UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 08-15

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven[1]

Tomás Recio, Steven Van Vaerenbergh, M. Pilar Vélez

Resumen	El popular programa de matemática dinámica GeoGebra incluye herramientas para la verificación matemática rigurosa y el descubrimiento automático de proposiciones generales sobre figuras geométricas. En este trabajo se presenta, en primer lugar, una breve descripción de tales herramientas, para centrarse a continuación en una reflexión sobre su potencial impacto educativo, a través de un nuevo diseño de tareas escolares en el ámbito de la enseñanza de la geometría, que aprovechen las nuevas características de GeoGebra y contribuyan a guiar al estudiante en la indagación, conjetura y descubrimiento de propiedades geométricas en una construcción dada. **Palabras clave**: geometría dinámica, razonamiento automático, geometría elemental, GeoGebra
Abstract	The popular dynamic mathematics program GeoGebra now includes tools for the mathematically rigorous proof and discovery of general statements on geometric figures. This article will, first, present a short tutorial on these automated reasoning tools. Then it reflects on their potential educational impact, through a new design of school tasks that could profit from GeoGebra's new features, guiding the student towards the inquiry, conjecture and discovery of geometric properties on a given figure. **Keywords**: dynamic geometry, automated reasoning, elementary geometry, GeoGebra
Resumo	O popular programa de matemática dinâmica GeoGebra agora inclui ferramentas para a prova matematicamente rigorosa e a descoberta de declarações gerais sobre figuras geométricas. Este artigo apresentará primeiro um breve tutorial sobre essas ferramentas de raciocínio automatizadas. Em seguida, ele reflete sobre seu potencial impacto educacional, por meio de um novo design de tarefas escolares que poderiam se beneficiar dos novos recursos do GeoGebra, orientando o aluno para a investigação, conjectura e descoberta de propriedades geométricas em uma determinada figura. **Palavras-chave:** geometria dinâmica, raciocínio automatizado, geometria elementar, GeoGebra

[1] Basado en la comunicación: *Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven*. Actas Congreso Iberoamericano, Formación IB: La educación ante el nuevo entorno digital. Diciembre 2019. ISBN 978-84-948417-1-2 http://formacionib.org/congreso-entorno-digital/actas.html, a cuyos organizadores los autores quieren agradecer el permiso concedido para su reproducción y ampliación aquí.

1. Introducción

El popular programa de matemática dinámica GeoGebra[2] ofrece, como cualquier otro sistema de geometría dinámica, algunas notables posibilidades y mejoras para apoyar la enseñanza de la geometría del plano euclídeo y para mejorar la construcción y la exploración de objetos geométricos, arrastrando elementos de la figura. Pero, además, recientemente, se han agregado a GeoGebra, desde la versión 5.0, algunas características específicas que permiten la verificación matemática rigurosa y el descubrimiento automático de proposiciones generales sobre figuras de geometría euclídea construidas por el usuario, las llamadas Herramientas de Razonamiento Automatizado (GGb-ART = GeoGebra Automated Reasoning Tools, si consideramos estas siglas respondiendo al nombre de las herramientas en inglés), o de Demostración Automática de Teoremas (DAT).

Aunque es conocida, entre los expertos en este campo, la existencia de programas de geometría dinámica ofreciendo, de modo experimental o para un número muy limitado de usuarios, unas determinadas prestaciones DAT, la accesibilidad, gratuidad y la portabilidad de GeoGebra, su disponibilidad en tabletas, teléfonos inteligentes y computadoras, vía *web* u *offline*, su difusión mundial –sobre todo en el ámbito educativo—… hace que la inclusión de estas técnicas revolucionarias en GeoGebra suponga un fenómeno cualitativamente distinto, al conllevar un alto potencial de impacto en el mundo académico.

El objeto de este trabajo es, por un lado, realizar --como en (Botana et. al., 2020), donde el lector podrá encontrar más información-- una breve presentación de las funciones de DAT en GeoGebra, para, a continuación, reflexionar sobre el posible uso educativo de estas prestaciones, en particular, a través del análisis de algunos resultados de experiencias recientes que hemos desarrollado con nuestros estudiantes, relativas al uso de técnicas de DAT.

2. Razonamiento automático con GeoGebra

La herramienta básica de razonamiento automático en GeoGebra[3], es la extensión simbólica del ya existente comando *Relación.* Inicialmente este comando tenía un carácter meramente numérico (véanse Kovács, 2015a, 2015b): tras seleccionar el usuario dos objetos geométricos en una construcción e invocar el comando *Relación* (entre ambos objetos), GeoGebra respondía mostrando la posibilidad, o no, de que se dieran determinadas relaciones entre ellos, tales como la perpendicularidad, el paralelismo, la igualdad o la incidencia[4], siempre que la verificación numérica de tales propiedades superase cierto umbral.

---

[2] www.geogebra.org

[3] GeoGebra Discovery, accesible en https://github.com/kovzol/geogebra-discovery , operativa sobre GeoGebra Classic 5 --para ordenadores y portátiles, sobre Windows, Mac o Linux-- y sobre GeoGebra Classic 6, sobre un navegador, en la página http://autgeo.online/geogebra-discovery/, por tanto, válido también sobre tabletas y teléfonos inteligentes.

[4] Véase una lista completa de las relaciones entre objetos investigadas por el comando *Relación* en https://wiki.geogebra.org/en/Relation_Command

Así, dos rectas o segmentos pueden ser consideradas como paralelas para *Relación*, si tomando un vector en cada uno de estos objetos, ambos resultaran ser “aproximadamente proporcionales”, donde “aproximadamente” tiene que ver con el número de dígitos que el usuario ha elegido, en las Preferencias de la aplicación, para realizar cálculos en la sesión con GeoGebra. En la Figura 1 se muestra la construcción de un triángulo *ABC,* donde *D, E* son los puntos medios de los lados *b, a*, respectivamente, y donde *f* es la recta que pasa por *D, E.* En la barra de *Entrada* se introduce el comando *Relación(f,c)* para estudiar la existencia, si es caso, de alguna propiedad entre la recta *f* y el lado *c*.

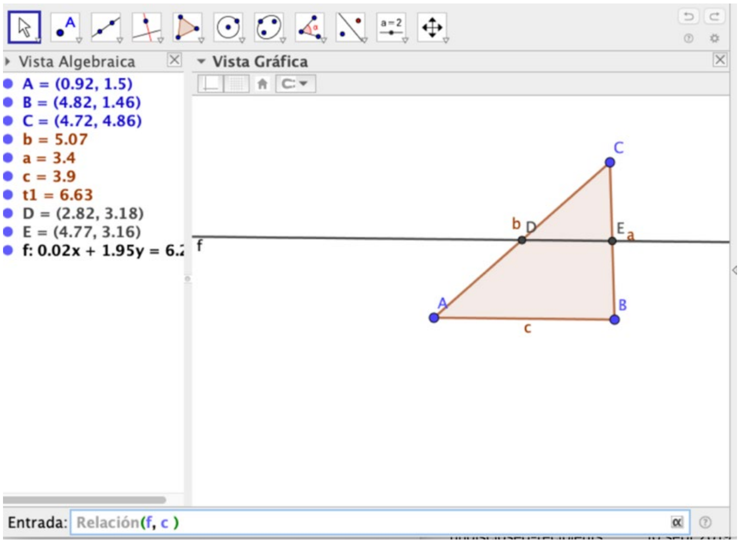


Figura 1: Construcción de la recta *f* que pasa por los puntos medios de dos lados del triángulo *ABC*.

En la Figura 2 se incluye el mensaje de respuesta a este comando, que indica que la recta pasando por *D, E* y la que pasa por los vértices *A, B* son, al menos para esta figura y de manera aproximada, paralelas. Por último, la Figura 3 muestra el resultado de pulsar el icono *Más…* que aparece en la Figura 2: se trata de la comprobación rigurosa de la validez general del teorema que dice que la recta que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo (no degenerado, con *A, B* vértices diferentes) es paralela a la recta descrita por el tercer lado. Tal comprobación se basa en la ejecución de determinados algoritmos que involucran, sin que el usuario lo perciba, diversos aspectos de geometría algebraica computacional avanzada. Véanse, para más detalles técnicos, Botana et. al. (2015) o Recio y Vélez (1999).

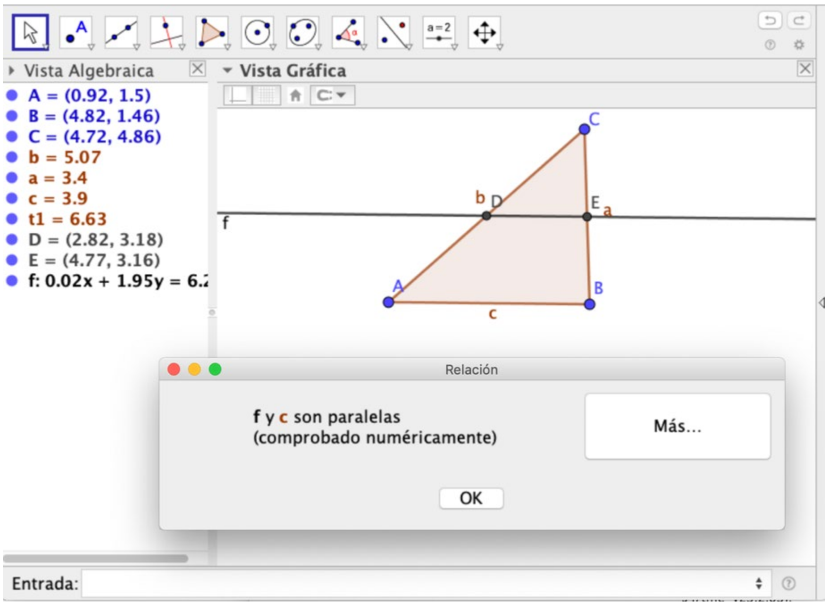


Figura 2: La respuesta al comando *Relación(f,c).*

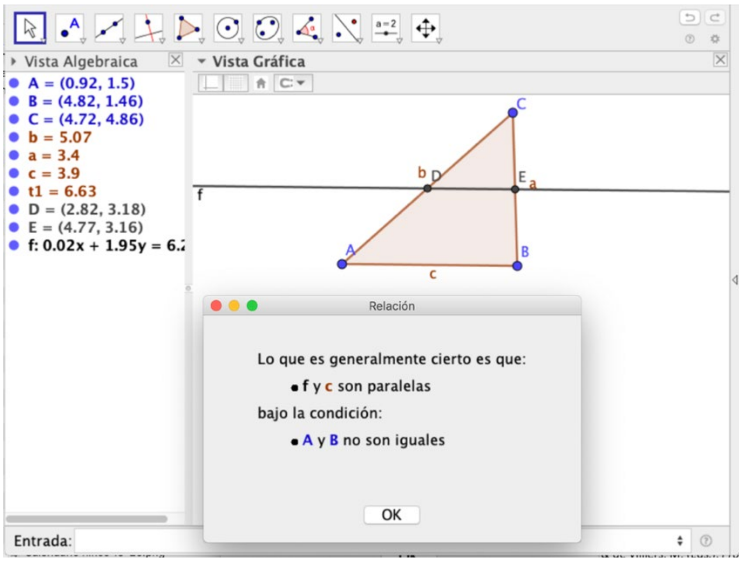


Figura 3: El resultado de pulsar el icono Más… que aparece en la Figura 2.

Además, ha de señalarse que la potencia computacional de las herramientas DAT de GeoGebra no se limita a situaciones típicas del ámbito escolar, sino que es capaz de encontrar y probar relaciones geométricas mucho más sofisticadas. Así, en la Figura 4 (de Hohenwarter, Kovács y Recio, 2019a), mostramos cómo el uso de la *Relación* permite descubrir y verificar que, en un triángulo arbitrario *ABC,* el simétrico del vértice *A* respecto al punto medio del lado opuesto, el circuncentro y el simétrico del ortocentro *O* respecto de *A*, están alineados, resolviendo así el *Ejemplo 230* del clásico texto de Chou sobre demostración automática en geometría (Chou, 1987).

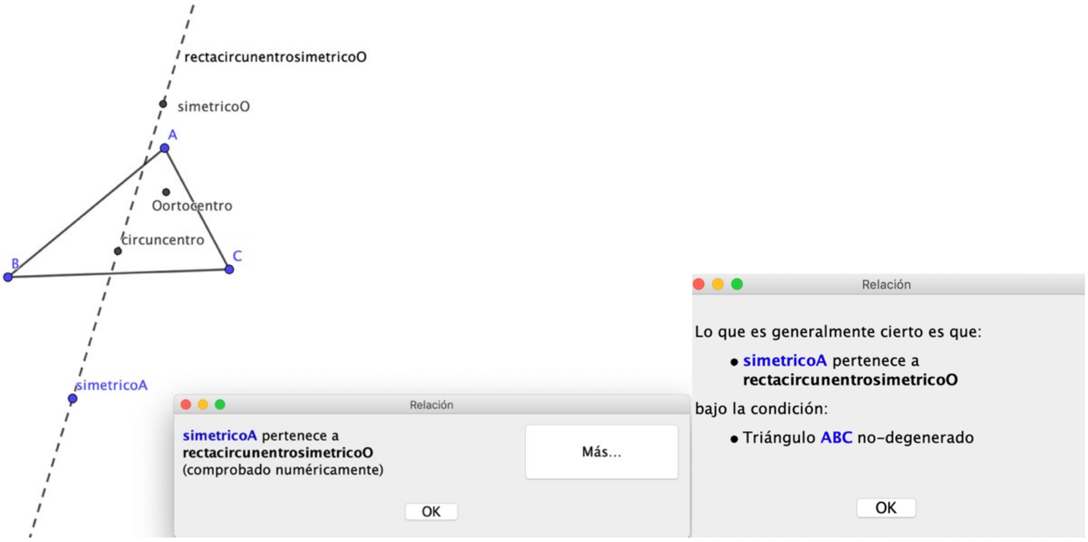


Figura 4: A la izquierda: el comando *Relación* muestra la alineación del simétrico de *A* respecto al punto medio del lado opuesto, del circuncentro y del simétrico del ortocentro *O* respecto de *A*. A la derecha, tras pulsar *Más…*, *Relación* indica que esa alineación es válida con toda generalidad (es decir, de manera exacta y para cualquier triángulo), siempre que el triángulo *ABC* no colapse a una recta o un punto.

Los comandos *Comprueba* y *DemuestraDetalles* funcionan de manera similar, excepto que es el usuario quien debe introducir la tesis conjeturada (ej. este punto está en esta recta), obteniendo como respuesta la verdad o falsedad de su conjetura y, en el caso afirmativo, proporcionando algunas condiciones geométricas adicionales que deben verificarse para que la afirmación dada sí sea generalmente correcta. Estas son las llamadas condiciones de no-degeneración, que habitualmente prescriben que determinados objetos del *input* (por ejemplo, los vértices de un triángulo definido libremente) no deben coincidir o alinearse, etc. para que la relación conjeturada sea verdadera.

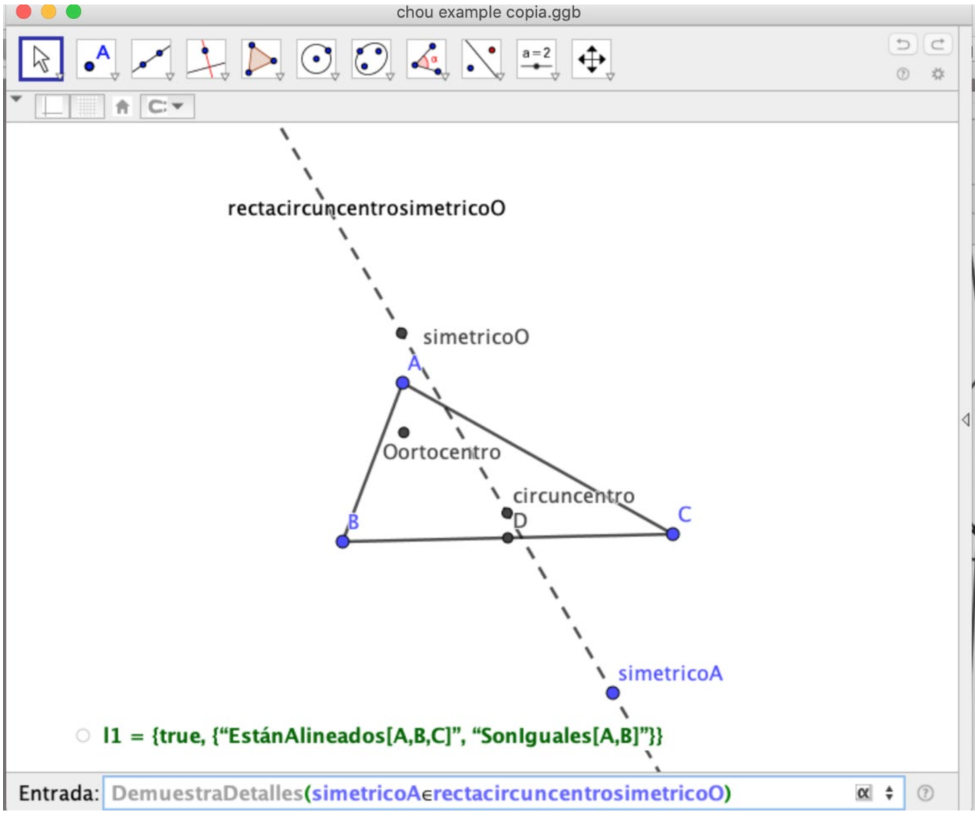


Figura 5: Verificación, con el comando *DemuestraDetalles,* de la pertenencia del simétrico de *A* respecto de *D,* a la recta generada por el circuncentro y por el simétrico del ortocentro *O* respecto de *A*.

En la Figura 5 se observa que la alineación del simétrico de *A,* respecto del punto medio *D* del lado opuesto, con el circuncentro y el simétrico del ortocentro respecto de A es cierta siempre que los tres vértices del triángulo no estén alineados o los dos vértices *A, B* no coincidan.

Una característica especial de estas herramientas de razonamiento automático de GeoGebra es la capacidad de *descubrir* teoremas, es decir, de encontrar hipótesis necesarias para que se verifique cierta tesis inventada. Por ejemplo, supóngase que, en el ejemplo anterior, se construye la misma figura (Figura 5) pero olvidando situar *D* en el punto medio del lado *AB.* A pesar de ello el usuario sigue creyendo que los tres puntos *simétricoA, circuncentro, simétricoO* están alineados. Naturalmente, el enunciado es falso; pero si se quiere saber dónde es preciso ubicar *D* para que la tesis sea cierta, se puede usar el comando *EcuaciónLugar* señalando que se desea encontrar el lugar de *D* para la alineación de esos tres puntos.

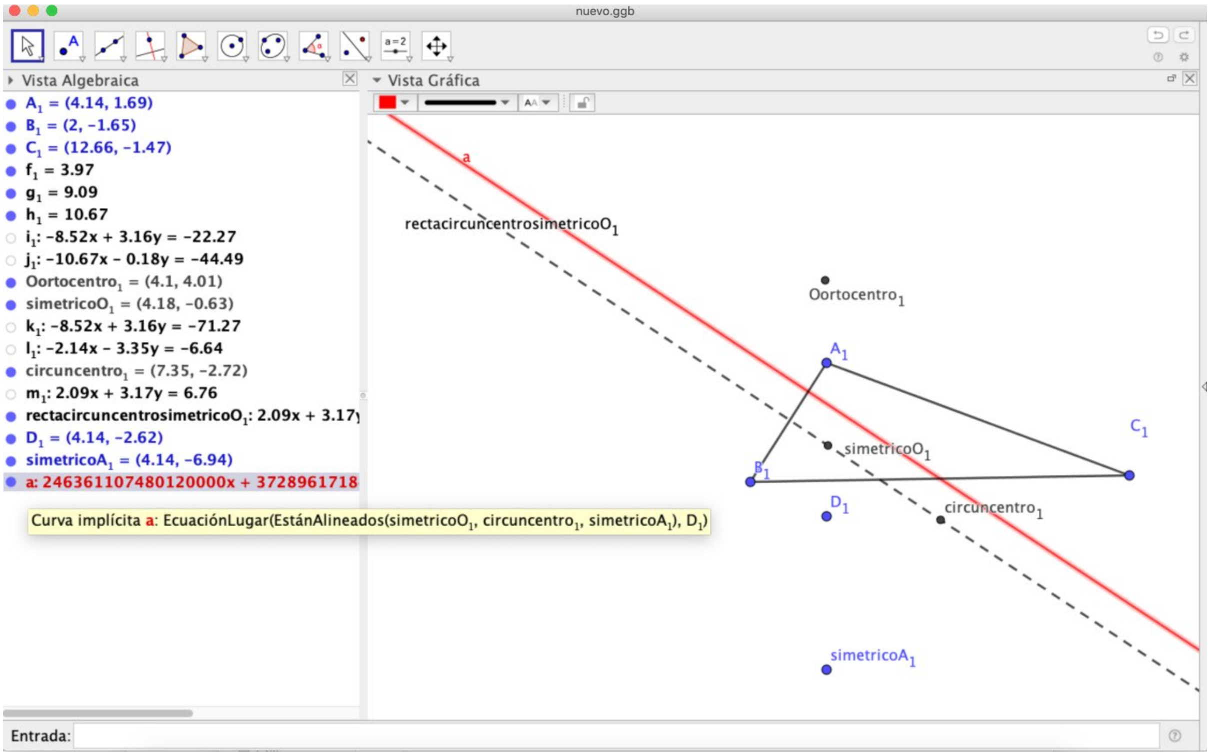


Figura 6: A la derecha el punto D_1 se ha tomado libremente y el comando *EcuaciónLugar* permite generalizar el ejemplo 230, si se reubica D_1 en la recta *a*.

La respuesta, como se puede verse en la Figura 6, señala que el punto *D* ha de situarse en la recta de color rojo, es decir, la paralela a la recta dada por el circuncentro y el simétrico del ortocentro, pasando por el punto medio de *AB,* lo que generaliza el ejemplo de Chou, ya que permite colocar *D* en toda una recta, no sólo en el punto medio del lado *AB.* Véase la Figura 7, donde se comprueba la verdad de la tesis en una construcción con el punto *D* sobre la recta *a*, pero no en el punto medio del lado.

Un ejemplo de otra naturaleza distinta se incluye en la Figura 8, que recoge tres pantallazos de un teléfono móvil, mostrando, a la izquierda, la construcción inicial, un simple cuadrado, sobre el que se ejecuta el comando *Descubrir(B)*. Este comando busca, de manera automática y combinatoria, toda una serie de posibles relaciones geométricas entre los elementos de la construcción en los que se incluya el punto *B* para, a continuación, verificar la verdad o falsedad de las mismas. En el centro de la figura se muestra el mensaje con el resultado de la ejecución del comando; y a la derecha, la visualización --también producida de modo automático por GeoGebra-- de las propiedades obtenidas.

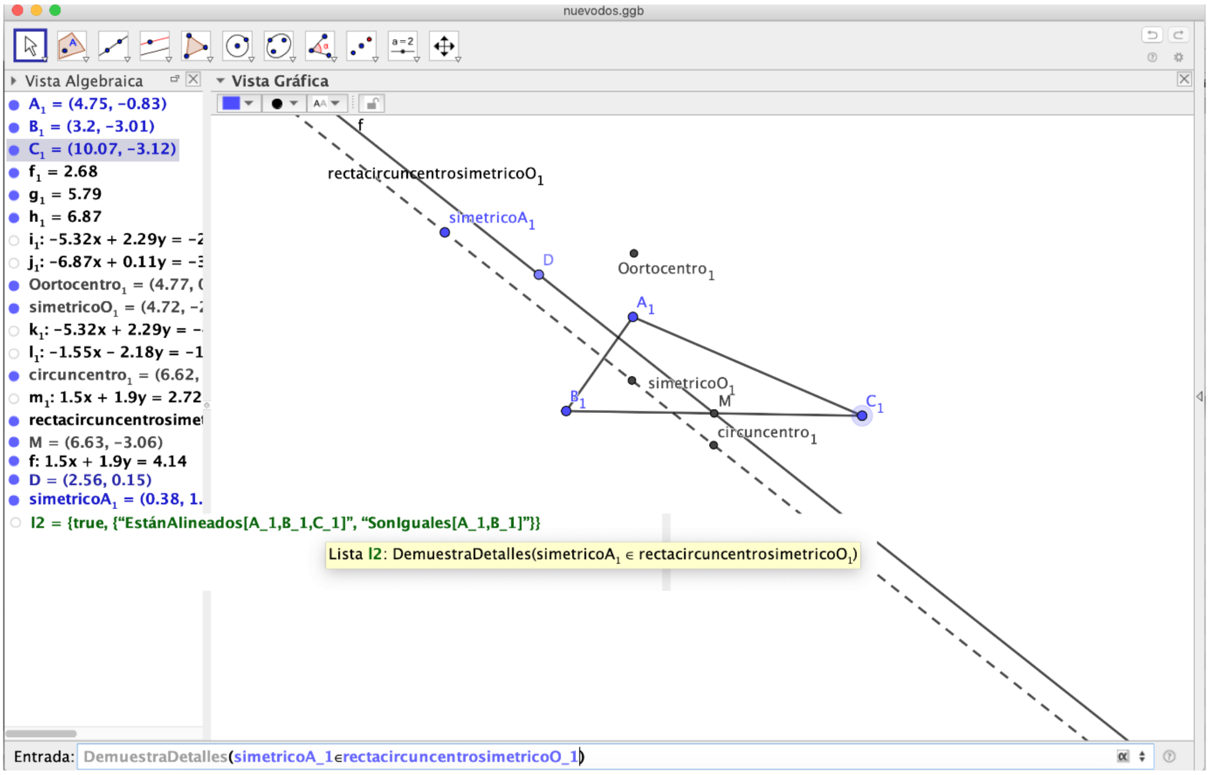


Figura 7: Descubriendo un nuevo teorema: si el punto D_1 se toma en la recta paralela a *rectacircuncentrosimetricoO₁* pasando por el punto *M* medio del lado B_1 C_1, entonces el simétrico del vértice A_1 respecto de D_1 está en esa misma recta.

En cierto sentido, las herramientas que se acaban de mostrar son una suerte de *oráculo,* al que el usuario debe interrogar: si el usuario pregunta, el oráculo responde.

Pero las herramientas de razonamiento automático que están siendo implementadas en GeoGebra van un paso más allá en la mecanización del pensamiento geométrico: se trata de desarrollar un *geómetra mecánico*, que debe ser capaz de observar e indagar de manera autónoma, las propiedades geométricas de una figura. Esto ya lo hace, en GeoGebra-*Discovery*, el comando *Descubre*, pero sólo en torno a un punto elegido por el usuario para centrar la tarea de descubrimiento.

De manera mucho mas general, la versión de GeoGebra que se denomina *GA* o *geómetra "amateur"* '[5] parte de una figura dada a la que, de manera sistemática y programada (con el posible control, en un futuro, por el usuario, de algunas opciones), va añadiendo diversos elementos (por ejemplo, los puntos medios de los lados de un triángulo dado, las rectas que conectan los vértices con estos puntos

[5]Disponible en http://autgeo.online/ag/ . Más información en https://github.com/kovzol/ag

medios, etc.). A continuación, el *GA* produce de forma combinatoria --pero que puede ser controlada por el usuario, para evitar una complejidad exponencial-- una colección de proposiciones relativas a la colinearidad, paralelismo, etc. entre los diversos elementos existentes (originalmente o añadidos) en la figura. Finalmente, este protocolo de generación de conjeturas aplica las herramientas de razonamiento automático para verificar la certeza o falsedad de tales proposiciones.

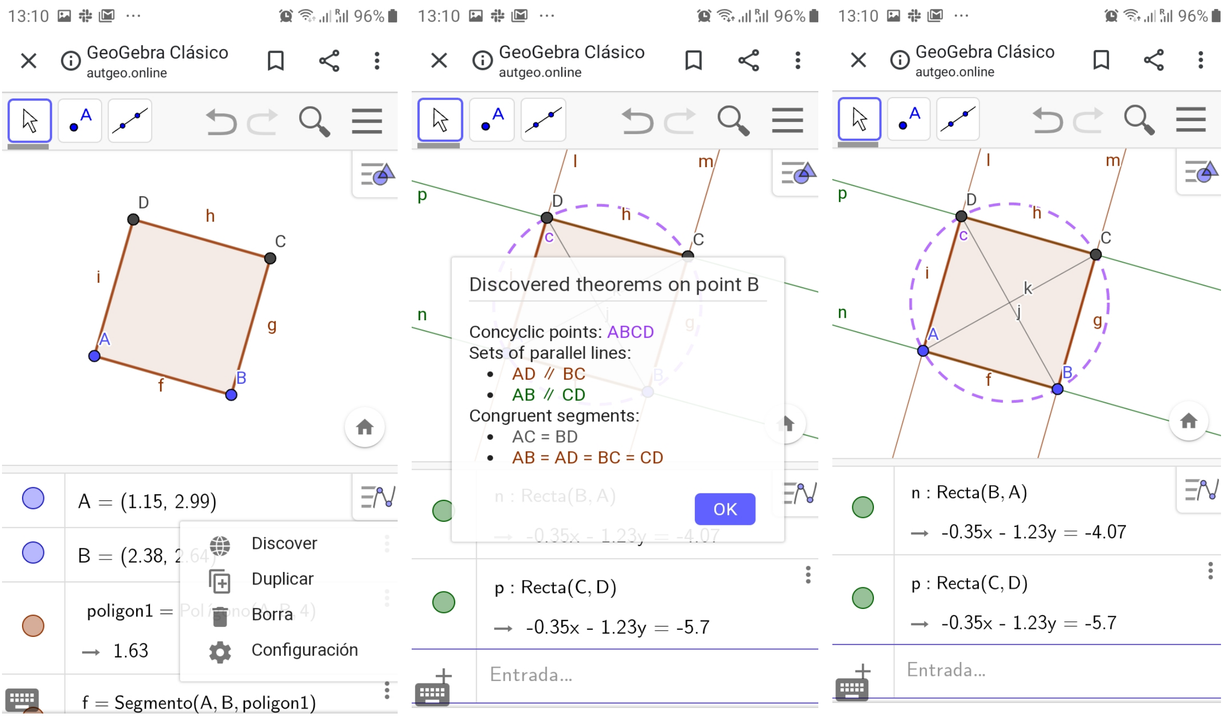


Figura 8: Tres imágenes de la pantalla de un teléfono móvil, mostrando la ejecución del comando *Descubrir(B)*, donde *B* es el vértice de un cuadrado.

La figura 9 muestra un ejemplo de *input* del *GA.* Se trata de un triángulo arbitrario *ABC*, con puntos medios de los lados *D, E, F*, del ortocentro *G* y de los pies de las perpendiculares *H, I, J*. Además, se incluyen los puntos medios entre los vértices y el ortocentro, *K, L, M*. Finalmente el circuncentro *N* se incluye como intersección de las mediatrices de dos lados. Se trata de que *GA* encuentre, sin más interacción humana, sin más pistas, el teorema que establece las igualdades

$$ND=NE=NF=NH=NI=NJ=NK=NL=NM$$

esto es, que los puntos D, E, F, H, I, J, K, L y M son concíclicos y que el centro de dicho círculo es N. Es el bien conocido teorema de los nueve puntos[6].

[6] https://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_de_los_nueve_puntos

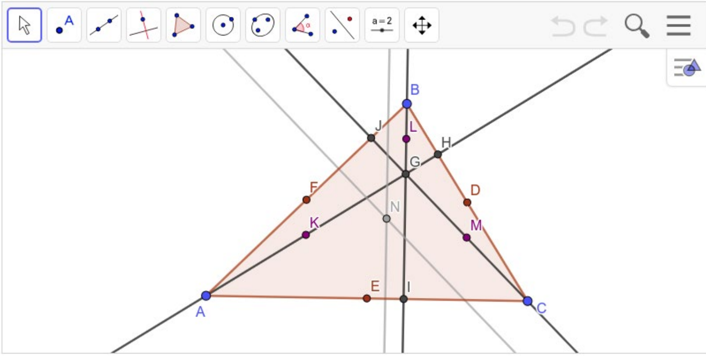
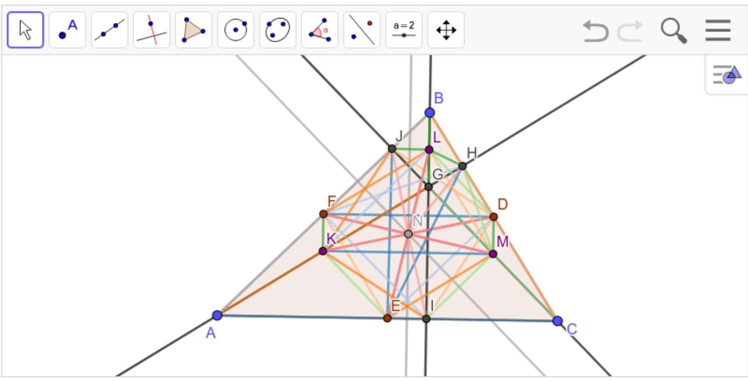


Figura 9: Una entrada del *GA:Geómetra Amateur* o *Automático*.

Ahora el usuario tiene sólo que seleccionar algunas relaciones (de las que ofrece un pequeño menú de posibilidades que aparece bajo la imagen) que desea que *GA* explore. Por ejemplo, elige *equality of distances between two points* y pulsa el botón de *start discovery*. A continuación, *GA* produce, en menos de 26 segundos en un ordenador portátil[7], una lista de 129 "teoremas", entre los cuales se encuentran las igualdades arriba señaladas, que forman parte de los resultados 64--71, 84--90, 100--105, 114--118, 120--123, 124--126, 127--128 y 129, tal como se enumeran en la Figura 10.



Select relations to check:

Collinearity of three points
Equality of distances between two points
Perpendicularity of segments defined by two points
Parallelism of segments defined by two points
Concyclicity of four points

The following theorems can be proven:

1. AE=CE	14. AK=IK	27. BL=GL	40. CM=GM	53. DJ=LM	66. DN=HN	79. EL=FM	92. FH=KL	105. FN=MN	118. HN=MN
2. AE=DF	15. AK=JK	28. BL=HL	41. CM=HM	54. DK=EL	67. DN=IN	80. EM=FL	93. FI=KL	106. GK=IK	119. IK=JK
3. AE=EH	16. BD=CD	29. BL=JL	42. CM=IM	55. DK=FM	68. DN=JN	81. EM=GK	94. FK=GL	107. GK=JK	120. IN=JN
4. AE=EJ	17. BD=DI	30. CD=DI	43. DE=FH	56. DL=EK	69. DN=KN	82. EM=IK	95. FK=HL	108. GL=HL	121. IN=KN
5. AE=KM	18. BD=DJ	31. CD=DJ	44. DE=FI	57. DL=GM	70. DN=LN	83. EM=JK	96. FK=JL	109. GL=JL	122. IN=LN
6. AF=BF	19. BD=EF	32. CD=EF	45. DE=KL	58. DL=HM	71. DN=MN	84. EN=FN	97. FL=GK	110. GM=HM	123. IN=MN
7. AF=DE	20. BD=LM	33. CD=LM	46. DF=EH	59. DL=IM	72. EF=LM	85. EN=HN	98. FL=IK	111. GM=IM	124. JN=KN
8. AF=FH	21. BF=DE	34. CE=DF	47. DF=EJ	60. DM=FK	73. EH=EJ	86. EN=IN	99. FL=JK	112. HL=JL	125. JN=LN
9. AF=FI	22. BF=FH	35. CE=EH	48. DF=KM	61. DM=GL	74. EH=KM	87. EN=JN	100. FN=HN	113. HM=IM	126. JN=MN
10. AF=KL	23. BF=FI	36. CE=EJ	49. DI=DJ	62. DM=HL	75. EJ=KM	88. EN=KN	101. FN=IN	114. HN=IN	127. KN=LN
11. AK=EM	24. BF=KL	37. CE=KM	50. DI=EF	63. DM=JL	76. EK=GM	89. EN=LN	102. FN=JN	115. HN=JN	128. KN=MN
12. AK=FL	25. BL=DM	38. CM=DL	51. DI=LM	64. DN=EN	77. EK=HM	90. EN=MN	103. FN=KN	116. HN=KN	129. LN=MN
13. AK=GK	26. BL=FK	39. CM=EK	52. DJ=EF	65. DN=FN	78. EK=IM	91. FH=FI	104. FN=LN	117. HN=LN	

Finished, found 129 theorems among 4095 possible statements.
Elapsed time: 0h 0m 26s

Figura 10: Resultados del *GA:Geómetra Amateur* o *Automático.*

[7] Por ejemplo, en un Lenovo ThinkPad de 8 núcleos, Intel(R) Core (TM) i7-8550U CPU @ 1.80GHz, con 16 GB RAM (de 2018).

Obsérvese que dicha figura, además, de modo automático, representa con el mismo color aquellos segmentos que tienen la misma longitud, lo que facilita al usuario el descubrir algunos otros resultados, tal vez, inesperados, como las igualdades *AK=GK=IK=JK* de las que se deriva que *A, I, J* y el circuncentro *G* son concíclicos.

3. GeoGebra, una calculadora geométrica en el aula

Es preciso aclarar que, en la versión actual de GeoGebra, el programa no aporta una prueba visible o legible de la validez de los resultados obtenidos usando las herramientas DAT: simplemente contesta afirmativa o negativamente o muestra las condiciones que deben añadirse para que sea cierto un determinado enunciado geométrico. Pero debe reiterarse que la corrección de tales afirmaciones está matemáticamente verificada y es válida en todos los casos, lo que es, tanto epistemológica como psicológicamente, una verdad de nivel superior y completamente diferente a la alcanzada simplemente manipulando una colección de casos particulares obtenidos al arrastrar la construcción dada a diversas posiciones y observando visualmente que en todos estos casos se verificaba cierta propiedad, que ha sido hasta la fecha la forma clásica de trabajar con los sistemas de geometría dinámica.

No es posible, por las limitaciones de extensión de este trabajo, incluir más detalles sobre otras herramientas DAT en GeoGebra, remitiendo al lector a Kovács, Recio y Vélez (2018) para una presentación completa.

La novedosa tecnología que se ha descrito en la sección precedente, aunque ya fue imaginada en los años 80 (Howson y Wilson, 1986), tiene aún pendiente el desarrollo de un marco teórico y de una metodología sistemática para su aplicación en el aula, que contribuya a colaborar en la resolución de viejos, pero vigentes, desafíos en la educación matemática (Sinclair, Bartolini, de Villiers y Owens, 2016). Así se constata que estas nuevas herramientas, ya consolidadas a nivel técnico con notable calidad, todavía están en una fase inicial en lo que se refiere a su uso en el contexto educativo, véanse Kovács, Recio, Richard y Vélez (2017), Recio, Richard y Vélez (2019), y Hohenwarter, Kovács y Recio (2019b), para algunas referencias, detalles y propuestas.

Téngase en cuenta que el uso de programas de Geometría Dinámica, incluso sin la inclusión de las herramientas DAT, ya plantea, para algunos expertos (Lin et al. 2012), determinadas preocupaciones, ante la posibilidad de que el uso de estos programas conlleve el que los alumnos no sientan la necesidad de realizar argumentaciones para corroborar aquellas propiedades que ellos ya observan que se mantienen y visualizan en cualquier figura que resulte de arrastrar una construcción inicial.

Ahora, a este fenómeno debemos añadir el efecto de las herramientas DAT, que convierten al programa GeoGebra en una suerte de “calculadora geométrica”, que señala a los alumnos cuáles son las propiedades que se verifican en una figura y que responde sobre la certeza o falsedad de aquellas relaciones que el alumno conjeture. En este contexto, ¿es posible concitar el interés de los alumnos en la búsqueda de razones que expliquen que las tres alturas de un triángulo se encuentran siempre en un punto, cuando su teléfono de bolsillo –con la *app* GeoGebra— garantiza ya, con un algoritmo matemático, que sí lo hacen? ¿Puede ser atractivo para los estudiantes el cálculo manual del producto 2.345 X 678, cuando saben que su calculadora de bolsillo puede darles inmediatamente la respuesta correcta 1.589.910?

La respuesta no está clara, para los autores de este artículo. Pero piensan que es urgente abordar su búsqueda. Por ejemplo, investigando en un nuevo diseño de tareas escolares en el ámbito de la enseñanza de la geometría, que aprovechen las nuevas características de GGb-DAT, para guiar al estudiante en la búsqueda, formulación y validación de propiedades geométricas sobre una construcción dada.

Así, en Hauer, Kovács, Recio y Vélez (2018) se esboza ya una aproximación al aprendizaje basado en la indagación (IBL) mediante GGb-DAT, planteando algunas posibles tareas de investigación abierta en geometría utilizando GGb-DAT, reflexionando sobre su potencial educativo y sus carencias. El trabajo concluye, entre otras cosas, que a pesar de que la tecnología DAT parece estar madura para soportar dichas actividades, su utilización en el aula está todavía en una fase experimental, lo que dificulta la propuesta de su implementación en el aula. Por ello ese artículo plantea determinadas líneas de trabajo futuro acerca de la integración de GGb-DAT en el diseño de tareas IBL, tales como investigar sobre si el uso del GG-ART como herramienta auxiliar en la experimentación y formulación de conjeturas por parte de los estudiantes, colabora realmente con el aprendizaje por indagación, lo que requiere analizar en qué medida se cumplen los criterios para un IBL válido.

En la misma dirección, en Recio, Richard y Vélez (2019) se describe una experiencia en esta línea que los autores de ese trabajo han llevado a cabo en sus universidades (Universidad de Cantabria (España), Université de Montréal (Canadá) y Universidad Antonio de Nebrija (España)) con 75 estudiantes de cursos de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En primer lugar, los alumnos recibieron una sesión informativa y práctica sobre el uso de las herramientas de DAT de GeoGebra (unas dos horas de duración). A continuación, fueron distribuidos en grupos de dos o tres alumnos, para que abordaran la realización de una serie de tareas (cuyo contenido detallado puede consultarse en http://www.geogebraARTexperience.tk) durante las siguientes dos o tres semanas, fuera del horario de clase. Por ejemplo, la primera de esas tareas planteaba a los alumnos la consideración de la siguiente pregunta:

> *¿Qué condiciones debe verificar un triángulo para que dos bisectrices de sus ángulos interiores sean perpendiculares? Justificar y responder a las cuestiones que siguen.*

Para abordar tal pregunta el grupo de alumnos fue guiado a través de una serie de actividades con GeoGebra, que aquí recogemos de modo muy sumario, tales como trazar un triángulo *ABC* y las bisectrices de *B* y *C*, para luego pedir a los alumnos que desplacen el otro vértice *A* y analicen aquellas posiciones en las que las bisectrices se “aproximan” a una relación de perpendicularidad. Tras recoger datos sobre la ubicación óptima de *A*, se propuso a los alumnos usar una de las herramientas DAT, que señaló que la perpendicularidad se alcanza sólo cuando el vértice *A* se encuentra en la misma recta *BC* (y se trata, por tanto, de un triángulo degenerado). Por último, se requirió a cada alumno que justificara matemáticamente esta respuesta, concluyendo la imposibilidad de la perpendicularidad de las bisectrices… etc.

Esta misma mecánica se desarrolló en las otras dos actividades planteadas: al alumno se le pidió que dibujara una figura con GeoGebra, que observara, que experimentara, que preguntara a la máquina, que volviera luego sobre el dibujo y reflexionara sobre la respuesta obtenida para tratar, con esta ayuda, de encontrar un argumento geométrico que la justificara.

En general se puede decir que los alumnos reaccionaron con una valoración muy positiva (gratamente sorprendidos) ante la presentación inicial de las herramientas DAT, pero en el desarrollo de las distintas tareas los alumnos claramente se encontraban más cómodos usando un razonamiento visual o mediante argumentaciones tradicionales, más próximas a su experiencia personal previa y al peso de la tradición matemática, que utilizando las técnicas DAT, con un efecto de *black box* que les dificultaba aprovechar completamente su potencial de ayuda al razonamiento.

Por todo ello se quiere concluir este trabajo realizando una llamada a la comunidad educativa sobre la necesidad de estudiar, en profundidad, el aprovechamiento de las nuevas herramientas GGb-DAT, lo que tal vez pudiera conllevar la introducción de cambios sustanciales en la enseñanza de la geometría, al igual que la aparición y generalización del uso de la calculadora de bolsillo ha supuesto –se reconozca o no— una modificación profunda –aunque aún no totalmente culminada-- no sólo en cómo se han de resolver determinados problemas sino, sobre todo, en qué tipo de técnicas y problemas han de considerarse como objetivos de una enseñanza de las matemáticas que tenga en cuenta las nuevas tecnologías.

Este es, en definitiva, ¡el reto que se debe plantear y que aquí se plantea!

Agradecimientos

Lo expuesto en estas líneas es resultado del trabajo continuado durante años de un equipo de personas. Entre ellas Francisco Botana (Universidad de Vigo) y Zoltán Kovács (Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz, miembro del equipo oficial de desarrolladores de GeoGebra, implementador inicial y responsable en la actualidad del módulo de razonamiento automático) han tenido un papel fundamental en el diseño y desarrollo de GeoGebra-*Discovery* y de *GA*.

El primer y tercer autor están parcialmente financiados por FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades - Agencia Estatal de

Investigación/MTM2017-88796-P (Computación simbólica: nuevos retos en Álgebra y Geometría, y sus aplicaciones).

Bibliografía

Chou, S. C. (1987). *Mechanical geometry theorem proving*. Kluwer Academic Publishers. Norwell, MA, USA.

Botana, F., Hohenwarter, M., Janičić, P., Kovács Z., Petrović, I., Recio, T. and Weitzhofer, S. (2015). Automated theorem proving in GeoGebra: current achievements. *Journal of Automated Reasoning*, 5(1), 39-59.

Botana, F., Kovács Z., Recio, T. and Vélez, M. P. (2020). Hacia un autómata geómetra. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 23 (2).

Hauer, B., Kovács, Z., Recio, T. y Vélez, M.P. (2018). Automated reasoning in elementary geometry: towards inquiry learning. *Pädagogische Horizonte,* 2(2), 27-39.

Hohenwarter, M., Kovács, Z. and Recio, T. (2019). Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 79-84.

Hohenwarter, M., Kovács, Z. and Recio, T. (2019). Using GeoGebra Automated Reasoning Tools to explore geometric statements and conjectures. En: Hanna, G., de Villiers, M., Reid, D. (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*, Series: Mathematics Education in the Digital Era, 14, 215-236. Springer International Publishing.

Howson, G. and Wilson, B. (1986). *ICMI Study series: School mathematics in the 1990's*. Cambridge University Press. Kuwait.

Kovács, Z. (2015a). Computer based conjectures and proofs. Ph.D. Dissertation. Johannes Kepler University, Linz.

Kovács, Z. (2015b). The Relation Tool in GeoGebra 5. En: Botana, F., Quaresma, P. (Eds.), *Proceedings of the 10th International Workshop on Automated Deduction in Geometry* (ADG 2014), 9-11 July 2014, *Lecture Notes in Artificial Intelligence 9201,* 53-71. Springer.

Kovács, Z., Recio, T., Richard, P.R. and Vélez, M.P. (2017). GeoGebra Automated Reasoning Tools: A Tutorial with Examples. En: Aldon, G. and Trgalova, J. (Eds.): *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, [en línea]. Recuperado el 27 de abril de 2020 de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01632970

Kovács, Z., Recio, T. and Vélez, M.P. (2018). Using Automated Reasoning Tools in GeoGebra in the Teaching and Learning of Proving in Geometry. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, 25(2), 33-50.

Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., Tabach, M. and Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. En: Hanna, G., de Villiers, M. (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*, 305-326. Springer.

Recio, T., Richard, P. R. and Vélez, M. P. (2019). Designing Tasks Supported by GeoGebra Automated Reasoning Tools for the Development of Mathematical Skills. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 26(2), 81-88.

Recio, T. and Vélez, M. P. (1999). Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry. *Journal of Automated Reasoning*, 23, 63-82.

Sinclair, N., Bartolini, M.G., de Villiers, M. and Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 691-719.

Recio, Tomás: Catedrático de Álgebra de la Universidad de Cantabria (Santander, España) desde 1982. Ha desarrollado múltiples cargos relacionados con la investigación y la educación, a nivel regional, nacional e internacional. Fundador del Instituto GeoGebra de Cantabria. Autor de cientos de artículos científicos y comunicaciones en diferentes revistas y congresos. Véase más información en: http://www.recio.tk

Vélez, M. Pilar: Profesora de Matemática Aplicada en la Universidad Nebrija (Madrid, España) desde 1997. Ha desempeñado diferentes cargos de dirección, entre ellos Rectora de la Universidad Nebrija de 2010 a 2014. Actividad investigadora en algebra computacional, razonamiento automático en geometría y educación en matemáticas (https://orcid.org/0000-0002-5724-4300).

Van Vaerenbergh, Steven: Profesor Ayudante Doctor en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Cantabria (Santander, España). Actividad investigadora en las aplicaciones de la inteligencia artificial en la educación matemática (https://orcid.org/0000-0003-3091-0171).