse ¿Por qué tienen esas formas esos símbolos?, ¿Por qué tienen esos nombres? Si bien es cierto que hay una historia explicativa, también es cierto que pudieron ser otros símbolos y otros nombres y que finalmente llegan a los niños como formas y nombres arbitrarios que tienen que memorizar y utilizar.

Entonces decidimos imaginar con los estudiantes que no conocemos el sistema de numeración decimal y procedimos a representar la cantidad de elementos de algunos conjuntos de nuestro entorno, creando ciertos símbolos arbitrarios y poniéndoles nombres también arbitrarios. Así:

- Para representar la cantidad de elementos de los conjuntos que tienen tantos elementos como el conjunto de cabezas que normalmente tienen las personas, sugirieron usar el símbolo ❙ y llamarlo **MI**.
- Para representar la cantidad de elementos de los conjuntos que tienen tantos elementos como el conjunto de brazos que normalmente tienen las personas, sugirieron usar el símbolo Γ y llamarlo **DERF**.
- Para representar la cantidad de elementos de los conjuntos que tienen tantos elementos como el conjunto de alas que normalmente tienen las personas (o sea, la cantidad de elementos del conjunto vacío), sugirieron usar el símbolo △ y llamarlo **TER**.

Con este convenio, ya pudimos usar estos símbolos para representar la cantidad de elementos de varios conjuntos; por ejemplo,

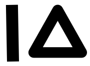
- Para representar la cantidad de vocales que tiene la palabra **sol**, usamos el símbolo ❙, porque tiene tantos elementos como el conjunto de cabezas que normalmente tienen las personas. Así, tal conjunto, que lo llamamos S, tiene **MI** elementos.
- Para representar la cantidad de vocales que tiene la palabra **luna**, usamos el símbolo Γ, porque tiene tantos elementos como el conjunto de brazos que normalmente tienen las personas. Así, tal conjunto, que lo llamamos L, tiene **DERF** elementos.

Pero, ¿cómo representar la cantidad de elementos de conjuntos con más elementos?

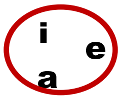
Por ejemplo, *¿cómo podemos representar la cantidad de vocales que tiene la palabra* **tierra***?*

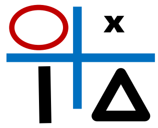
Este conjunto, que lo llamamos T, es **a i e** y ninguno de los símbolos creados representa la cantidad de sus elementos.

Surgió la idea de considerarlos como grupo y así tendríamos **MI** grupos; pero no podíamos decir que el conjunto T tiene **MI** elementos, porque es claro que no tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto S y esto debería reflejarse en la expresión simbólica. Se observó que en este caso, al hacer la agrupación, teníamos **MI** grupos y ningún "elemento suelto" (o sea, un conjunto vacío de "elementos sueltos") y para eso podíamos usar el símbolo △

Así, el número de elementos del conjunto T quedó representado por  que leímos **MI TER.**

Para que quede claro lo que representa cada símbolo, según su posición, graficamos y esquematizamos de la siguiente manera:

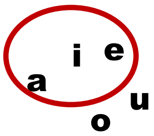


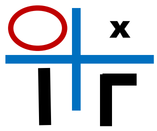


MI TER

El aspa **x** representa a los “elementos sueltos”, que - como podemos observar a la izquierda - no existen, al haber hecho la agrupación, y por eso tenemos **TER** elementos sueltos y **MI** grupos con los elementos **i**, **e**, **a**. A los conjuntos con esta cantidad de elementos los llamaremos *tríos*

De esta manera, se puede representar, por ejemplo, la cantidad de elementos que tiene el conjunto de dedos de una mano de una persona normal. Como este conjunto tiene tantos elementos como el conjunto de vocales del alfabeto español, usemos este para facilitar la ilustración:

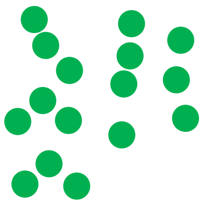




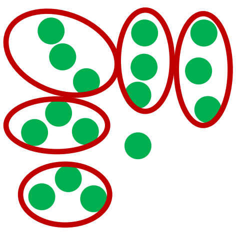
Vemos que hay **MI** tríos y **DERF** elementos sueltos.
En este contexto, surgió el siguiente problema

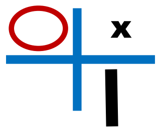
MI DERF

Problema . Usar la simbología adoptada (los símbolos de TER, MI y DERF) para expresar el número de canicas que tiene Pedro, si estas están representadas en el siguiente conjunto:

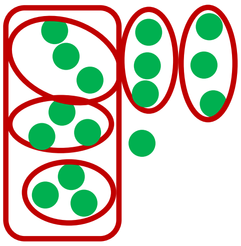


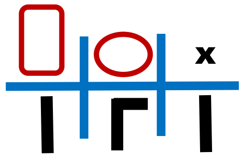
Solución
Hacemos las agrupaciones del caso:





Y observamos que hay **MI** canicas sueltas y varios tríos de canicas. Como ninguno de nuestros símbolos expresa por sí solo esa cantidad de tríos, procedemos a agrupar los tríos. Los rectángulos nos servirán para visualizar tríos de tríos. Entonces añadimos otra columna a nuestro cuadro de la derecha para anotar que observamos **MI** rectángulos (o sea **MI** trío de tríos), **DERF** "tríos sueltos" y **Mi** canicas sueltas. Así tenemos el código **MI DERF MI**, con sus símbolos correspondientes.

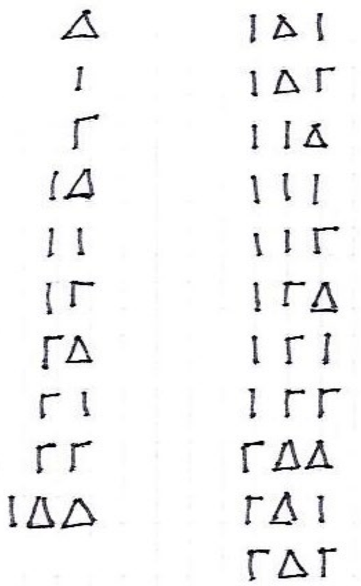




MI DERF MI

A partir de este problema, hicimos ejercicios para expresar en forma simbólica determinada cantidad de elementos, usando solamente TER, MI y DERF y agrupaciones y reagrupaciones como las mostradas (ejercicios de *codificación*); y otros ejercicios, en los que, partiendo de códigos con TER, MI y DERF, se tenía que mostrar un conjunto con la cantidad de elementos que expresaban tales códigos (ejercicios de *decodificación*).

En la clase presencial, un ejercicio interesante fue escribir en la pizarra una lista ordenada de símbolos que representen cantidades de elementos de conjuntos, partiendo de △, hasta llegar a un símbolo que represente el total de los dedos, en las manos y en los pies, que normalmente tienen las personas. Cada símbolo de la lista fue escrito por un estudiante diferente. Pronto fueron desprendiéndose de la necesidad de hacer codificaciones para cada caso y se generó una gran interacción en el aula. Se llegó a una lista como la siguiente:



Con esta lista en la pizarra – o en una diapositiva, en el caso de la exposición remota – pedí que la observen y

- Expresen algunas emociones sentidas al construir la lista.
- Mencionen algunas regularidades que encuentren.
- Expresen algunas propiedades que conjeturen.
- Inventen algún problema

Fue una experiencia muy interesante y a continuación comento algunas reacciones a estos pedidos:

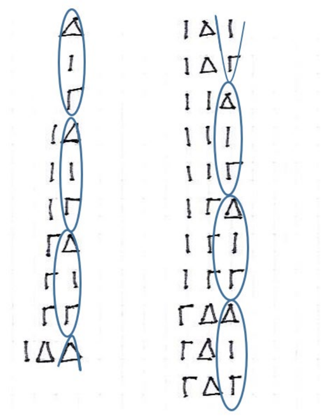
Emociones

Algunas emociones expresadas por los estudiantes fueron

- Tensión inicial, porque al inicio parecía muy difícil.
- Entusiasmo al ir viendo que la lista se iba construyendo.
- Alegría al ir descubriendo una "técnica" para escribir el siguiente número de la lista.

Regularidades

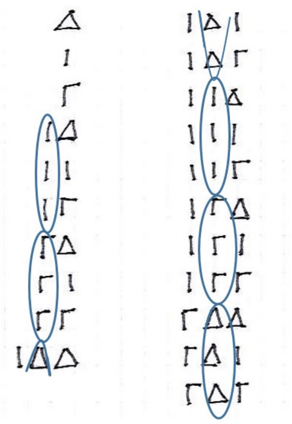
Una estudiante manifestó que el siguiente número de la lista "terminará en TER", por la regularidad que observó: la secuencia de símbolos del extremo de la derecha (el de los "elementos sueltos") tiene un patrón de repetición que es Δ, I, Γ.



Notarlo en la figura de la derecha.

Otra estudiante observó que "los símbolos que están al lado del último, siguen otro patrón de repetición:

III , ΓΓΓ , ΔΔΔ

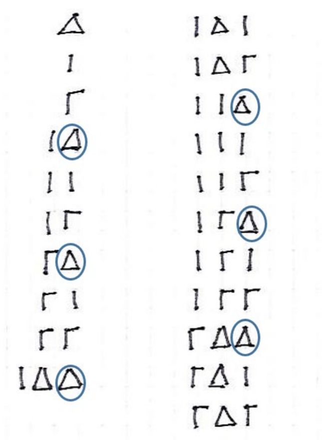


Propiedades

Una propiedad que encontraron fue:

"*Los números que terminan en* Δ *son múltiplos de tres*"

Hice notar que habíamos quedado en no usar nombres del sistema decimal – como "tres" – y que la expresión "múltiplo" no la habíamos definido, pero que a estas alturas podíamos darnos una "licencia", pues la observación era muy buena. Pedí la explicación y "abusando de la licencia", el grupo que hizo esta observación dijo: "en la lista se ve que *el tres, el seis, el nueve, el doce, el quince y el dieciocho terminan en TER*", e hicieron las marcas correspondientes en la lista[1], como en la figura del lado.



Esta fue una excelente oportunidad para comentar lo importante que es la observación de casos particulares, pues puede llevar a conjeturar una propiedad como la enunciada; sin embargo, hice notar que para aceptar ese enunciado como una propiedad general, se requiere más que la verificación de casos particulares y pedí pensar en las razones que expliquen que siempre que se tenga una cantidad que sea múltiplo de tres, su representación, usando TER, MI y DERF, terminará en TER.

Una razón que dieron fue: "*es igual a lo que ocurre con la base diez: los números que son múltiplos de diez, terminan en cero, y el TER es como el cero*"

Aplaudí la observación y repregunté ¿y por qué ocurre eso cuando representamos cantidades en la base diez?

Luego de discusiones en los grupos, se llegó a la conclusión que la propiedad enunciada es cierta porque si un número termina en TER, es porque no tiene elementos sueltos, lo cual quiere decir que <u>todos</u> los elementos están agrupados en tríos (sin importar que algunos o muchos de estos tríos estén reagrupados en tríos de tríos, o en tríos de tríos de tríos, etc.). Entonces, lo que se tiene es una cierta cantidad de tríos, que es un múltiplo de tres. Quienes observaron la similitud con el sistema decimal, explicitaron la analogía entre las agrupaciones y reagrupaciones en tríos y las agrupaciones y reagrupaciones en decenas.

Problemas

Las discusiones anteriores, grupales, intergrupales y con toda la clase, facilitaron la creación de problemas usando la simbología adoptada para representar cantidades de elementos de conjuntos.

Un primer problema que propusieron fue

Escribir el siguiente número de la lista.

Comentaron que más bien se trataba de un ejercicio y fue rápidamente resuelto, usando los patrones de repetición que ya habían sido explicitados cuando pedí que encuentren regularidades. Así, tal número fue escrito:

Γ I Δ

[1] Hice el comentario que en la lista también debería marcarse el primero, pues el cero es múltiplo de tres, pero no nos detuvimos en esto. Lo trataríamos en su oportunidad.

Además, por terminar en TER, se verificó que es un múltiplo de tres.

Otro problema creado fue:

> *¿Cómo reconocer si un número es par, si está escrito con los símbolos TER, MI, DERF?*

Otro grupo, motivado por este problema y pensando en proponer a niños un caso concreto, creó el problema con el que inicio este artículo y que reproduzco a continuación:

> *Julio y Zoila representan las cantidades de canicas que tienen, haciendo agrupaciones y reagrupaciones de tríos y usando solamente los símbolos*
>
> **I** , **Γ** *y* **Δ**
>
> *Julio dice que tiene* **IΔΓ** *canicas y Zoila dice que tiene* **IΓI** *canicas. ¿Cuál de estos números es par?*

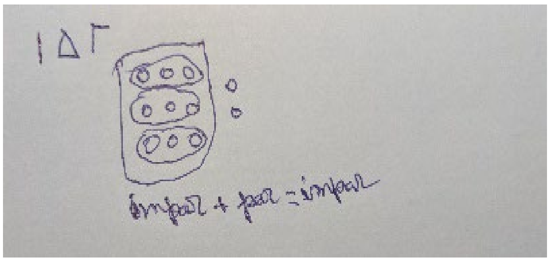
Ciertamente, este problema puede resolverse haciendo las decodificaciones correspondientes; pero sin entrar a ese detalle, una estudiante manifestó que siendo el DERF como el dos del sistema decimal y el MI como el uno, el número que termina en DERF es par y el que termina en MI es impar. Esto no fue aceptado en el aula, porque algunos estudiantes encontraron la respuesta identificando los números en la lista y verificaron que el que termina en DERF, en el sistema de numeración decimal corresponde al 11, que es impar, y el que termina en MI corresponde al 16, que es par. Surgió entonces la interrogante ¿por qué en el sistema de numeración decimal sí se cumple la regla y no se cumple en nuestro sistema de agrupaciones y reagrupaciones de tríos?

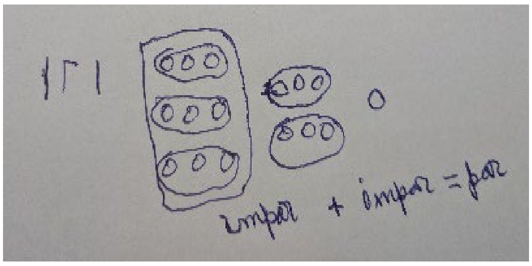
Luego de trabajar en grupos, uno de ellos observó que en el sistema decimal las agrupaciones y reagrupaciones son de diez en diez, o sea agrupaciones y reagrupaciones de un número par de elementos; así lo único que determina si un número es par o impar es el número de "elementos sueltos", es decir, el de las unidades; en cambio con TER, MI y DERF, las agrupaciones y reagrupaciones son de tres en tres; o sea de un número impar de elementos y entonces la regla ya no puede funcionar igual.

Felicité por esa importante observación e invité a pensar en por qué ya no puede funcionar así en nuestra representación numérica. Luego de intercambios de ideas en cada grupo, uno de ellos sostuvo: "Es porque cualquier cantidad de decenas siempre es un número par; en cambio, cualquier cantidad de tríos no siempre es un número par (por ejemplo 3 tríos es impar, pero 4 tríos es par); y por eso, para saber si un número es par o impar, con TER, MI, DERF, no podemos basarnos solo en el número de 'elementos sueltos' ".

Otro estudiante, resumiendo el trabajo que continuó haciendo su grupo, añadió: "además, impar más par da impar, como en **IΔΓ** y por eso es impar; en cambio, impar más impar es par, como en 

y por eso es par”. Para aclarar este razonamiento, otra integrante del grupo mostró los dibujos que hicieron:

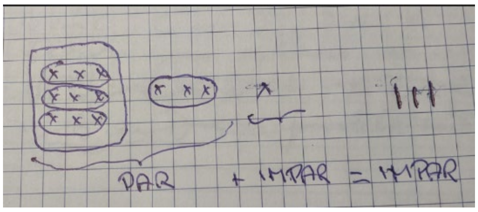


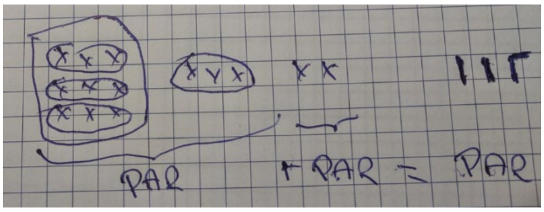


Explicó: “en el primero se ve una cantidad impar de tríos (que es impar) y una cantidad par de elementos sueltos. Como impar más par es impar, la cantidad total es impar. En cambio, en el segundo dibujo, se ve que también hay una cantidad impar de tríos (que ya vimos que es impar), pero una cantidad impar de elementos sueltos, y como impar más impar es par, la cantidad total es par”.

Después de estas ilustraciones, y como en ambos casos había un número impar de tríos, pedí que me mostraran casos con un número par de tríos.

Un grupo mostró los siguientes casos:





Las ilustraciones y explicaciones me parecieron buenas y suficientes y todos quedamos contentos por los trabajos realizados. Se percibía un ambiente emocional muy agradable.

Hice notar la importancia del pensamiento matemático en este proceso de aprendizaje y también que quedaba pendiente, en el marco de los conocimientos y las competencias matemáticas de los profesores, establecer un criterio general que permita, observando un número escrito con los símbolos de TER, MI y DERF, reconocer si tal número es par. Les manifesté que con las observaciones e ilustraciones hechas, ya se habían dado pasos importantes para establecer tal criterio.

Comentarios

- Esta experiencia continuó con el uso de TER, MI y DERF para la comparación de números naturales (orden lexicográfico), y para efectuar operaciones de adición, sustracción y multiplicación de estos números.

Más aún, los usamos para representar números racionales, empezando por representar números menores que MI, usando expresiones “con punto”, que algunos llamaron “expresiones tresimales”, por analogía a las expresiones decimales.
.

- Tanto en las clases presenciales como en la clase remota, los participantes destacaron la importancia de haber vivido estas experiencias de la representación numérica, por haberlos hecho pensar vivencialmente en las dificultades que pueden tener los niños ante experiencias similares y usando diez símbolos y no solo tres. Considero que este tipo de experiencias contribuye a fortalecer la **actitud empática** de los profesores para con sus estudiantes y, por ello, que es fundamental considerarlas en los programas de formación inicial y continua de los profesores.

- Fue difícil para los participantes “desprenderse” de los conocimientos que ya tienen sobre la representación numérica y las operaciones en el sistema decimal, pero fue una experiencia valiosa de jugar con reglas que se van construyendo comprensivamente y así ir descubriendo propiedades, entendiendo criterios y creando sus propios algoritmos, a diferencia de seguir mecánicamente indicaciones para obtener resultados.

- Como lo he tratado de evidenciar en este artículo, estas experiencias también permitieron expresar emociones positivas en el proceso de aprendizaje, tanto verbalizándolas, como manifestándolas gestualmente. Parte fundamental de los procesos de aprendizaje de las matemáticas, que provoca emociones positivas en los estudiantes, es explicitar aspectos muy importantes del pensamiento matemático – y en particular del pensamiento numérico – como son el descubrir regularidades (patrones), el hacer conjeturas, el fundamentar (justificar), y el resolver problemas creados por ellos mismos. Destaco una vez más, la importancia de prestar atención a los procesos de aprendizaje y la importancia de las competencias didáctico-matemáticas de los profesores para optimizar esos procesos.