UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 60. Diciembre 2020
Páginas 260-280

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Estudio sobre las praxeologías relacionadas con cálculo proposicional y cálculo de predicados en la formación de futuros profesores de matemática

Oscar Abel Cardona Hurtado, Ana Rosa Corica

Fecha de recepción: 18/10/2020
Fecha de aceptación:30/11/2020

Resumen	En este trabajo se reportan resultados parciales de una investigación que se ubica en la problemática de la formación de estudiantes de profesorado en lógica matemática. Como referencial teórico se adopta a la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El estudio se llevó a cabo en dos grupos en los que se orientó un mismo curso a estudiantes de un programa universitario en una institución colombiana; cada grupo fue dirigido por un docente distinto. Los principales resultados indican que los docentes formadores de estudiantes de profesorado se concentran en interpretar tareas y resolverlas mediante una única técnica, así como en formular preguntas que no resultan problemáticas. En el proceso de estudio los estudiantes mantienen una actitud neutral o comunican respuestas que se restringen a las preguntas planteadas por los docentes. **Palabras clave**: Formación, Profesor, Lógica, TAD
Abstract	This work reports partial results from a research that focuses on the problematic of student training for teacher in mathematical logic. As a theoretical reference, the Anthropological Theory of Didactics is adopted. The study was carried out in two groups in wich the same course was oriented to students at a university program in a Colombian institution; each group was led by a different teacher. The main results indicate that teachers in charge of training educators focus on interpreting tasks and solving them using a single technique, as well as asking questions that are not problematic. In the study process, students maintain a neutral attitude or communicate answers that are restricted to the questions posed by teachers. **Keywords**: Training, Teacher, Logic, ATD
Resumo	Neste trabalho são apresentados resultados parciais de uma pesquisa que se concentra na problemática da formação de futuros professores em lógica matemática. Como referencial teórico, adota-se a Teoria Antropológica do Didático. O estudo foi desenvolvido com dois grupos de licenciandos de uma instituição colombiana; cada grupo liderado por um professor diferente. Os principais resultados indicam que os docentes formadores de professores se concentram em interpretar tarefas e resolve-las mediante uma única técnica, assim como em formular perguntas que não resultam problemáticas. No processo de estudo os estudantes mantém uma atitude neutra ou comunicam respostas que se restringem às perguntas feitas pelos docentes. **Palavras - chave:** Formação, Professor, Lógica, TAD

1. Introducción

La lógica es aquella ciencia que estudia las formas de razonamiento, con el objetivo de proporcionar técnicas que permitan establecer si un argumento es válido o no (Castillo y Pinta, 2015). La lógica matemática en particular, como rama de la lógica, y más específicamente el cálculo proposicional (en adelante CP) y el cálculo de predicados (en adelante CDP), permiten entre otras cosas representar razonamientos simbólicamente. "La estructuración no es la finalidad de la formalización, sino que a raíz de ella se puede avanzar en el análisis lógico y se puede validar o invalidar el razonamiento, con la aplicación de diversos métodos, ya sea la aplicación de tablas de verdad o bien el proceso de deducción"(Cárdenas, Reyes y Viteri, 2017, p. 111).

Los seres humanos comúnmente realizamos discernimientos con base en recursos no racionales como hábitos o corazonadas. A pesar de que existen técnicas útiles para inferir conclusiones a partir de verdades conocidas, nuestra ignorancia en estos campos nos obliga a recurrir a la autoridad para imponer nuestros puntos de vista (Copi y Cohen, 2013). Asimismo, Copi y Cohen (2013) aseguran que "sea cual sea la perspectiva desde la que se busca el conocimiento, en la ciencia, en la política o en la manera de conducir nuestra vida privada, empleamos lógica para llegar a razones justificables" (p. XV). En tal sentido, el estudio de la lógica matemática goza de una valiosa particularidad, debido a que posibilita a los individuos, sin importar su rol en la sociedad, establecer si una proposición o un argumento es o no valido; y de esa manera brinda herramientas para tomar decisiones acertadas en una sociedad como la actual, en la que medios como los tecnológicos, nos proporcionan a diario grandes cantidades de información que requiere ser tratada adecuadamente.

La lógica también cobra vital importancia en las demostraciones matemáticas. En particular, Hamanaka, y Otaki (2020) destacan que la demostración matemática continúa siendo difícil de aprender para la mayoría de los estudiantes. Japón no es la excepción, en este país se inicia el estudio de este concepto en secundaria, y los estudiantes tienen grandes problemas para entenderlo. Estos autores también destacan que los escolares no reconocen la *razón de ser* de nociones relativas al CP y al CDP como, condición necesaria, condición suficiente, reducción al absurdo y contraposición, que son cimientos de la demostración matemática. De igual forma, García-Martínez y Parraguez (2018) resaltan la relevancia de la implicación con cuantificadores en el razonamiento deductivo, y refieren dificultades de estudiantes universitarios en la comprensión de esta noción.

Asimismo, el CP y el CDP, que tratan sobre relaciones entre proposiciones, conectivos y cuantificadores, juegan un papel fundamental en otras ciencias como pueden ser las ciencias computacionales. Según Serna (2013), dada la importancia de estas nociones en el desarrollo de algoritmos que los especialistas en ciencias informáticas desarrollan para solucionar problemas de índole científico o académico, las instituciones de educación deben incluir en sus currículos el estudio del CP y el CDP. La ciencia de la computación es una disciplina que sustenta el desarrollo de muchas otras; sus aportes van desde sus fundamentos teóricos y algorítmicos hasta desarrollos en robótica, visión artificial, sistemas inteligentes y bioinformática entre otros ámbitos (Gasca y Machuca, 2018).

El cálculo CP y el CDP se estudian en Colombia en los niveles secundario y universitario. En el primero se abordan nociones introductorias de CP, mientras que en el segundo se estudia CP con mayor profundidad, y se abordan nociones básicas de CDP. En carreras universitarias, es habitual encontrar temas vinculados a CP y a CDP en los contenidos de algunas asignaturas, no solamente en programas de matemáticas sino también en campos como ingenierías, ciencias económicas, ciencias jurídicas y formación de profesores, entre otros. A pesar de la importancia de la lógica matemática en la formación de profesionales, son muy pocas las investigaciones dedicadas a su enseñanza y aprendizaje. En particular, algunos investigadores se han ocupado de estudiar el empleo de herramientas informáticas que sirvan de apoyo a los docentes en la enseñanza de la lógica matemática (Huertas, Mor y Guerrero, 2010).

El presente trabajo se ubica en la problemática de la formación de profesores en matemática; en este caso específico, de la formación en lógica matemática. En la actualidad, la formación de docentes en matemática es una problemática que ha despertado el interés de diversos investigadores (Artaud, Cirade, Jullien, 2011; Azcárate, 2004; Corica y Otero, 2016; Sierra, Bosch y Gascón, 2012; Shulman, 2006). No obstante, no se han encontrado investigaciones enfocadas a la formación de profesores en CP y en CDP. La investigación en desarrollo tiene el propósito central de tomar conocimiento de las prácticas de profesores universitarios que orientan temas vinculados al estudio de CP y CDP a estudiantes para profesor de matemática en una universidad colombiana. A partir de este estudio, se procura proponer praxeologías superadoras para la enseñanza de la lógica matemática.

2. Marco teórico

En esta investigación se adopta como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) propuesta por Yves Chevallard (1999). Este referente teórico es considerado como una herramienta potente para describir la actividad docente (Corica y Otero, 2012), dado que es un enfoque que considera como objeto de estudio e investigación didáctica todo el proceso que va desde la creación y la utilización del saber matemático hasta su *transposición* a las instituciones docentes. La TAD ubica la actividad matemática dentro de las actividades humanas y las instituciones sociales.

La noción de *praxeología u organización matemática* es el constructo teórico fundamental. Las praxeologías surgen como respuestas a un conjunto de cuestiones y constan de dos componentes inseparables: el nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, se conforma de un conjunto de *tareas* que se materializan en diferentes tipos de problemas, y de un conjunto de *técnicas* que se utilizan para llevar a cabo las *tareas* planteadas; y el nivel del *logos* o del *saber* en el que se sitúan, en un primer nivel, el discurso que describe, explica y justifica la *técnica*, denominada *tecnología*; y en un segundo nivel, la fundamentación de la *tecnología*, denominada *teoría* y que asume respecto a la *tecnología* el mismo papel descriptivo y justificativo que el de la *tecnología* respecto de la *técnica.*

Las tareas, técnicas tecnologías y teorías son las componentes fundamentales de las praxeologías; no obstante, Chevallard (1999), propuso la noción de *género de tareas;* un *género de tareas* no existe más que bajo la forma de diferentes *tipos de tareas*, caracterizadas por contar con un contenido estrechamente especificado. El concepto *tipos de tareas*, alude a un objeto relativamente preciso. A manera de ejemplo, *calcular* es un *género de tareas* que a medida que avanza un proceso escolar determinado, se va enriqueciendo con nuevos *tipos de tareas*. Un *tipo de tarea*s inicial para un estudiante de secundaria podría ser, *calcular la suma de números racionales*; dos tipos de tareas posteriores, podrían ser *calcular la suma de números reales* y *calcular la derivada de una función polinómica* (Corica y Otero, 2009).

El desarrollo y análisis de la actividad matemática presenta dos aspectos inseparables: las Organizaciones Matemáticas (en adelante OM) y las Organizaciones Didácticas (en adelante OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática a estudiar, y son construidas por la comunidad matemática. Las segundas, se refieren a la manera en que esto ocurre; tratan del proceso de estudio y construcción del conocimiento desde un punto de vista didáctico. Estos dos aspectos son inseparables, debido a que toda OM es generada por un estudio y a la vez, todo proceso de estudio, se realiza a partir de una OM en construcción. Una OD se sitúa en un espacio determinado por seis momentos de estudio. El *primer momento*, corresponde al primer encuentro con la organización. El *segundo momento*, es el de la exploración del tipo de tareas y la elaboración de una técnica acorde al tipo de tareas. El *tercer momento*, se refiere a la construcción del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica. El *cuarto momento* corresponde al trabajo de la técnica. El *quinto momento* alude a la institucionalización, cuya finalidad es precisar los elementos que componen de manera definitiva la OM. El *sexto momento* corresponde a la evaluación, relacionado estrechamente con el momento de la institucionalización, refiere a evaluar la calidad de los componentes de la OM construida (Chevallard, 1999).

Asimismo, Chevallard (1999) introdujo cuatro tipos de praxeologías según el grado de complejidad de sus componentes, resultando útil para analizar los procesos didácticos institucionales. A continuación se describen los tipos de praxeologías. Las *Organizaciones Puntuales* (OMP): se generan en la institución por lo que se considera como un único *tipo de tarea* y se define a partir del bloque práctico-técnico. Las *Organizaciones Locales* (OML): es el resultado de integrar diversas praxeologías *puntuales*. Las *Organizaciones Regionales* (OMR): se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas praxeologías *locales* a una teoría matemática en común. Finalmente, las *Organizaciones Globales* (OMG): surgen al agregar varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

En particular, Fonseca (2004) establece las características de una OML para que sea considerada relativamente completa, siendo que los sistemas de enseñanza deberían, al menos procurar la reconstrucción de una OML. En el proceso de estudio de una OML relativamente completa se distinguen dos partes: una relativa al proceso de construcción o reconstrucción de la propia OM determinada por los momentos didácticos (Chevallard, 1999), y otra, relativa al propio producto resultante. En particular, en lo que respecta al estudio del producto del proceso de construcción, se lo realiza en relación con indicadores matemáticos (Fonseca, 2004; Lucas, 2010). A continuación se sintetizan los *indicadores*, siendo los siete primeros formulados por Fonseca (2004) y el octavo por Lucas (2010): *OML1*. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico; *OML2*. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas; *OML3*. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las Técnicas; *OML4*. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"; *OML5*. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas; *OML6.* Existencia de tareas matemáticas "abiertas"; *OML7.* Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica; *OML8.* La posibilidad de *perturbar* la situación inicial o modificar la hipótesis del sistema para estudiar casos diferentes permite ampliar y completar el proceso de estudio.

3. Metodología

El estudio que se propone es cualitativo, de corte descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). La propuesta está dirigida a comprender las prácticas de profesores universitarios que orientan temas relativos al estudio de CP y CDP a jóvenes en formación para profesor de matemática en una universidad colombiana. El estudio se llevó a cabo en dos grupos diferentes de estudiantes que realizaron un mismo curso en el mismo programa universitario de una universidad. Los dos grupos son dirigidos por diferentes docentes, en uno de ellos se encontraban matriculados 20 estudiantes y en el otro 22 (la edad de los estudiantes oscilaba entre los 17 y 18 años). El curso tuvo una duración de 4 meses; semanalmente se realizaron dos sesiones de clase, cada una de 120 minutos. El diseño curricular de la asignatura se compone de seis unidades; la primera, y de interés para esta investigación, se denomina *nociones de lógica proposicional.* En esta unidad se abordan nociones relativas a CP y CDP.

En concordancia con el referencial teórico adoptado, la investigación se desarrolla en cuatro fases. La primera de ellas corresponde a la reconstrucción de un Modelo Praxeológico de Referencia (en lo sucesivo MPR) relativo a CP y a nociones básicas de CDP. Este modelo constituye una herramienta para analizar las organizaciones matemáticas descritas en las restantes fases de la investigación. Este instrumento lo construyó el investigador a partir de sus conocimientos, los datos recolectados durante la investigación, consultas realizadas a especialistas y revisión bibliográfica especializada. En la segunda fase de la investigación se propone reconstruir la Organización Matemática Propuesta a Enseñar (en adelante OMPE), que se elabora con base en el diseño curricular del curso y los materiales propuestos por los docentes para el desarrollo de las clases. Dado que no siempre lo propuesto a enseñar coincide con lo efectivamente enseñado, para analizar este aspecto, como tercera fase de la investigación, se propone la reconstrucción de la Organización

Matemática Efectivamente Enseñada (en adelante OMEE). Para esta reconstrucción se requiere información del proceso de estudio; por lo cual, se realizaron observaciones no participantes durante las tres primeras semanas de clases en cada uno de los dos grupos, tiempo a lo largo del cual se estudiaron nociones vinculadas a CP y CDP. Estas observaciones se realizaron durante 20 horas en total (10 horas por cada uno de los dos grupos), y permitieron recolectar la siguiente información: las versiones en audio de las clases, los registros realizados por los profesores en el pizarrón, los talleres y exámenes propuestos por los profesores y los apuntes de clase tomados por los estudiantes. En la cuarta fase, en función de los resultados obtenidos en las fases anteriores, se propone el diseño de un dispositivo didáctico para un estudio funcional de CP y CDP. Por la extensión de este trabajo, solo se presentan resultados vinculados a la primera, segunda y tercera fase de la investigación.

4. Modelo Praxeológico de Referencia

Se reconstruyó el MPR en torno al estudio de CP y nociones básicas de CDP. En el marco de la TAD este modelo se emplea como referente para analizar el saber matemático antes de su transformación para ser enseñado; también se utiliza para examinar el saber efectivamente enseñado, y para elaborar una propuesta que contribuya a un estudio funcional relacionado con nociones de CP y CDP. La descripción de este modelo se realiza mediante una red de cuestiones y respuestas que tienen estructura praxeológica, constituyendo una importante herramienta didáctica. García, Barquero, Florensa y Bosch (2019) afirman que la complejidad en la reconstrucción de un modelo de este tipo demanda del análisis y del cuestionamiento de varias fuentes de información, como, instituciones productoras del saber matemático e instituciones encargadas de la enseñanza de la matemática. Asimismo, según Barquero, Bosch y Gascón (2013) un MPR por sus características particulares, se constituye en un instrumento de emancipación de la didáctica, debido a que permite cuestionar la manera como las instituciones en las cuales aparecen problemáticas matemáticas y/o didácticas, interpretan el saber matemático. Cabe destacar que el MPR debe ser considerado como una hipótesis provisional, lo cual implica que es susceptible de ser revisado y modificado constantemente (Fonseca, Gascón y Lucas, 2014; Quijano y Autor, 2017).

La cuestión generatriz que da origen al MPR es Q_0: *¿Cómo establecer la validez de un razonamiento*? El modelo está constituido por dos bloques: el estudio de las relaciones lógicas entre expresiones del CP y la ampliación del estudio del CP al CDP. Los dos bloques están asociados a dos preguntas Q_1 y Q_2, que se derivan de Q_0. La cuestión generatriz se considera un interrogante planteado en sentido fuerte, dado que debe ser estudiado en detalle, para lo cual se requiere abordar diversas OM compuestas por tareas, técnicas, definiciones, propiedades y teoremas que describen, explican y justifican el trabajo realizado; en la presente investigación se propone dar respuesta a esta pregunta desde dos ramas de la lógica matemática como son el CP y el CDP. En la *Figura 1* se indica un esquema que sintetiza el MPR, el cual se compone de las preguntas generadoras junto a sus respectivas organizaciones matemáticas y tareas asociadas; también se indican las relaciones entre las mismas.

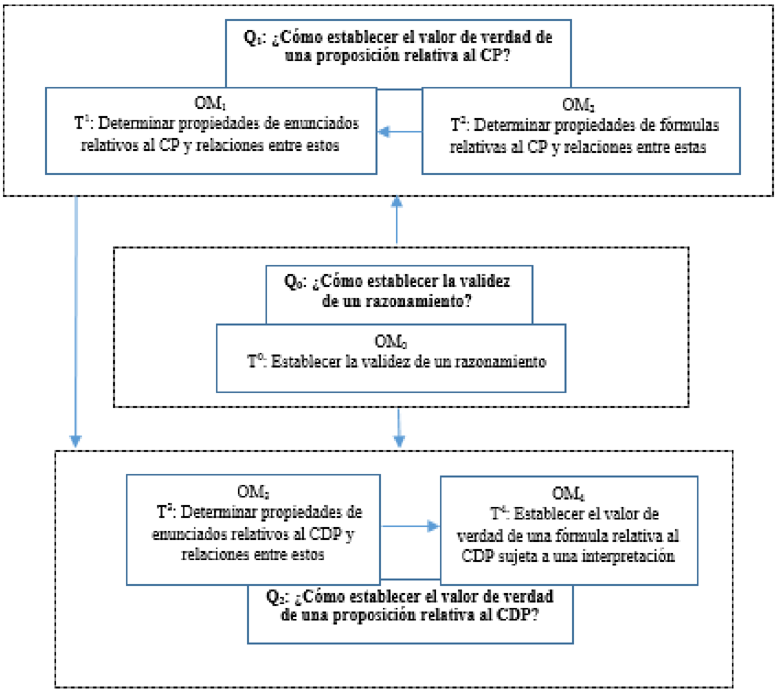

Figura 1. Esquema general MPR
Fuente: Elaboración propia

Con respecto a la *Figura 1*, el bloque que alude al CP se encuentra ubicado en la parte superior de la cuestión generatriz, y el relativo al CDP está ubicado en la parte inferior. Ambos están constituidos por organizaciones matemáticas, provenientes de las preguntas Q_1 y Q_2 que se desprenden de la cuestión Q_0.

Del estudio de Q_0 se deriva en la formulación de Q_1: *¿Cómo establecer el valor de verdad de una proposición relativa al CP?,* que conduce al estudio del tipo de tareas que componen las OM_1 y OM_2. El tipo de tareas que define a OM_1 es *T^1: Determinar propiedades de enunciados relativos al CP y relaciones entre estos.* En esta OM se comprende por enunciado, a una expresión del lenguaje cotidiano de la cual puede afirmarse que es verdadera o falsa pero no las dos. OM_2 se define por el tipo de tareas *T^2: Determinar propiedades de fórmulas relativas al CP y relaciones entre estas*. Son identificadas como fórmulas aquellas expresiones conformadas por: letras que representan variables proposicionales, símbolos que representan conectivos y, si es el caso, términos de agrupación útiles para evitar ambigüedades.

De *Q_0* también se deriva *Q_2: ¿Cómo establecer el valor de verdad de una proposición relativa al CDP? Q_2* conduce al estudio del tipo de tarea que compone a OM_3 Y OM_4. El tipo de tareas que define a OM_3 es *T^3: Determinar propiedades de enunciados relativos al CDP y relaciones entre estos;* OM_4 está representada por el tipo de tareas *T^4: Establecer el valor de verdad de una fórmula relativa al CDP sujeta a una interpretación.* Cada una de las cuatro organizaciones matemáticas que se generan a partir de OM_0 (OM_1, OM_2, OM_3 y OM_4), da lugar a una nueva red de praxeologías.

Los tipos de tareas que constituyen las organizaciones matemáticas que conforman el esquema general del MPR (ver *Figura 1*) están asociados a los géneros de tareas: *establecer* (OM_0 y OM_4) y *determinar* (OM_1, OM_2 y OM_3). El género *establecer* hace referencia a tareas en las cuales se requiere verificar o confirmar determinadas características de una proposición; el género de tareas *determinar* alude a aquellas en las cuales se hacen precisiones con base en información conocida. Las organizaciones matemáticas que componen el esquema que se indica en la *Figura 1*, dan origen a nuevas praxeologías que integran el MPR y que por su extensión no es posible describir en profundidad en este trabajo; estas nuevas organizaciones matemáticas se vinculan a tipos de tareas, y se relacionan con los géneros de tareas que se describen a continuación: las tareas correspondientes al género *representar* que hacen referencia a aquellas que demandan del uso de símbolos para presentar enunciados; las tareas correspondientes al género *conectar* refieren a unir proposiciones de forma que se formen otras más complejas; el género *construir* incluye tareas que demandan el uso organizado de herramientas y reglas para concebir un propósito; el género de tareas *demostrar* engloba las tareas que requieren probar de manera deductiva un argumento con el fin de asegurar la verdad de una proposición matemática; el género *negar* alude aseverar que una proposición no es cierta; las tareas alusivas al género *asociar* hacen mención a juntar dos componentes de un sistema con un objetivo determinado; el género *inferir* refiere a tareas orientadas a obtener una conclusión a partir de un conjunto de premisas; *precisar* es el género asociado a aquellas tareas relacionadas con describir de manera rigurosa; el género *caracterizar* se asocia a tareas en las cuales se determinan los atributos que distinguen un sistema; el género *intercambiar* hace referencia a tareas que posibilitan, con base en una proposición compuesta por uno de los dos cuantificadores, construir una equivalente, que incluye el otro cuantificador; por último, el género *designar* hace alusión a tareas que procuran destinar algo para un fin determinado.

5. La Organización Matemática Propuesta a Enseñar

La reconstrucción de la OMPE se encuentra relacionada con la etapa de la transposición didáctica (Chevallard, 1997), según la cual el saber erudito requiere ser transformado y adaptado acorde a las necesidades de cada institución educativa determinada. La OMPE en reconstrucción es producto del análisis del material utilizado por los dos docentes que enseñaron nociones de CP y CDP a estudiantes de una universidad colombiana que serán futuros profesores de matemática. Para describir la OMPE se utiliza la técnica de revisión de documentos (Hernández, Fernández, Baptista, 2014). Para el desarrollo de las clases los docentes emplearon un libro de texto.

Se analizó el libro de texto que lleva por título *Introducción a la lógica matemática,* reimpreso en 1975*,* cuyos autores son Patrick Suppes y Shirley Hill. Según Bravo y Cantoral (2012), los libros de texto se consideran parte de la OMPE, puesto que son producto de la transposición didáctica, y son modificados y adaptados para la enseñanza. El libro mencionado fue el material propuesto por los dos docentes que orientaron el curso en el cual enseñaron nociones de CP y CDP a estudiantes para profesor de matemática. Los dos docentes dirigieron el curso de manera autónoma y coincidieron en proponer el mismo libro de texto para desarrollar el curso. A lo largo de la investigación, los docentes se identifican como profesor A y profesor B con el fin de preservar sus identidades. Es importante destacar que en este estudio no se considera el diseño curricular (o microcurrículo) del curso, debido a que la información que se presenta allí, es tan sintética, que no permite una clara reconstrucción de la OMPE.

Con relación al estudio del libro de texto propuesto por los docentes, se analizaron los ejemplares de tarea resueltos, se examinaron los ejemplares de tarea propuestos para ser resueltos y se resolvieron algunos de ellos para poder identificar el entorno tecnológico-teórico requerido. Con la finalidad de estudiar los ejemplares de tarea propuestos para ser resueltos, estos se organizaron en una tabla de análisis de datos que se compone de las categorías que se indican en la *Tabla 1*. En la tabla se distinguen los *Géneros de tareas* junto a las *tareas* que los componen. También, en ella, se recoge el conjunto de acciones llevadas a cabo para resolver una cierta tarea (*Técnicas*), los elementos tecnológicos (*Bloque tecnológico- teórico*) utilizados, las tareas del libro de texto expuestos como ejemplares y los *indicadores matemáticos de completitud* propuestos por Fonseca (2004) y Lucas (2010), que permiten establecer el *grado de completitud* de una Organización Matemática Local.

Tarea No.	Género de tarea	Tipo de tareas	Ejemplar de tarea	Técnica	Bloque tecnológico-teórico	IMC

Tabla 1. Categorías para analizar tareas propuestas para ser resueltas
Fuente: Elaboración propia

Las categorías que componen la tabla se organizan en siete columnas. En la primera se indica de manera específica la tarea del libro de texto que se aborda; la expresión $I_{c,d}^{a,b}$ refiere al capítulo a, *ejercicio b, punto c* e *ítem d* que se estudia. En la segunda columna se describen *los géneros de tareas*. Los *tipos de tareas* son exhibidos en la tercera columna. En la cuarta columna se indican y resuelven ejemplares de tarea que son propuestos en el libro de texto sugerido por los docentes para ser resueltos por los estudiantes. En la quinta columna se describen las técnicas que fueron empleadas para solucionar las *tareas* de la columna anterior. Los *elementos tecnológicos (*discursos que describen, explican, justifican las *técnicas* y *tecnologías)* se describen en la sexta columna. En la séptima y última columna se señalan los *indicadores matemáticos de completitud de una OML* que se identifican en el estudio de la tarea respectiva.

En la *Tabla 2,* que se exhibe a continuación, se presenta un ejemplo que ilustra la manera como se empleó la tabla de análisis de datos conformada por las categorías indicadas en la *Tabla 1*.

Tarea No.	Género de tarea	Tipo de tareas	Ejemplar de tarea	Técnica	Bloque tecnológico-teórico	IMC
$I_{B,5}^{1,9}$	*I d e n t i f i c a r*	T_3: *Identificar el término de enlace dominante en una proposición*	*Cada una de las proposiciones siguientes es una disjunción. Poner los paréntesis adecuadamente para indicar que en este caso el termino de enlace dominante es "o"* 5. P $\vee$ Q & R **Solución:** Para que en este ítem, el término de enlace dominanate sea o, los paréntesis deben organizarse de la siguiente manera: *P $\vee$(Q & R)*	Examinar los términos de enlace que hacen parte de la proposición. Dado que el símbolo de la disyunción es o, se deben ubicar los paréntesis de manera tal que o sea el símbolo dominante en la proposición molecular.	*Proposición* (θ_1), *Proposición atómica* (θ_2), *Proposición molecular* (θ_3), *Término de enlace* (θ_4) y *Término de enlace dominante* (θ_6).	O M L 7

Tabla 2. Ejemplo de tarea propuesta para ser resuelta
Fuente: Elaboración propia

En la *Tabla 2* se aprecia el ejemplo correspondiente al capítulo 1, *Ejercicio 9*, *Punto B* e *ítem 5* propuesto en el libro de texto, el cual refiere al género de tarea *identificar*. Como se puede apreciar, la técnica empleada para resolver la tarea es simple, basta con agregar paréntesis de manera adecuada a la proposición dada, con el objetivo de que el término de enlace dominante sea la disyunción; asimismo, como se indica en la última columna, la tarea se asocia al indicador matemático de completitud número propuesto por Fonseca (2004), debido a que se integran cinco nociones que conforman el entorno tecnológico-teórico.

De otro lado, a partir de la confección de la *Tabla 1*, en la reconstrucción de la OMPE se identificaron tipos de tareas que corresponden a seis géneros de tareas: *identificar, representar, construir, negar, completar* y *relacionar.* En la *Figura 2*, se indica el número de tareas propuestas para ser resueltas según los diferentes *géneros.* El 46% de las tareas se asocian al género *representar (GP3),* el 41% refieren al género *identificar (GP1),* el 7% se asocian al género *construir* (GP2); además, las tareas *completar (GP5), relacionar (GP6) y negar (GP4), cada una se asocia al 2%.* Es decir, el 87% de las tareas del libro propuestas para ser resueltas corresponden a los géneros *representar (GP3)* o *identificar (GP1)*; el 13% restante se distribuye entre los otros cuatro géneros de tarea.

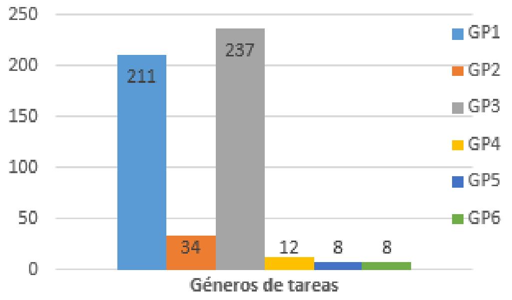

Figura 2. Géneros y cantidad de tareas propuestas para resolver
Fuente: Elaboración propia

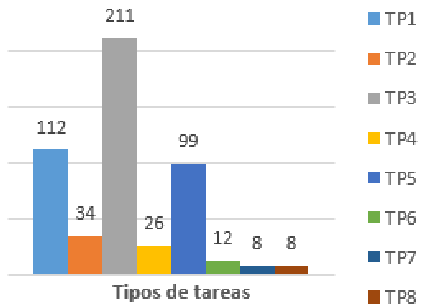

Figura 3. Tipos y cantidad de tareas propuestas para resolver
Fuente: Elaboración propia

Asimismo, en la *Figura 3* se puede apreciar el número de tareas propuestas para ser resueltas según los tipos de tarea identificados. El tipo de tareas más típico es *representar proposiciones simbólicamente (TP3)* con 211 tareas propuestas; en orden descendente, siguen los tipos de tareas *identificar las componentes de una proposición molecular (TP1)* e *identificar el término de enlace dominante en una proposición molecular (TP5)*, con 112 y 99 tareas propuestas respectivamente. En términos porcentuales, el 41% de los quehaceres se asocian al tipo de tareas *TP3*, el 22% se vinculan al tipo *TP1*, y el 19% se relacionan con el tipo de tareas *TP5*. Es decir, el 82% de las tareas propuestas para resolver se asocian a los tres tipos anteriores. En contraste, los cinco tipos de tareas restantes cuentan con una minoría de tareas propuestas para ser resueltas: 34 se asocian al tipo de tareas *construir proposiciones (TP2)*, 26 quehaceres se vinculan al tipo de tareas *representar proposiciones en lenguaje común (TP4)*, 12 tareas se relacionan con el tipo de tareas *negar proposiciones (TP6), y, para el caso de* los tipos de tareas *completar el espacio en blanco (TP7) y relacionar enunciados de dos columnas (TP8),* se proponen 8 tareas para cada uno. En otras palabras, solamente el 18% de los quehaceres propuestos para resolver se asocian a los tipos de tareas *TP2, TP4, TP6, TP7* y *TP8.*

En el MPR fueron propuestos 13 géneros de tareas: *establecer, determinar, representar, conectar, construir, demostrar, negar, asociar, inferir, precisar, caracterizar, intercambiar* y *designar*. En cambio, en la reconstrucción de la OMPE se han identificado 6 géneros de tareas. A continuación se presentan los géneros mencionados con sus respectivas definiciones: *identificar,* hace referencia a tareas que requieren distinguir los elementos que componen las proposiciones; *representar*, alude a la demanda del uso de símbolos para encarnar enunciados o recíprocamente; *construir,* incluye tareas que exigen el uso organizado de herramientas y reglas para concebir un propósito; *negar,* alude a tareas relativas a modificar el valor de verdad de una proposición; *completar,* refiere a tareas que implican añadir componentes que le faltan a una proposición; y el género *relacionar,* engloba tareas que demandan establecer una relación entre dos proposiciones. Sin embargo, de los 6 géneros antes citados solamente 3 de ellos se consideran en el MPR (*representar, construir y negar*); es decir, en la OMPE se identificaron tipos de tareas que se corresponden con 3 de los 13 géneros de tareas propuestos en el MPR. En contraste, los géneros *completar*, *relacionar* e *identificar,* no forman parte del MPR.

Es importante aclarar las razones por las cuales los tres últimos géneros de tareas no fueron incorporados al MPR. En cada tarea asociada al género *completar*, como se muestra en el ejemplar exhibido en la *Figura 4*, se presentan las definiciones de algunas nociones, pero incompletas, debido a que cuentan con un espacio en blanco; seguidamente, se proporciona un listado de palabras, y se demanda seleccionar del listado la palabra que al ser ubicada en cada espacio en blanco concluye las definiciones. Para el caso de las tareas asociadas al género *relacionar,* como se observa en el ejemplar indicado en la *Figura 5*, se presentan dos columnas; la del lado izquierdo se compone de nociones, la del lado derecho está conformada por proposiciones, la mayoría de estas representadas simbólicamente. Para resolver la tarea, se solicita vincular cada palabra de la columna izquierda con una proposición de la columna de la derecha. Las tareas correspondientes a los dos géneros anteriormente mencionados no se incluyen en el MPR debido a que se consideran quehaceres de tipo memorístico, que no aportan a la construcción de conocimiento; no contribuyen en la solución de problemas que aquejan a las personas (Chevallard, 2017).

Completar las proposiciones siguientes eligiendo de entre las palabras escritas al final la que está definida por la proposición dada.

a. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «y» es una ....
b. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «no» es una ....
c. La combinación de una o más proposiciones atómicas con un término de enlace de proposiciones se denomina ....
d. En Lógica, una proposición completa que no tiene término de enlace se denomina ....
e. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «si... entonces...» se denomina una ....
f. La proposición situada antes del término de enlace en una proposición condicional se denomina ....
g. La proposición situada después del término de enlace en una proposición condicional se denomina ....
h. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «o» es una ....

antecedente	conjunción
atómica	consecuente
proposición molecular	disjunción
condicional	negación

Figura 4. Ejemplar asociado al género completar
Fuente: Elaboración propia

G. Aparear cada una de las palabras de la izquierda con los ejemplos o definiciones en la lista de la derecha.

1. disjunción	(a) $P \rightarrow Q$
2. negación	(b) $\neg(P \,\&\, Q)$
3. proposición condicional	(c) $P \vee Q$
4. proposición molecular	(d) Q en la proposición $P \rightarrow Q$
5. antecedente	(e) $\neg P$
6. consecuente	(f) P en la proposición $P \rightarrow Q$
7. conjunción	(g) $P \,\&\, Q$
8. proposición atómica	(h) $\neg P \vee \neg Q$
	(i) Cualquier proposición con un término de enlace
	(j) Cualquier proposición sin términos de enlace.

Figura 5. Ejemplar asociado al género relacionar
Fuente: Elaboración propia

Por su parte, las tareas asociadas al género *identificar* no se incorporan en el MPR, porque se considera innecesario, debido a que este instrumento incluye el género *construir*, y al construir proposiciones, necesariamente se están identificando las componentes de estas; además, el género *construir* posibilita la formulación de tareas funcionales para la solución de problemas.

6. La Organización Matemática Efectivamente Enseñada

La reconstrucción de la OMEE requirió del análisis de las clases de los dos grupos, en las que se abordaron nociones relativas a CP y CDP. En particular, se transcribieron todos los audios de cada clase y se los segmentó en episodios. Estos se distinguen como diferentes cuando el discurso gira en torno a una tarea particular. Con el objetivo de organizar y estudiar los datos obtenidos de cada clase se elaboraron dos tablas. La primera tabla de análisis de datos asociada a la OMEE permite realizar un análisis en profundidad del proceso de estudio, tal como lo vivieron sus protagonistas. La segunda tabla de análisis de datos asociada a la OMEE es un material con el que se pretende realizar un análisis global del proceso de estudio. En la *Tabla 3* se indican las categorías que componen la primera tabla mencionada.

Episodio	Género de tareas	Tipo de tareas	Ejemplar de tarea	Técnicas	Bloque tecnológico -teórico	IMC

Tabla 3. Categorías primera tabla de análisis de datos OMEE
Fuente: Elaboración propia

La descripción de las categorías que componen la *Tabla 3* coincide con la de la *Tabla 1*, excepto la primera columna, que en este caso alude al episodio abordado en la clase.

A continuación, se presenta la *Tabla 4*, en la cual se expone un ejemplo que pone de presente la manera como se construyó la primera tabla de análisis de datos asociada a la OMEE, cuyas categorías se describen en la *Tabla 3*.

Episodio	Género de tareas	Tipo de tareas	Ejemplar de tarea	Técnicas	Bloque tecnológico-teórico	IMC
9	Construir	$T_1^{9,3}$: Construir proposiciones moleculares	$T_{1,1}^{9,3}$: Construir una proposición molecular utilizando la implicación y las dos proposiciones atómicas siguientes: Proposición 1: llueve. Proposición 2: se suspende el juego.	Identificar las proposiciones atómicas. Luego, relacionar las dos proposiciones atómicas mediante la palabra *entonces* que representa la implicación, formando así la proposición molecular.	*Proposición atómica* (θ_2), *Proposición molecular* (θ_3), *Conectivo* (θ_4) *e Implicación* (θ_8)	OML7

Tabla 4. Ejemplo primera tabla de análisis de datos OMEE
Fuente: Elaboración propia

Como se puede apreciar, las tres primeras columnas de la *Tabla 4* muestran el ejemplo corresponde al episodio 9, se asocia al género de tareas *construir*, y al tipo de tareas *construir proposiciones moleculares*. Se destaca que en el enunciado de la tarea, expuesto en la cuarta columna, se indica la manera de resolverla. Asimismo, en la quinta columna se indica una técnica muy simple para solucionar la tarea, que consiste en identificar las proposiciones atómicas y relacionarlas mediante el término de enlace *entonces*. En la séptima y última columna se muestra que la tarea se vincula al séptimo indicador matemático de completitud formulado por Fonseca (2004), puesto que se integran cuatro nociones relativas al entorno tecnológico-teórico, las cuales se exhiben en la sexta columna.

Con relación a los resultados obtenidos al confeccionar la primera tabla de análisis de datos asociada a la OMEE, de la que se presentó un ejemplo en la *Tabla 4,* se tiene que las tareas formuladas por los dos docentes se asocian a los géneros *establecer, representar, construir, negar, inferir, demostrar e intercambiar.* Particularmente, la *Figura 6* permite apreciar los *géneros* de tareas, y número de ejemplares resueltos por cada profesor. Se puede advertir que los géneros *establecer (G1)*, *representar (G2), construir (G3)* y *negar (G4)* fueron abordados por los dos docentes. En contraste, tareas correspondientes a los *géneros demostrar (G6)* e *intercambiar (G7)* solamente fueron considerados por el profesor B, y tareas vinculadas al *género inferir (G5)* solo las propuso estudiar el profesor A. Asimismo, al analizar la cantidad de tareas según el *género de tarea*, se destaca que *establecer* ocupó el primer lugar para los dos profesores.

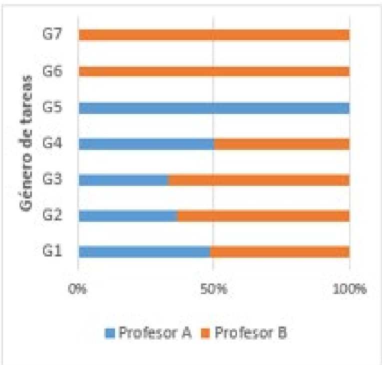

Figura 6. Tareas resueltas por género y por profesor
Fuente: Elaboración propia

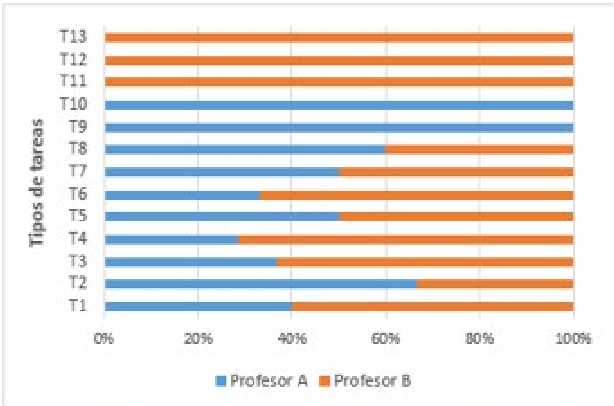

***Figura 7.* Tareas resueltas por tipo y por profesor**
Fuente: Elaboración propia

La *Figura 7* muestra los tipos de tareas resueltas por cada docente. Se observa que los ejemplares de tarea resueltos por los dos profesores corresponden a los siguientes tipos de tareas: *establecer si un enunciado es una proposición (T1), establecer si una proposición es atómica o molecular (T2), representar proposiciones simbólicamente (T3), construir proposiciones moleculares (T4), negar proposiciones (T5), establecer el valor de verdad de una proposición (T6), construir la tabla de verdad relativa a una fórmula (T7), establecer si una fórmula corresponde a una tautología (T8).* En cambio*, establecer la validez de un argumento (T9) e inferir la conclusión de una serie de premisas (T10)* solamente los consideró el profesor A. De igual forma, los tipos de tareas*, establecer el nivel jerárquico de los conectivos que componen una fórmula (T11), demostrar que dos fórmulas son equivalentes (T12) e intercambiar los cuantificadores obteniendo una proposición equivalente (T13),* fueron expuestos solo por el profesor B.

Con respecto a la segunda tabla de análisis de datos asociada a la OMEE, con esta se pretendió realizar un análisis global del proceso de estudio, vinculado con el *lugar* del alumno y el profesor. En la *Tabla 5* se indican las categorías que la componen.

Episodio	Noción matemática	Género de tareas	Momento didáctico		Gestos del profesor			Gestos del alumno	
			MDP	MDS	GI		GP	GA	GP
					ISD	ISF			

Tabla 5. Categorías segunda tabla de análisis de datos OMEE
Fuente*:* Corica y Otero (2011)

Sobre la *Tabla 5*, la primera columna, *Episodio* junto a la segunda, *Noción matemática*, y tercera *Género de tareas*, permiten realizar una primera descomposición general del proceso de estudio. En la columna *Noción matemática*, se busca identificar aquellos objetos matemáticos que aparecieron de manera explícita para ser estudiados, tanto en el discurso oral del profesor como de los estudiantes. La cuarta columna, *Momento didáctico,* indica el *momento predominante* del estudio (MDP) dentro de cada episodio, así como los *momentos secundarios* (MDS). En la quinta columna se registran los *Gestos del profesor*, que pueden ser, *gestos de invitación* (GI) o *gestos de posicionamiento* (GP); los *GI* hacen referencia a estimular a los estudiantes mediante preguntas con el objetivo de que se involucren en el proceso de estudio; el docente puede realizar dos tipos de pregunta: *Invitación en sentido débil* (ISD) o *Invitación en sentido fuerte* (ISF). Los (GP) están relacionados con producir o indicar mediante la escritura, comentarios o preguntas elementos que sirven de *camino* para situarse en las maneras de razonar y de hacer que existen en la institución en cuestión. Se identifican dos gestos de posicionamiento; uno de ellos es *Resolver tareas* (RT), que se presenta cuando la actividad del profesor se concentra en interpretar las tareas y proponer explícitamente las técnicas para abordarlas. El otro se denomina *Orientación de funciones del estudiante (OE), que* refiere a las acciones del profesor dirigidas a dar indicios a los estudiantes las técnicas a emplear para la resolución de las tareas propuestas sin explicitar por completo la manera de hacer la tarea.

En la sexta columna se recogen los *Gestos del estudiante,* que pueden ser: g*estos de aceptación* (GA) relacionados con el número de respuesta de los estudiantes a los gestos de invitación de los profesores; o g*estos de posicionamiento* (GP), que tienen que ver con indicar mediante comentarios, respuestas o formular preguntas portadoras de elementos que sirven de camino para situarse en las maneras de razonar y de hacer que existen en la institución en cuestión. Se identifican tres gestos de posicionamiento, el primero es *Recepción (R)*: se caracteriza por una actitud neutral de los estudiantes, en el proceso de estudio, mientras el profesor explica, permanecen en silencio y parecen estar adquiriendo la información; el segundo se denomina *Interpretación (I):* seguimiento de técnicas (conceptos y proposiciones) y de elementos lingüísticos en cada situación, esto implica, por parte de los estudiantes, la comunicación de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo; el tercer gesto de posicionamiento es denominado *Demanda de información* (DI): ocurre cuando los estudiantes solicitan información al profesor o a otros compañeros, se pone de presente, por ejemplo, cuando los educandos no entienden el significado del lenguaje utilizado o no recuerdan conocimientos requeridos.

La *Tabla 5,* exhibida antes, muestra las categorías que componen la segunda tabla de análisis de datos asociada a la OMEE, con la que se busca realizar un análisis global del proceso de estudio. En la *Tabla 6,* que se presenta a continuación, se expone un ejemplo extraído de la tabla, cuyas categorías se describen en la *Tabla 5;* con lo cual se indica la manera como se construyó la segunda tabla de análisis de datos asociada a la OMEE.

<table>
<tr><th rowspan="3">Episodio</th><th rowspan="3">Noción matemática</th><th rowspan="3">Género de tareas</th><th colspan="2">Momento didáctico</th><th colspan="3">Gestos del profesor</th><th colspan="2">Gestos del alumno</th></tr>
<tr><th rowspan="2">MDP</th><th rowspan="2">MDS</th><th colspan="2">GI</th><th rowspan="2">GP</th><th rowspan="2">GA</th><th rowspan="2">GP</th></tr>
<tr><th>ISD</th><th>ISF</th></tr>
<tr><td>2</td><td>Proposición atómica</td><td>Establecer</td><td>ETET</td><td>PE I</td><td>8</td><td>0</td><td>RT</td><td>14</td><td>R</td></tr>
</table>

Tabla 6. Ejemplo segunda tabla de análisis de datos OMEE
Fuente: Elaboración propia

En la *Tabla 6* se expone el episodio 2 que compone la segunda tabla de análisis de datos asociada a la OMEE relativa al profesor A. Como se puede apreciar, este episodio se vincula a la noción, *proposición atómica*, y al género de tareas *establecer*. Asimismo, se muestra, entre otras cosas, que el momento didáctico principal refiere a ETET (*exploración del tipo de tareas y de la elaboración de una técnica*). Durante este episodio el docente realizó 8 gestos de invitación en sentido débil y 0 en sentido fuerte a los estudiantes; el gesto de posicionamiento en la actividad docente correspondió a RT (*resolver tareas*). Por su parte, los estudiantes reaccionaron con 14 respuestas a las invitaciones del docente; y el gesto de posicionamiento desde el rol de estos, aludió a R (*recepción*).

Asimismo, la confección de la segunda tabla de análisis de datos asociada a la OMEE, permitió conocer incidencias relacionadas con los momentos didácticos y los gestos de posicionamiento tanto de los docentes como de los estudiantes en el proceso de estudio. En la *Figura 8* se pone en evidencia que durante el estudio, el momento didáctico predominante en la actividad del profesor A fue el relacionado con la *exploración del tipo de tareas y de la elaboración de una técnica* (*ETET*). Por el contrario, para el caso del profesor B, el momento didáctico predominante correspondió al *primer encuentro con la organización matemática estudiada* (*PE*). El momento de la *constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica* (*CETT*) no ocurrió en las prácticas del profesor B, y en las del profesor A tuvo una ocurrencia muy reducida.

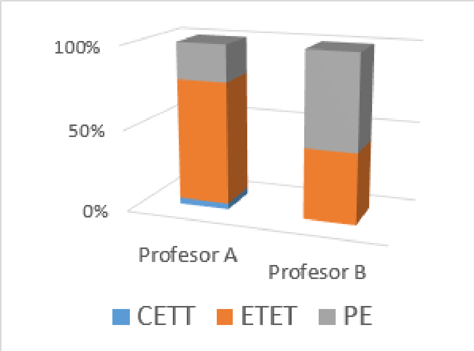

Figura 8. Momento didáctico principal
Fuente: Elaboración propia

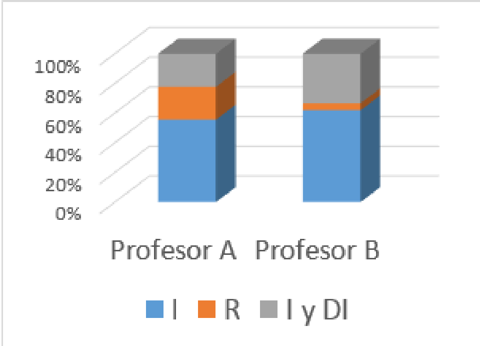

Figura 9. Gestos posicionamiento estudiantes
Fuente: Elaboración propia

La *Figura 9* revela acerca del lugar de los estudiantes durante el proceso de estudio*;* según esta, el *gesto de posicionamiento predominante* de los jóvenes con los dos docentes fue *Interpretación;* gesto que implica, por parte de los estudiantes, la comunicación de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo. Asimismo, la *Figura 10,* que se exhibe a continuación, indica acerca del rol de los docentes a lo largo del proceso.

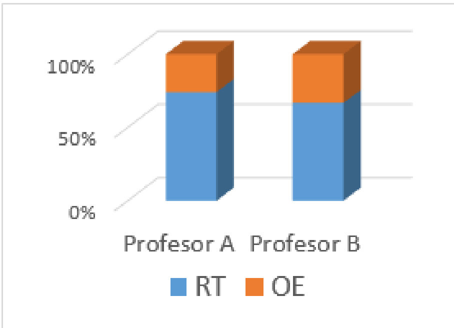

Figura 10. Gestos posicionamiento docentes
Fuente: Elaboración propia

Según la *Figura 10*, en las prácticas de los dos docentes prevaleció el *gesto de posicionamiento Resolver Tareas (RT);* lo cual comporta que la actividad de los profesores se centró en interpretar las tareas y proponer explícitamente las técnicas para abordarlas. Por su parte, el gesto *Orientación de funciones del estudiante (OE)* tuvo un menor suceso.

Con respecto a los géneros de tareas estudiados en las diferentes fases de la investigación, se tiene que, en el MPR se proponen 13 géneros de tareas: *establecer, determinar, representar, conectar, construir, demostrar, negar, asociar, inferir, precisar, caracterizar, intercambiar* y *designar*; en la OMPE se identifican 6 géneros de tareas: *identificar, representar, construir, negar, completar y relacionar*; y en la OMEE se han identificado el estudio de tareas correspondientes a 7 géneros: *establecer, representar, construir, negar, inferir, demostrar e intercambiar*. Como se indicó antes, en la OMPE solamente se identificaron tareas correspondientes a 6 géneros de tareas, y de estos, solo 3 géneros de tareas corresponden a los definidos en el MPR. De igual forma, al comparar el MPR con la OMEE, se evidencia que todos los géneros que componen la OMEE, también forman parte del MPR. Asimismo, al cotejar la OMPE con la OMEE, se evidencia que de los 6 géneros de tareas identificados en la OMPE, solamente 3 se identificaron en la OMEE; los géneros *identificar, completar* y *relacionar* solo integran tareas que corresponden a la OMPE.

También, se destaca que solamente tareas correspondientes a 3 géneros de tareas han sido consideradas en las tres etapas de la investigación: *representar, construir y negar*. Estos tres géneros son fundamentales en el estudio del CP y el CDP. La representación de enunciados permite entre otras cosas, establecer con mayor facilidad el valor de verdad de proposiciones y la validez de argumentos; la construcción de proposiciones posibilita formular problemas de la vida cotidiana mediante proposiciones, y buscar soluciones con base en el CP y el CDP; y negar proposiciones, es útil a la hora de establecer el valor de verdad de proposiciones o la validez de argumentos. Por último, se resalta que 6 géneros de tareas propuestos en el MPR no se consideran en la OMPE ni en la OMEE, son ellos: *precisar, caracterizar, determinar, conectar, asociar y designar.* Los dos primeros géneros de tareas reúnen tareas que son útiles para el estudio del CP mediante notaciones alternativas; el género de tarea *determinar*, resulta relevante si se desea examinar propiedades asociadas a los enunciados y a las fórmulas del CP y el CDP; y los tres últimos géneros (*conectar, asociar y designar*) reúnen tareas que son fundamentales para estudiar CDP, puesto que permiten construir los átomos y las fórmulas que son cimientos de este ámbito de la lógica matemática.

7. Conclusiones

En este trabajo se presentan resultados de una investigación en desarrollo, de carácter cualitativo, relacionada con la línea de investigación formación de profesores. Se busca hacer un aporte en el nivel de educación superior, tomando conocimiento de las prácticas docentes de profesores universitarios que orientan temas referentes a lógica matemática a estudiantes para profesor de matemática, y proponer praxeologías superadoras para la enseñanza de este ámbito.

Se reconstruyó un MPR relativo al estudio de CP y CDP, cuyo objetivo es reconstruir las praxeologías que se proponen para ser difundidas en una institución, a partir de la búsqueda de respuestas a la pregunta generatriz y a otras que se derivan de esta. Gascón (2014), asegura que es necesario reconstruir modelos epistemológicos específicos que se puedan emplear como sistemas de referencia útiles para analizar los modelos dominantes en las instituciones. El MPR se constituye en un modelo alternativo que posibilita analizar y cuestionar paradigmas relacionados con maneras de entender un saber matemático particular.

A partir del estudio realizado, se infiere que las praxeologías propuestas a enseñar por los docentes presentan un *bajo grado de completitud,* según los indicadores propuestos por Fonseca (2004) y Lucas (2010). La mayoría de organizaciones matemáticas se asocian al indicador *OML7*, lo cual comporta que en la mayor parte de las tareas se integran nociones del entorno tecnológico-teórico; además, algunos de los quehaceres se vinculan a los indicadores *OML1* y *OML4*; no se han encontrado tareas asociadas a los indicadores *OML2, OML3, OML5* y *OML6* y *OML8*, es decir, de los ocho indicadores matemáticos de completitud formulados, no se han encontrado tares asociadas a cinco de ellos. Asimismo, se puede observar una desfragmentación del saber en teórico y práctico, bajo una concepción aplicacionista, primero se presenta el saber teórico y luego se proponen tareas para poder *observar* su funcionamiento. No hay instancias en las que del hacer de las tareas se estudie las limitaciones de las técnicas y de lugar a la elaboración de nuevos entornos tecnológicos-teóricos, por ejemplo. De igual forma, en las tareas solo hay que aplicar las mismas técnicas que se proponen en los ejemplares, solo permiten reutilizar técnicas pero no cuestionarlas y modificarlas.

Con respecto a las organizaciones matemáticas efectivamente enseñadas, se destaca que la actividad de los docentes se centró en interpretar las tareas y sugerir la manera de resolverlas mediante una única técnica. Por su parte los estudiantes durante las clases respondían a preguntas que realizaban los docentes; estas preguntas las respondían de forma inmediata, debido a que no resultaban problemáticas para ellos. Nuestra investigación continúa en el desarrollo de un dispositivo didáctico para el estudio de CP y CDP que permita superar las dificultades detectadas, y favorecer un estudio funcional de la matemática en la formación de profesores de matemática.

Referencias

Artaud, M.; Cirade, G.; Jullien, M. (2011). Intégration des PER dans l´equipement praxéologique du professeur. Le cas de la formation initiale. En: BOSCH, M. et al. (Eds.). *Un panorama de la TAD (769-794).* Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos. En E. Castro & E. de la Torre (Coord.), *Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 43-60). La Coruña: Universidad de La Coruña.

Barquero, B.; Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educ. Matem. Pesq., Sao Paulo*. 15(1), 1-28. Recuperado el 15 de noviembre de 2019, de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12757

Bravo, S. y Cantoral, R. (2012). Los libros de texto de cálculo y el fenómeno de la transposición didáctica. *Educación matemática*, 4(1), 5-36. Recuperado el 10 de Julio de 2020, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262012000200005

Cárdenas, W.; Reyes, D. y Viteri, F. (2017). The logical formalization of language as a starting point for speech objective analysis and scientific argumentation. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, (22), 103-125.

Castillo, E.; Pinta, M. (2015). *Lógica matemática I*. Ecuador : Ediciones UTMACH.

Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique, Buenos Aires. Recuperado el 14 de marzo de 2018, de https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantesen théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME, Real Sociedad Matemática Española*, 20 (1), 159–169.

Copi, I.; Cohen, C. (2013). *Introducción a la lógica*. México : Limusa

Corica, A. y Otero, M (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y a la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 12, núm. 3, pp. 305-331.

Corica, A. y Otero, M. (2011). Análisis de la dinámica de estudio en un curso universitario de matemática. En Bosch, M. et al. *Un panorama de la TAD*. Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Corica, A. y Otero, M. (2012). Estudio sobre las praxeologías que se proponen estudiar en un curso universitario de cálculo. *BOLEMA*, 26(42B), 459-482. Recuperado el 3 de mayo de 2018, de https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2012000200004&script=sci_abstract&tlng=es

Corica, A. y Otero, M. (2016). Diseño e implementación de un curso para la formación de profesores en matemática: una propuesta desde la TAD. *BOLEMA*, 30(55), 763-785. Recuperado el 10 de octubre de 2019, de https://www.redalyc.org/pdf/2912/291245779023.pdf

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Vigo. España.

Fonseca, C.; Gascón, J.; Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *RELIME*, 17(3), 289-318.

García, F., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75-94.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2018). Diferentes interpretaciones de la implicación: una mirada desde la teoría APOE. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31*(1), 349-357. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gasca, G.; Machuca, L. (2018). El impacto de las ciencias computacionales en el mundo real. *Risti,* 29, 8-13.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación matemática*, 26 (especial), 99-123. Recuperado el 20 de julio de 2020, de https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854006.pdf

Hamanaka, H. y Otaki, K. (2020). Generating the raison d'être of logical concepts in mathematical activity at secondary school: Focusing on necessary/sufficient conditions. *Educacão Matemática Pesquisa*, 22(4), 438 – 453.

Hernández, R.; Fernández, C.; Baptista. P. (2014). Metodología de la Investigación. 6° edición. *Mc Graw-Hill Interamericana Editores*: Ciudad de México.

Huertas, M., Mor, E. y Guerrero, A. (2010). Herramienta de apoyo para el aprendizaje a distancia de la lógica en ingeniería informática. *Revista de educación a distancia,* Número especial, 1 -10.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Vigo. España.

Quijano, M. y Corica, A. (2017). Desarrollo de un modelo praxeológico de referencia en torno a lugares geométricos. *REDIMAT*, 6(2), 192 - 220.

Serna, E. (2013). Lógica en las ciencias computacionales. *Educación en ingeniería*, 8(15), 62-68. Recuperado el 13 de marzo de 2020, de file:///D:/Downloads/233-Texto%20del%20art%C3%ADculo-1051-1-10-20130621%20(2).pdf

Shulman, L. (2006). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1 -30.

Sierra, T.; Bosch, M. & Gascón, J. (2012). La formación matemático – didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de "cómo enseñar a contar". *Revista de Educación.* 357, 231-256.

Autores:

Oscar Abel Cardona Hurtado. Profesional en Matemáticas con Énfasis en Estadística y Especialista en Matemáticas Avanzadas de la Universidad del Tolima, Colombia; Magister en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT, Colombia; Estudiante de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias, de la UNCPA, Argentina. Catedrático de la Universidad del Tolima y Docente de Matemáticas de la Institución Educativa Liceo Nacional, de Ibagué. Investigador en Lógica Matemática y en Educación Matemática. oach76@hotmail.com
0000-0003-0907-5706

Ana Rosa Corica. Doctora en Ciencias de la Educación por la UNC en Argentina. Licenciada en Educación Matemática y Profesora en Matemática y Física por la UNCPBA. Investigadora Adjunta del CONICET. Investigadora del NIECyT. Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA, Tandil, Buenos Aires, Argentina. acorica@exa.unicen.edu.ar
0000-0002-3583-6081