UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 333-343

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. Apoyos visuales al resolver problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Para entrar a ver un partido de fútbol, por 1 adulto y 5 niños menores de 12 años, se paga 70 soles; y por 3 adultos y 1 niño menor de 12 años se paga 98 soles. ¿Cuánto se debe pagar por un adulto solo?[1]

Este problema es una variación de un problema propuesto por un profesor de la región Amazonas, del Perú, y para su solución, así como de otros problemas que presento en el artículo, pongo énfasis en el apoyo visual, mediante segmentos de recta.

El problema, es el número 7 de la secuencia que presento en este artículo y surgió como parte de una conferencia sobre creación y resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a pedido de profesores de matemáticas de la región Amazonas. desarrollada en Julio, en forma no presencial, por la situación de pandemia que vivimos. Un antecedente importante es una charla similar a profesores de primaria.

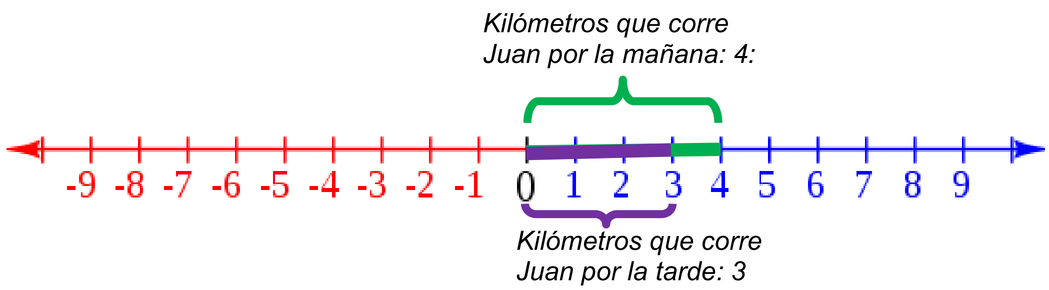
Experiencia con profesores de primaria

En una charla-taller no presencial, ofrecida a profesores de educación primaria, debía ilustrar el uso de la recta numérica en la resolución de problemas de adición y sustracción. Comencé con un problema muy sencillo, que en este artículo llamaré Problema 1, y los otros seguirán numeración correlativa.

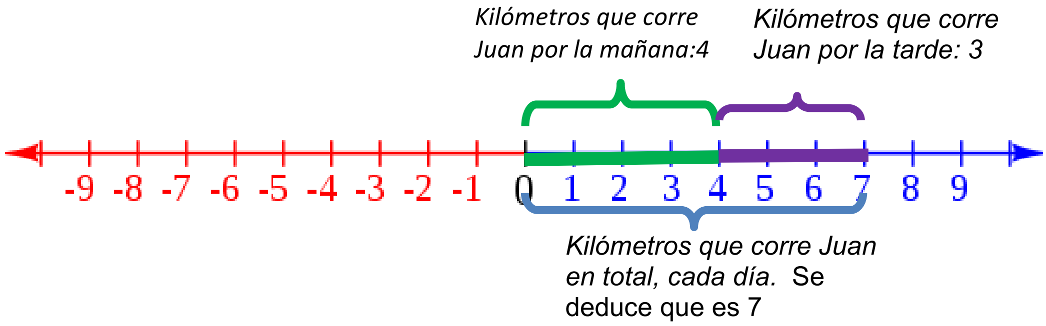
Problema 1. Juan se prepara para una carrera y cada día, por la mañana corre 4 kilómetros y por la tarde corre 3 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros corre Juan, en total, cada día?

Expliqué que resulta útil asociar segmentos de la recta numérica a los números dados, considerando un extremo del segmento en el punto que representa al 0 y el otro extremo en el punto que representa al número y mostré la siguiente representación, usando los números que se dan como información en el problema:

[1] Se sobreentiende que el precio de la entrada por cada adulto es fijo y, similarmente, el precio de la entrada por cada niño.



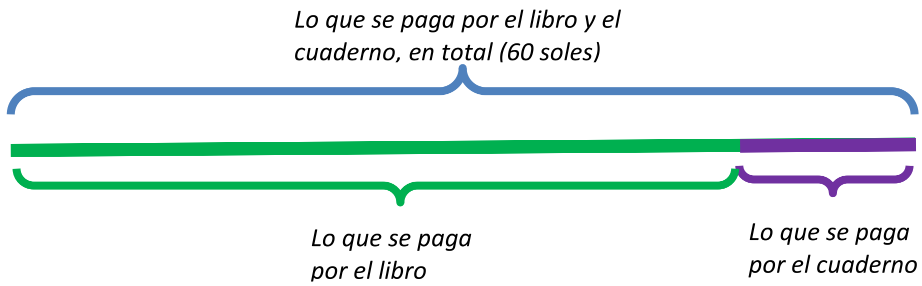
Recurriendo a la intuición, y siempre buscando interacción con los profesores, usé la traslación de segmentos en la recta numérica para mostrar la siguiente ilustración de una solución del problema:



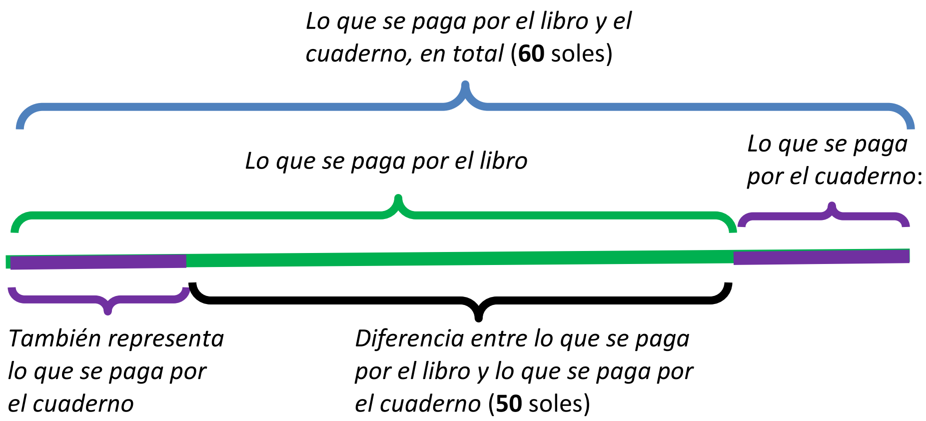
Propuse, entonces, un segundo problema, cuya solución ya no es tan evidente:

Problema 2: Por la compra de un libro y un cuaderno se paga 60 soles. Si por el libro se paga 50 soles más que por el cuaderno. ¿Cuál es el precio del libro y cuál es el precio del cuaderno?

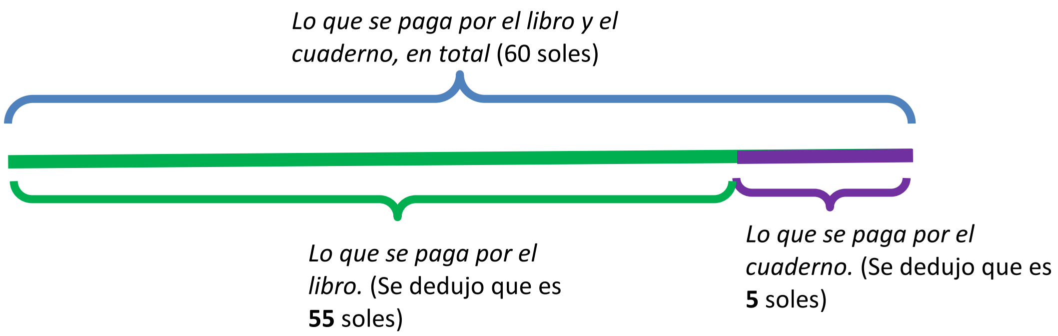
Para resolverlo, seguimos relacionando los números dados en la información del problema con segmentos asociados a la recta numérica. Como los números son un poco grandes, prescindí de la recta numérica específica y usé solo los segmentos asociados a los intervalos, teniendo en cuenta que por el libro se paga más que por el cuaderno. Así, usé la siguiente representación, considerando un segmento de longitud 60, correspondiente al pago total (60 soles), que es la primera información que se da en el problema.



Nuevamente, apoyado en la intuición, usé la congruencia de segmentos para representar el segmento correspondiente al pago por el cuaderno, como parte del segmento correspondiente al pago del libro y así hacer evidente en la representación la diferencia de precios del libro y del cuaderno

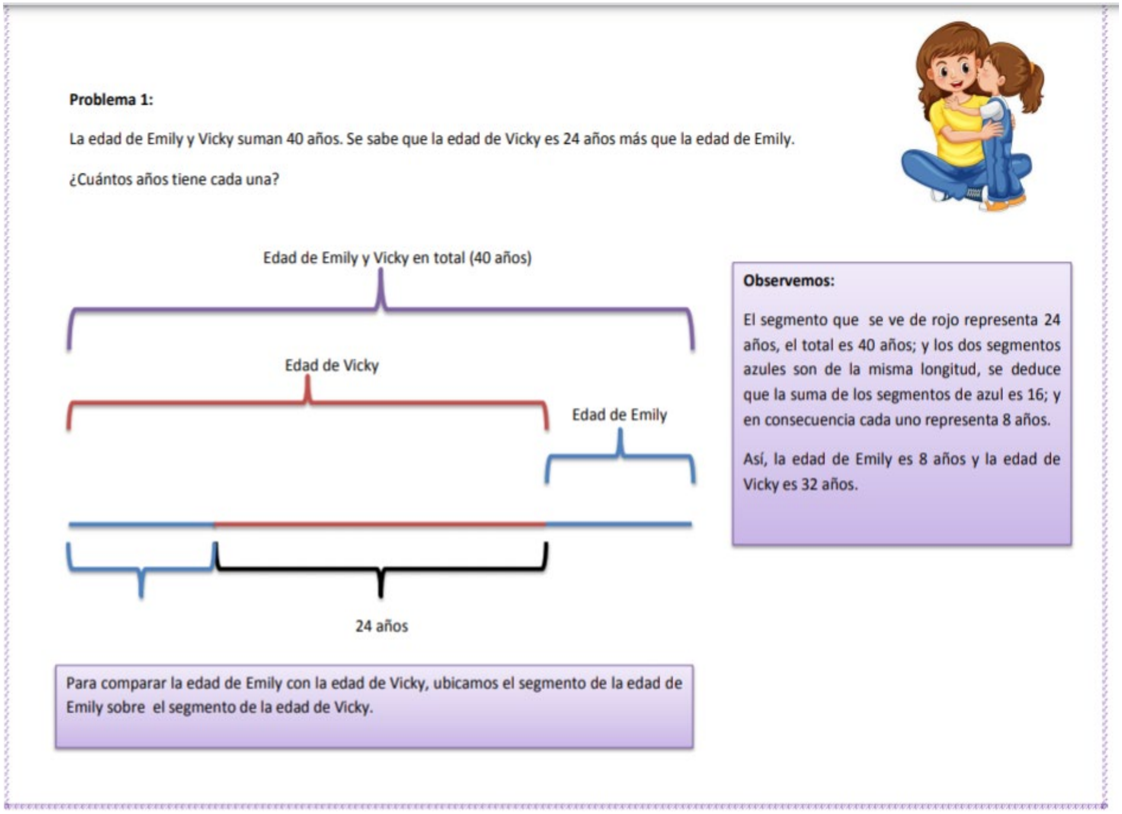


Así, como la longitud del segmento más grande es 60 (representando el pago de 60 soles), el segmento que representa los 50 soles de diferencia tiene longitud 50. Por otra parte, los dos segmentos (de color púrpura) que representan el pago por el cuaderno son de la misma longitud, en consecuencia, la suma de las longitudes de los dos segmentos de color púrpura es 10. Por consiguiente, cada uno es de longitud 5 y representa 5 soles. Así, **el precio del cuaderno es 5 soles y el del libro es 55 soles**.



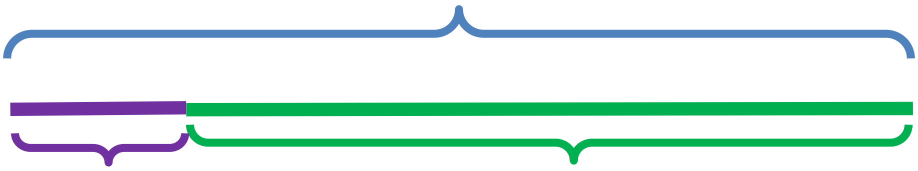
Sugerí que los profesores inventen problemas similares y que me los envíen, con sus soluciones. Ya en la sesión algunos profesores propusieron verbalmente algunos problemas, pero fue muy agradable sorpresa recibir, días después, por correo electrónico, un problema con una solución similar a la expuesta, enviado por la profesora Vicky Terrones Salas, que fue creado por ella y – según me dijo – a partir de una situación real, considerando la edad de su sobrina Emily. Lo copio a continuación:

Comentarios

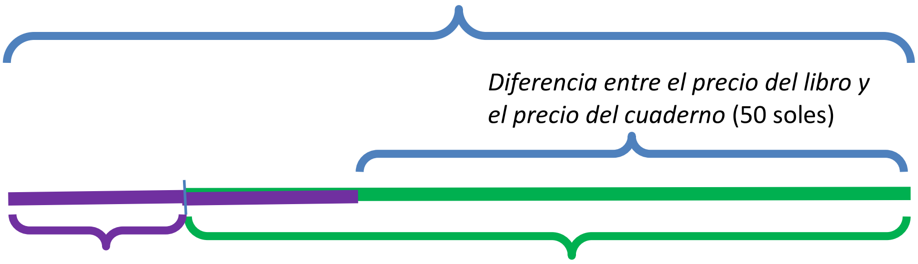


Ciertamente, hay otras maneras de resolver estos problemas, inclusive con apoyos visuales similares a los usados; por ejemplo, en el Problema 2, en lugar de representar inicialmente el pago total, representar los precios del cuaderno y del libro:

Como lo que se paga en total es 60 soles, ubicamos los segmentos de forma adyacente y tenemos un segmento que le asignamos longitud 60.



Para evidenciar que por el libro se paga 50 soles más que por el cuaderno, copiamos el segmento que representa el precio del cuaderno, sobre el segmento que representa el precio del libro



Entonces, de manera similar a la solución expuesta antes, como la longitud del segmento más grande es 60; como ya encontramos que una porción de este segmento es de longitud 50 (representando los 50 soles de diferencia entre los precios); y como los dos segmentos (de color púrpura) que representan el pago por el cuaderno son de la misma longitud, se deduce que la suma de las longitudes de los dos segmentos de color púrpura es 10. En consecuencia, cada uno es de longitud 5 y representa 5 soles. Así, **el precio del cuaderno es 5 soles y el del libro es 55 soles**.

Es importante evidenciar la estrecha relación de cada una de las soluciones con un enfoque algebraico:

Con la primera solución:

Usamos como información de partida que el pago total, por el libro y el cuaderno, es 60 soles.

Entonces, si y representa el precio del libro y x representa el precio del cuaderno, tenemos que

$$y + x = 60. \qquad (1)$$

Otra información que se da en el problema, es que por el libro se paga 50 soles más que por el cuaderno; luego,

$$y = x + 50 \qquad (2)$$

Reemplazando esta expresión para y en la ecuación (1), tenemos

$$(x + 50) + x = 60;$$

de donde, $2x + 50 = 60$,

$$2x = 10$$

Y finalmente, $x = 5$.

Así, concluimos que el precio del cuaderno es 5 soles y consecuentemente, el precio del libro es 55 soles.

Con la segunda solución:

Se usa una variable para representar el precio del cuaderno. Digamos x.

Como el precio del libro es 50 soles más que el del cuaderno, el precio del libro será $x + 50$. Ahora, usando la información que por el cuaderno y el libro se paga 60 soles en total, se obtiene que

$$x + (x + 50) = 60,$$

de donde, $2x + 50 = 60$, $2x = 10$, $x = 5$

y así, se obtiene que el precio del cuaderno es 5 soles y, consecuentemente, el del libro es 55 soles.

Es una conjetura a verificar con estudios específicos, que la comprensión de las soluciones algebraicas de los problemas que conlleven ecuaciones de primer grado, será mayor en los estudiantes, si previamente han tenido experiencias de resolverlos usando segmentos de recta, con el enfoque que hemos ilustrado. En esta línea están las propuestas en la metodología Singapur.

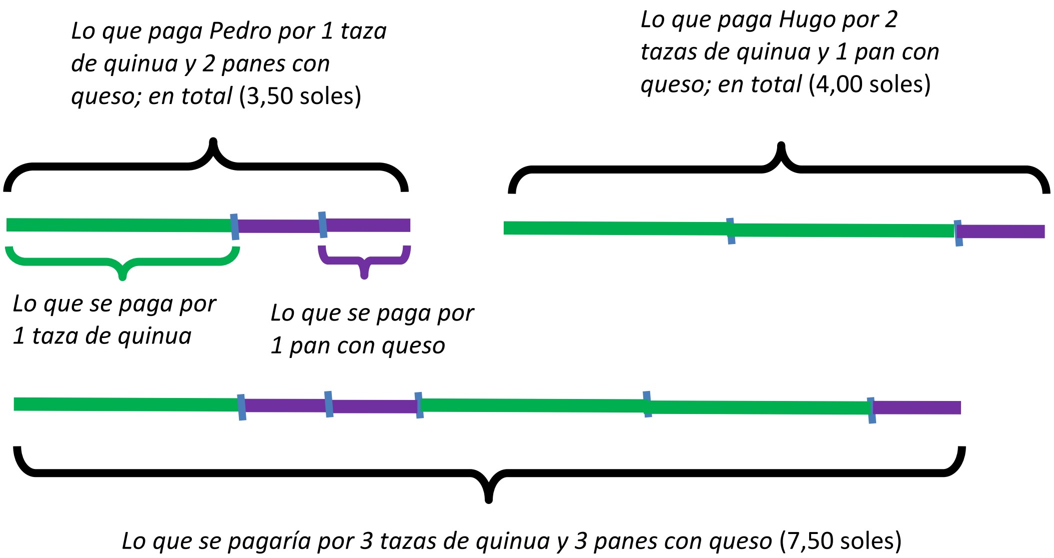
Experiencia con profesores de secundaria

Ante la invitación que recibí de la Unidad de Gestión Educativa Local de Utcubamba (región Amazonas del Perú) para una vídeo-conferencia sobre creación y resolución de problemas a profesores de matemática de secundaria, pedí que me enviaran algunos problemas que ellos suelen usar en su región, en sus clases de matemática, para considerar alguno de ellos, en la video-conferencia, como problema inicial en la forma de creación de problemas por *variación*. En esta forma de crear problemas, el nuevo problema se obtiene haciendo modificaciones a un problema inicial conocido (Malaspina, 2017, 2018). Para ello, es fundamental resolver el problema dado y luego, preferentemente, teniendo en cuenta el nivel académico en el que se aplicaría, crear un problema que ayude a comprender y resolver el problema inicial (al que llamamos un problema *pre*, respecto al inicial), o crear un problema más desafiante que el problema inicial (al que llamamos un problema *pos*, respecto al problema inicial).

Entre los problemas que me enviaron, seleccioné el siguiente, para considerarlo como problema inicial:

Problema 3. Pedro, Hugo y Olber son 3 estudiantes de la I.E. San Pablo, que toman desayuno en el kiosco de su colegio. Pedro compra una taza de quinua con 2 panes con queso y paga 3,50 soles. Hugo compra 2 tazas de quinua con un pan con queso y paga 4.00 soles ¿Cuánto pagará Olber si compra una taza de quinua con un pan con queso?

Ciertamente, un primer paso es resolver el problema y ante la experiencia anterior, usando apoyos visuales mediante segmentos de recta, expliqué la siguiente solución, previas aclaraciones similares a las hechas para el Problema 2 de este artículo; siempre, buscando interacción con los participantes, lo cual se lograba, por el gran interés de ellos.



En la última representación, vemos que el segmento de longitud 7,5 es la unión de 3 segmentos verdes y 3 segmentos púrpura. Como cada uno representa el precio de 1 taza de quinua y el precio de 1 pan con queso, respectivamente, vemos que 1 taza de quinua y 1 pan con queso se repite 3 veces. Por todo ello se paga 7,50 soles; en consecuencia, **por 1 taza de quinua y 1 pan con queso**, Olber pagaría la tercera parte; o sea **2,50 soles**, y así queda respondida la pregunta en el requerimiento del problema.

Para ilustrar la creación de problemas por variación, pensando en posibles problemas cuya solución ayude a comprender y resolver el problema dado (o sea en problemas *pre*, respecto al problema 3) para estudiantes que se están iniciando en la solución de este tipo de problemas, con este enfoque de representaciones mediante segmentos, sugerí los siguientes:

Problema 4. (*Problema Pre 1*) Pedro, Hugo y Olber son 3 estudiantes de la I.E. San Pablo, que toman desayuno en el kiosco de su colegio. Pedro compra una taza de quinua con 2 panes con queso y paga 3,50 soles. Hugo compra 2 tazas de quinua con un pan con queso y paga 4,00 soles ¿Cuánto pagará Olber si compra 3 tazas de quinua y 3 panes con queso?

Es claro que, en este caso, lo único que se ha modificado es el requerimiento del problema 3, con la intención de que el estudiante perciba que lo que se le está pidiendo obtener es justamente la suma de lo que han pagado Pedro y Hugo, pues ellos en total han comprado 3 tazas de quinua y 3 panes con queso. Percibir esto resulta importante para resolver el problema 3, en donde el requerimiento es sobre el precio de 1 taza de quinua y 1 pan con queso.

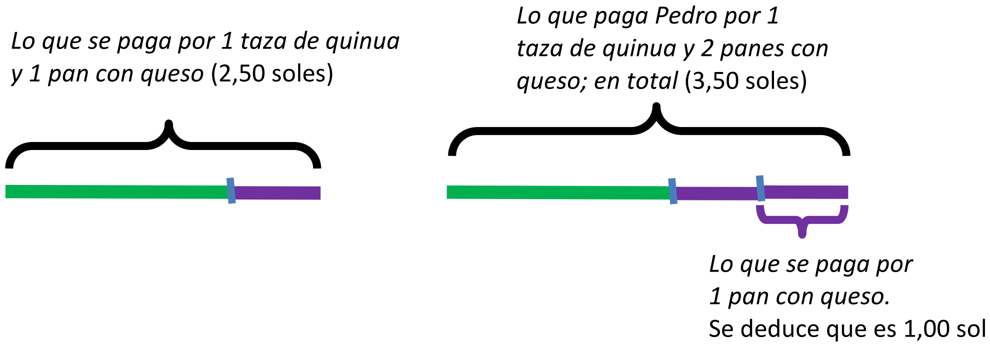
Problema 5 (*Problema Pre 2*) Para entrar a un estadio. a ver un partido de fútbol, por 2 adultos y 3 niños menores de 12 años, se paga 60 soles; y por 3 adultos y 2 niños menores de 12 años se paga 80 soles. ¿Es verdad que por 5 adultos y 5 niños menores de 12 años se debe pagar 150 soles?

En este caso, se ha cambiado la información del ¨Problema 3, se mantiene el carácter extra matemático del contexto, pero en una situación diferente, y el requerimiento también es diferente, aunque con la misma idea de ayudar al estudiante a percibir la importancia de sumar adecuadamente, considerando globalmente la información dada. Otra mirada a este problema es concluir que si por 5 adultos y 5 niños menores de 12 años se pagara 150 soles, por 1 adulto y un niño menor de 12 años se pagaría la quinta parte; o sea 30 soles, y esto lleva a contradicciones en las representaciones que se hagan, con segmentos, de la información que se da en el problema. (¡Anímese a hacerlo, estimado lector!)

Pensando en posibles problemas más desafiantes que el problema dado (o sea en problemas pos, respecto al Problema 3), siempre, para estudiantes que se están iniciando en la solución de este tipo de problemas y con este enfoque de representaciones mediante segmentos, sugerí los siguientes:

Problema 6 (*Problema Pos 1*) Pedro, Hugo y Olber son 3 estudiantes de la I.E. San Pablo, que toman desayuno en el kiosco de su colegio. Pedro compra una taza de quinua con 2 panes con queso y paga 3,50 soles. Hugo compra 2 tazas de quinua con un pan con queso y paga 4.00 soles. ¿Cuánto se debe pagar por una taza de quinua?, ¿Cuánto se debe pagar por un pan con queso?

En este problema, solo cambia el requerimiento, en relación al Problema 3. Ciertamente, responder a este requerimiento demanda avanzar más respecto a lo obtenido al resolver el Problema 3. Una idea es utilizar esa respuesta (que por una taza de quinua y un pan con queso se paga 2,50 soles) para reemplazarla en la información dada, por ejemplo, en la compra de Pedro.



Como un segmento verde y un segmento púrpura representan 2,50 soles, en la representación de la derecha queda claro que el segmento púrpura individualizado representa 1,00 sol, pues así se completa el total de 3,50 soles que paga Pedro. Con este resultado, se deduce que por 1 taza de quinua se paga 1,50 soles.

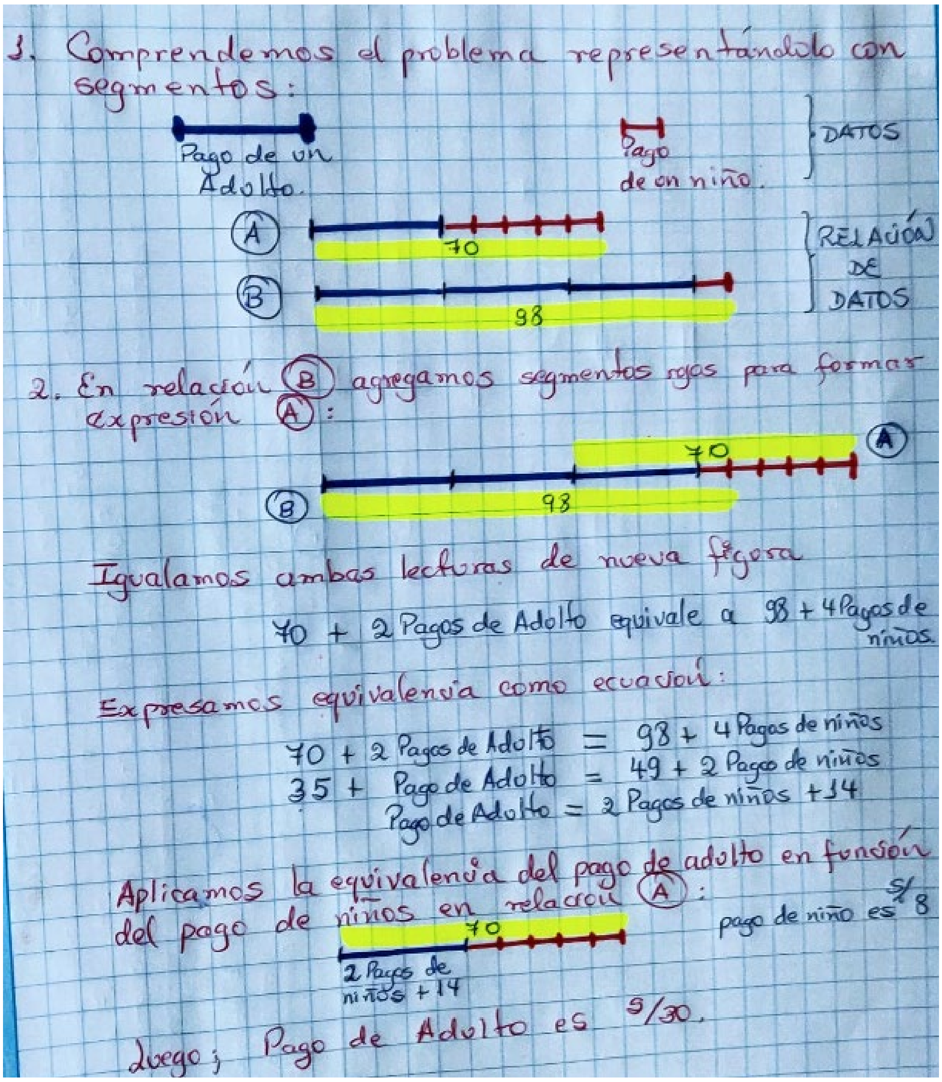
Y el siguiente problema es el que figura al inicio de este artículo:

Problema 7 (*Problema Pos* 2) Para entrar a ver un partido de fútbol, por 1 adulto y 5 niños menores de 12 años, se paga 70 soles; y por 3 adultos y 1 niño menor de 12 años se paga 98 soles. ¿Cuánto se debe pagar por un adulto solo?

En relación al Problema 3, se mantiene el contexto extra matemático, pero con una situación diferente; en consecuencia, se ha cambiado la información y el requerimiento; más aún, el total de adultos considerados no es el mismo que el total de niños considerados, como ocurre en el Problema 3, con el total de tazas de quinua y el total de panes con queso, lo cual no permite obtener de manera sencilla el pago total por 1 adulto y 1 niño. Por las limitaciones de tiempo, no pude recoger propuestas de los participantes para resolver este problema usando los apoyos visuales con segmentos, pero di algunas sugerencias, a partir de la solución que yo había desarrollado previamente, y manifesté mi deseo de recibir soluciones en esta línea de trabajo, sin recurrir directamente al enfoque algebraico.

Fue muy satisfactorio recibir la solución que me envió, de Utcubamba, la profesora Yanina Condo Llerena, en la que se percibe el uso de la representación, mediante segmentos de recta, de la información dada, y luego un manejo interesante de este tipo de representación. Añade 4 segmentos, que representan el pago por la entrada de un niño, a la representación del pago de los 98 soles y ahí hace dos lecturas de la misma representación, usando las representaciones iniciales de los pagos. Tales lecturas la llevan a expresar el pago de la entrada de un adulto como una suma de 14 con el equivalente a 2 entradas de niños. Luego, por reemplazo, obtiene los valores requeridos en el problema.

A continuación, copio la solución enviada.



Comentarios finales

1. Como lo manifesté al comentar la experiencia didáctica con profesores de primaria, considero también que la comprensión de las soluciones algebraicas de los problemas que conlleven sistemas de ecuaciones de primer grado, será mayor en los estudiantes, si previamente han tenido experiencias de resolverlos usando representaciones de la información mediante segmentos de recta. Estas contribuirán a una mejor comprensión de los métodos en los que se usa la “suma miembro a miembro en las ecuaciones” y las sustituciones. Ciertamente, son conjeturas a estudiar con más detenimiento, pero se tienen ya bases suficientes para usar otro registro de representación y no restringirse a la representación puramente simbólico-algebraica.

2. Una tarea interesante, en el marco del desarrollo de competencias didáctico-matemáticas de los profesores, es explicitar las interrelaciones que hay entre las soluciones de los problemas 3 a 7, usando las representaciones mostradas, y las habituales soluciones simbólicas,

algebraicas. Ciertamente, también es una ocasión para hacer esto con otros problemas creados, que conlleven sistemas de ecuaciones lineales.

3. La participación entusiasta manifestada por los profesores participantes en ambas experiencias didácticas a distancia, son una muestra de su interés por seguir aprendiendo, aún en condiciones tan difíciles como las que vivimos en la actual crisis generada por la COVID 19, y estimulan más el compromiso de matemáticos, educadores e investigadores de contribuir al fortalecimiento de las competencias didáctico-matemáticas de los profesores.

Referencias

Malaspina, U. (2018). ¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, No. 52*, pp. 307-313 http://www.fisem.org/www/union/revistas/2018/52/52_problema.pdf

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf