UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-23

Una propuesta multirregistro para la enseñanza de los números irracionales

Diana Marcela Lourido Guerrero, Teresa Pontón Ladino

Fecha de recepción: 26/08/2020
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen	Este estudio tuvo como propósito, identificar, analizar y describir los procesos de articulación de distintos registros de representación semiótica en una propuesta de enseñanza alrededor de la aproximación racional de números irracionales algebraicos. El diseño metodológico tomó como referencia elementos de la *ingeniería didáctica* en la concepción y análisis de la propuesta de enseñanza. Las variables didácticas que definieron el diseño, surgen de la revisión minuciosa de investigaciones en el campo de la educación matemática alrededor de los irracionales, así como del análisis de los elementos de la perspectiva semiótico-cognitiva. Se encontró que la coordinación en una propuesta de enseñanza de los registros numéricos y simbólicos con los registros unidimensional y cartesiano permite a los estudiantes construir razonamientos frente a la diferencia entre el valor exacto y el valor redondeado de un número, siendo esto último, condición necesaria para discriminar la diferencia entre números racionales e irracionales. **Palabras clave**: pensamiento numérico, números irracionales, sistema de numeración decimal, registros de representación semiótica.
Abstract	The purpose of this study was to identify, analyze and describe the articulation processes of different semiotic representation registers in a teaching proposal around the rational approximation of algebraic irrational numbers. The methodological design took as reference elements of didactic engineering in the conception and analysis of the teaching proposal. The didactic variables that defined the design arise from the meticulous review of research in the field of mathematics education around irrationals, as well as from the analysis of the elements of the semiotic-cognitive perspective. It was found that the coordination in a teaching proposal of the numeric and symbolic registers with the one-dimensional and Cartesian registers allows students to construct reasoning against the difference between the exact value and the rounded value of a number, the latter being a necessary condition to discriminate the difference between rational and irrational numbers. **Keywords**: number thinking, irrational numbers, decimal number system, registers of semiotic representation.
Resumo	O objetivo deste estudo foi identificar, analisar e descrever os processos de articulação de diferentes registros de representação semiótica em uma proposta de ensino em torno da aproximação racional de números irracionais algébricos. O desenho metodológico tomou como referência

elementos da engenharia didática na concepção e análise da proposta de ensino. As variáveis didáticas que definiram o design surgem da revisão meticulosa de pesquisas no campo da educação matemática em torno dos irracionais, bem como da análise dos elementos da perspectiva semiótico-cognitiva. Verificou-se que a coordenação em uma proposta de ensino dos registros numéricos e simbólicos com os registros unidimensionais e cartesianos permite aos alunos construir raciocínios contra a diferença entre o valor exato e o arredondado de um número, sendo este último uma condição necessária. para discriminar a diferença entre números racionais e irracionais.
Palavras-chave: pensamento numérico, números irracionais, sistema de numeração decimal, registros de representação semiótica.

1. Introducción

Aceptar que el reto de la enseñanza en la educación básica y secundaria consiste en brindar a los estudiantes los medios para comprender por sí mismos, implica pensar en aproximaciones a la educación que centren la mirada en el desarrollo de las capacidades de pensamiento de los sujetos. En este sentido, la perspectiva de la semiótica-cognitiva centra el interés de indagación más que en la apropiación de conceptos, en asistir a los estudiantes en la construcción de la autonomía intelectual a partir del desarrollo y capacidades de razonamiento, análisis y visualización. Por ejemplo, en la búsqueda por entender las dificultades asociadas a la comprensión de las matemáticas, el enfoque semiótico-cognitivo tiene como rasgo característico, determinar inicialmente el funcionamiento subyacente a los procesos matemáticos (Duval, 2016).

En el caso particular de la enseñanza de las matemáticas, pretender acercarse a cumplir el reto así descrito, implica aceptar como parte constitutiva de la naturaleza de esta ciencia, su aporte en términos de herramientas y procesos que permiten comprender situaciones por dentro y por fuera de ellas Niss (1997).

En consecuencia, cuando se quiere abordar el componente numérico, eje transversal en la educación matemática, estas reflexiones resultan fundamentales. Obando (2015) reconoce que el estudio de lo numérico implica un campo de problemas tan amplio, que incluso tiene que ver con el proceso humano de comprender el mundo, dicho de otra manera, el trabajo con sistemas numéricos puede impactar el desarrollo cognitivo de los estudiantes, a partir de los métodos que aporta para atender los aspectos cualitativos y cuantitativos del entorno.

Existen diferentes aproximaciones frente la investigación en el desarrollo del pensamiento numérico (Véase Konic, 2011; Reina & Wilhelmi, 2012; Romero, 1995; Romero & Rico, 1999). Estas por lo general, se enfocan en mostrar los contenidos asociados a la enseñanza de los sistemas numéricos y dan cuenta de cómo introducirlos a partir de las complejidades estructurales que estos vinculan. Si bien en estos trabajos se indaga sobre la apropiación del objeto matemático, éstos solo se quedan en la interpretación del concepto per se, descuidando el desarrollo de procesos de razonamiento numéricos (Duval, 1999).

Alrededor de la enseñanza de los irracionales, es notable la presencia de investigaciones focalizadas en el análisis de la correspondencia entre el desarrollo histórico de la noción de irracional y la aceptación por parte de los estudiantes de la existencia de estos números (Calderón, 2014; García, 2017; Reina & Wilhelmi, 2012; Sánchez & Valdivé F., 2011). En estas se aborda la red de conceptos matemáticos vinculados al tratamiento en la escolaridad de la irracionalidad, a partir de la noción de inconmensurabilidad. En consecuencia, el acercamiento a los problemas asociados a la comprensión de los números irracionales, se da a partir del análisis de las complejidades particulares de los contenidos a enseñar.

Otras investigaciones centran la mirada en el papel que juegan las representaciones en el aprendizaje de los números irracionales, cuyos resultados dejan ver que los estudiantes, incluidos los universitarios, tienen problemas para distinguir un número irracional de uno racional, dificultad que se relaciona con las comprensiones acerca de la expresión decimal de los irracionales (Sirotic & Zazkis, 2007; Zazkis & Sirotic, 2010). Desde luego, dichas dificultades se pueden comprender desde la perspectiva de Brousseau (2007) como obstáculos epistemológicos que arrastra la construcción de los decimales tanto racionales como irracionales.

En este estudio se asume el reto de considerar la enseñanza de los números irracionales a partir de la complejidad no solo de la construcción de los saberes, sino de los *modos de* funcionamiento cognitivo (Duval, 1999). De ahí que, se diseñen actividades de aprendizaje que buscan direccionar la construcción de razonamientos por parte de los estudiantes. Con lo cual se considera que la comprensión tiene como condición absolutamente necesaria, una enseñanza explicita de los distintos registros de representación, en los cuales se movilizan los objetos matemáticos, por ejemplo, aquellos asociados a los irracionales.

En el caso de las dificultades inherentes al aprendizaje de los números irracionales Adjiage (1999) las ubica como obstáculos epistemológicos, producto de la construcción hecha de los números racionales y reconoce al menos cinco de ellos. Tal identificación se realiza en términos del funcionamiento cognitivo asociado a los registros de representación semiótica movilizados en el aprendizaje de los sistemas numéricos.

- Aceptar que los números pueden funcionar como operadores y como medida.
- Reconocer la propiedad de la *densidad* en los números racionales como una posibilidad de realizar intercalaciones recursivas, de manera tal que se llegue a aproximaciones tan finas como se desee.
- Renunciar a la posibilidad de expresar eficazmente todos los números mediante una escritura posicional cifrada (*Sistema de Numeración Decimal*)
- Confusión entre valores exactos y valores redondeados de un número, expresado en el uso de *igualdades abusivas* ($3{,}14 = \pi$)

- Indicar la infinitud de las cifras no enteras de algunas representaciones numéricas.

El primer obstáculo hace referencia al significado de los números en relación con sus representaciones, es necesario entonces un trabajo específico sobre las representaciones semióticas de manera que los estudiantes no confundan el número como objeto matemático con su representación. Con relación a la *densidad*, se requiere pensar en situaciones que, relacionadas con los números racionales, le permitan al estudiante ver en esta propiedad, la posibilidad de acercarse tanto como se quiera a un número dado sea un número racional o irracional. El obstáculo asociado a la escritura decimal (propias del sistema semiótico de numeración decimal) tiene que ver con el hecho que, este sistema es solamente uno de los distintos registros disponibles para dar cuenta de los números racionales o irracionales. Los dos últimos obstáculos, se asocian con las expresiones decimales infinitas y la posibilidad de aproximarlas, como fuente de confusión para los estudiantes en relación al redondeo, en particular la posibilidad de escribir tantos decimales cómo se quiera cuando la expresión decimal es infinita.

El análisis de estos obstáculos, evidencia la necesidad de privilegiar un acercamiento a los números irracionales desde la articulación de distintos registros de representación semiótica, en el mismo sentido que existen propuestas multirregistro para la enseñanza de los números racionales tales como la de García (2016) y Pontón (2008).

Se habla de propuestas multirregistros al asumir que el aprendizaje de las matemáticas tiene la particularidad de movilizar actividades cognitivas como el razonamiento y la visualización. En virtud de la utilización de registros de representación como la lengua natural, las notaciones simbólicas y algebraicas, los variados sistemas de escritura para los números y los gráficos cartesianos. Cabe destacar que, desde esta perspectiva se denominan operaciones cognitivas como tratamiento y conversión a los procedimientos que ocurren al interior (tratamiento) y entre los registros movilizados (conversión) (Duval, 1999).

De acuerdo con lo anterior, en el desarrollo de este estudio, se centró la atención en el análisis de la necesaria articulación de los distintos registros de representación semiótica, en la enseñanza de los números irracionales algebraicos con énfasis en la propiedad de la densidad.

Estos presupuestos permiten formular el siguiente interrogante de investigación:

¿Cuáles registros de representación semiótica es posible articular en el diseño de una propuesta de enseñanza que promueva en los estudiantes una comprensión a la aproximación racional de números irracionales algebraicos?

2. Marco teórico

De acuerdo con Duval (2006), el modo de acceso a los objetos matemáticos, a diferencia de los objetos de otros campos de conocimiento científico o contextos cotidianos, nunca puede ser directo mediante la percepción u otro sentido, o desde la utilización instrumental, sino necesariamente semiótico.

> La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: la lengua natural, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar **significaciones** diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro (Duval, 2017, p. 59) [Negrita en el original].

El autor hace énfasis en la operación cognitiva de conversión porque busca comprender el papel de las *semiosis* en el funcionamiento del pensamiento y en el desarrollo de los conocimientos a partir del recurso a la variedad de los tipos de signos que pueden ser utilizados. En este sentido, al considerar la diversidad de los tipos de signos como recurso fundamental de la semiosis, se evidencian las relaciones posibles entre los diferentes sistemas semióticos y la posibilidad de convertir una representación formada en un sistema de representación en otro sistema.

Por otro lado, considerar los sistemas productores de representaciones semióticas tales como la escritura algebraica y los gráficos cartesianos resulta pertinente cuando se considera un acercamiento a los números irracionales algebraicos, pues las significaciones diferentes a las que alude Duval (2017), tienen que ver con la descripción cualitativa y cuantitativa de figuras-forma que puede hacerse en virtud del funcionamiento del registro cartesiano. Por ejemplo, cuando se asocia un número a la distancia entre un par de puntos o cuando se describen las coordenadas de un punto interesante de la curva (puntos de corte con los ejes). A continuación, se presenta en la *Tabla 1* un análisis a partir de los elementos teóricos de la perspectiva semiótica-cognitiva aspectos vinculados con la enseñanza de los números irracionales.

		OPERACIONES COGNITIVAS		
		Formación	**Transformación**	**Objetivación**
REGISTROS SEMIÓTICOS	**Numérico decimal**	Las marcas corresponden a los dígitos que se organizan a partir del valor posicional. El infinito se marca con puntos suspensivos	Al interior del registro *el redondeo*, aparece como un tratamiento en un solo sentido y funciona respetando las reglas del valor posicional.	Significante operatorio de un número irracional.
	Numérico fraccionario	La escritura en fracción continua se da a partir de infinitas sumas parciales en el denominador. El infinito se marca con puntos suspensivos	Posibilita la conversión al registro numérico decimal al permitir que se pueda escoger una suma parcial y con esto se obtiene un valor aproximado del número irracional.	Aritmetización de los procesos infinitos.
	Algebraico	Números y letras que representan variables, que se combinan mediante los símbolos +, -, ^, * indicando operatividad	Permite encontrar expresiones equivalentes al interior del mismo registro (tratamiento) mediante factorizaciones y descomposiciones.	Continuo numérico. Análisis de las funciones de valor real.

	Las unidades significantes de la representación algebraica se constituyen en variables categoriales que permiten describir en el *registro cartesiano* características de las figuras-forma	Raíces de una ecuación

Tabla 1. Análisis de las operaciones cognitivas promovidas por registros semióticos asociados a la aprehensión de los números irracionales. Fuente: Elaboración propia.

Otro aspecto interesante que conviene señalar es que de acuerdo con Adjiage (1999; 2007) los *truncamientos* y *el redondeo* principales tratamientos del sistema de numeración decimal resultan de la conversión asociada a las dilataciones o variaciones sobre la *escala* de una línea graduada (*registro unidimensional*). Con lo cual la asociación punto-número resulta de procedimientos finitos en el sentido expresado por Coriat y Scaglia (2000).

En últimas, lo que se quiere establecer es que la escritura de los números, según el significante operatorio al cual se quiera se hacer referencia, dependen sobre todo de las posibilidades de los sistemas en el cual estos números se representan, no tanto del número mismo.

3. Diseño Metodológico

Al considerar las particularidades que implica un proyecto centrado en la enseñanza se requirió tomar algunos elementos de *la ingeniería didáctica* asociados a las fases expuestas por Artigue et al. (1995), metodología ampliamente usada en la investigación en educación matemática. Este acercamiento permitió en el ejercicio investigativo, establecer la ruta metodológica del diseño de la propuesta de enseñanza. De los *análisis preliminares* se tomó en consideración *la dimensión cognitiva y* la fase de *concepción y análisis a priori*.

De acuerdo con Artigue et al. (1995) en el análisis a priori “se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado” (p. 45). Por esta razón en este punto se describieron los razonamientos que se esperaban de los estudiantes en la solución de las tareas propuestas, intentando mostrar con esto que la aparición de tales razonamientos o comportamientos plausibles, es producto de la puesta en práctica de los conocimientos contemplados por la situación. En la construcción del análisis *a priori*, se determinaron variables de diseño orientadas a hipótesis sobre la funcionalidad cognitiva de los elementos que componen las situaciones y tareas. A partir del análisis de estudios anteriores y con base al marco teórico de referencia, se definieron cinco categorías para el diseño, las cuales permitieron establecer los criterios de funcionalidad cognitiva y el alcance disciplinar de la propuesta de enseñanza.

Categorías	Descripción de las variables asociadas
Aspectos disciplinares: Conceptos matemáticos	Sistema de numeración decimal Números racionales Propiedad de la densidad en Q y R Números irracionales algebraicos
Naturaleza de la recta numérica	Tratamientos sobre el registro unidimensional que permiten establecer la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado de un número real. Encajonamientos y completitud.

	Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad.
Entrada algebraica	Significados de los números irracionales que emergen del análisis cualitativo de relaciones y funciones.
Funcionalidad cognitiva	El rol que cumplen los procesos de transformación de representaciones en la comprensión de los estudiantes.
Coordinación de distintos registros de representación semiótica	Registros: unidimensional, numérico, simbólico algebraico, cartesiano y lengua natural.

Tabla 2. Categorías seleccionadas para el diseño de las situaciones.

4. Resultados

La propuesta de enseñanza diseñada permite a los estudiantes ir construyendo comprensiones acerca del *sistema de numeración decimal* (escritura posicional cifrada), *los números racionales, la propiedad de la densidad y los números irracionales*. Se espera que la construcción de las comprensiones mencionadas, surja como producto de la *funcionalidad cognitiva* asociada a la *coordinación de los registros numéricos y simbólicos, con los registros unidimensional y cartesiano*.

Situaciones	**Propósitos**	**Aspectos disciplinares**	**Tareas e ítems asociados**
S1: Identificando la escala y las características de la expresión decimal	Establecer la relación existente entre la escala de la recta y las características de las expresiones decimales de los números ubicados sobre ella	Sistema de numeración decimal Números racionales Propiedad de la densidad en Q Encajonamientos Conmensurabilidad	S1T1: 4 consignas S1T2: 3 consignas
S2: Dilatación sobre líneas rectas graduadas	Ampliar comprensiones acerca del SND al introducir encajonamientos sobre rectas cuya escala es una potencia de 10.		S2T1: 2 consignas S2T2: 2 consignas
S3: Distintas escalas y redondeo	Definir criterios para establecer el valor redondeado de un número	Propiedad de la densidad en Q	S3T1: 4 consignas
S4: Aproximaciones y relaciones	Reconocer que las aproximaciones racionales a los números irracionales emergen de tratamientos sobre registros numéricos y algebraicos	Números irracionales algebraicos Relaciones Inconmensurabilidad	S4T1: 2 consignas S4T2: 5 consignas S4T3: 4 consignas
S5: Aproximaciones y funciones	Reconocer que los números irracionales pueden describir características de funciones cuadráticas	Funciones Encajonamientos	S5T1: 2 consignas S5T2: 2 consignas S5T3: 3 consignas S5T4: 1 consignas

Tabla 3. Descripción de la propuesta de enseñanza

A continuación, se describen y analizan algunas de las tareas que componen la propuesta diseñada.

4.1. Situación 1: identificando la escala y las características de la expresión decimal

Consigna 1 de la tarea 1 (S1T1-1). Con esta actividad se tiene la intención que los estudiantes tomen consciencia del hecho, que una vez que se tiene la escala, puede encontrarse la distancia entre pares de puntos dados.

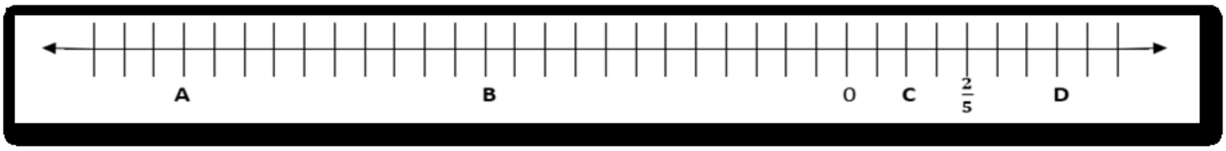


Figura 1 Recta graduada S1T1

Al analizar la recta (**Figura 1**), se observa que los segmentos que gradúan la línea recta determinan particiones congruentes, si cuatro de están particiones corresponden a $\frac{2}{5}$, la medida correspondiente a una partición se encuentra dividiendo $\frac{2}{5}$ entre 4. Con este resultado, se obtiene la escala determinada por las graduaciones ($\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$). Teniendo la medida de la escala, es posible establecer las distancias entre los puntos dados, aplicando una relación multiplicativa, $\frac{1}{10}$ veces las particiones que pueden contarse de un punto a otro.

Nótese que "$\frac{1}{10}$" tiene múltiples significados. Uno de ellos refiere a la longitud de un segmento; otro refiere al número asociado a un punto; el último, refiere a lo que acá se denomina "escala".

Se ilustra el procedimiento en la

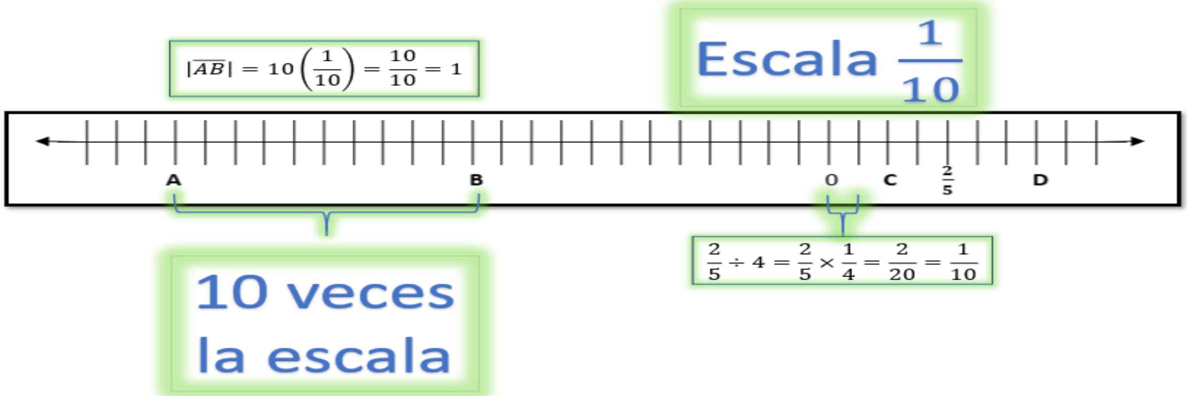


Figura 2.

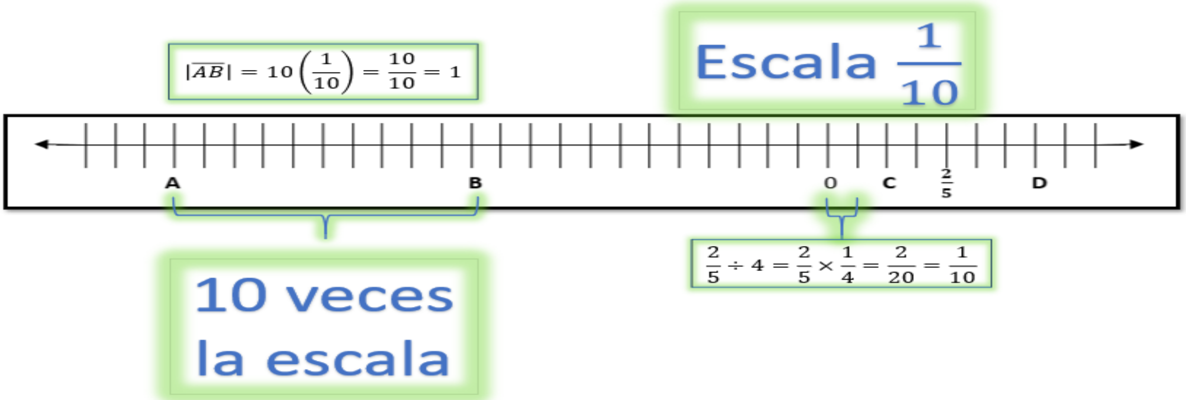


Figura 2 Procedimiento S1T1-1

Conviene señalar que los estudiantes pueden elegir representaciones numéricas decimales para realizar los tratamientos aquí mencionados, debido a la finitud de tales representaciones decimales, la exactitud de los resultados sería equivalente.

Consigna 3 tarea 1 (S1T1-3). Con el desarrollo de esta actividad se hace énfasis en la necesidad de encontrar equivalencias, con el fin de establecer las representaciones numéricas que pueden ubicarse de manera exacta sobre las graduaciones de la recta (Consigna 1 **de la tarea 1 (S1T1-1).** Con esta actividad se tiene la intención que los estudiantes tomen consciencia del hecho, que una vez que se tiene la escala, puede encontrarse la distancia entre pares de puntos dados.

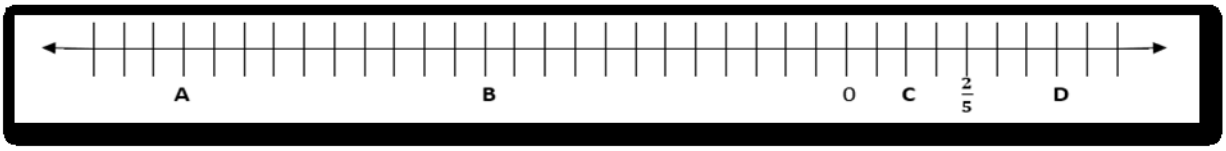


Figura 1 Recta graduada S1T1

Al analizar la recta (**Figura 1**), se observa que los segmentos que gradúan la línea recta determinan particiones congruentes, si cuatro de están particiones corresponden a $\frac{2}{5}$, la medida correspondiente a una partición se encuentra dividiendo $\frac{2}{5}$ entre 4. Con este resultado, se obtiene la escala determinada por las graduaciones ($\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$). Teniendo la medida de la escala, es posible establecer las distancias entre los puntos dados, aplicando una relación multiplicativa, $\frac{1}{10}$ veces las particiones que pueden contarse de un punto a otro.

Nótese que "$\frac{1}{10}$" tiene múltiples significados. Uno de ellos refiere a la longitud de un segmento; otro refiere al número asociado a un punto; el último, refiere a lo que acá se denomina "escala".

Se ilustra el procedimiento en la

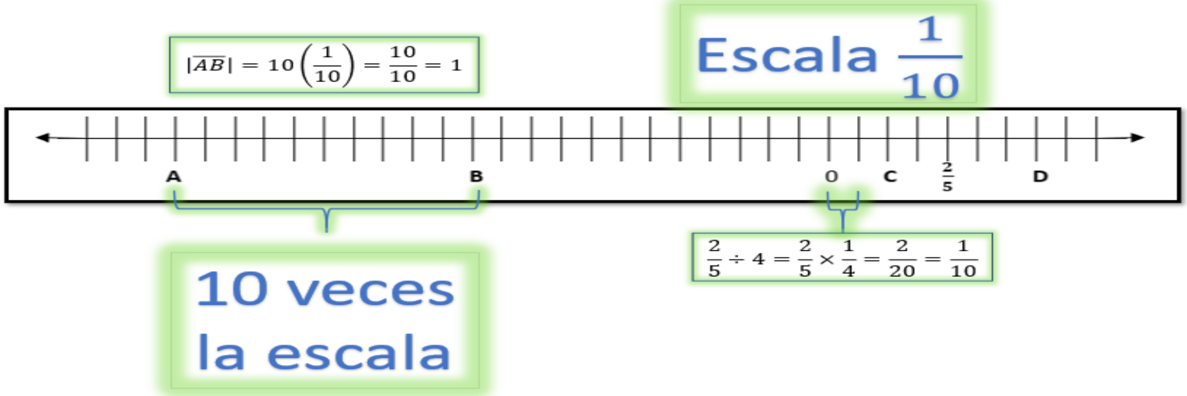


Figura 2.

), para ello se dan representaciones numéricas en distintos registros ($-2\frac{3}{5}$; *tres centésimas*; 0.20; $-2{,}3$ ...; $\sqrt{\frac{64}{100}}$; 6×10^{-4}; $\frac{6}{4}$).

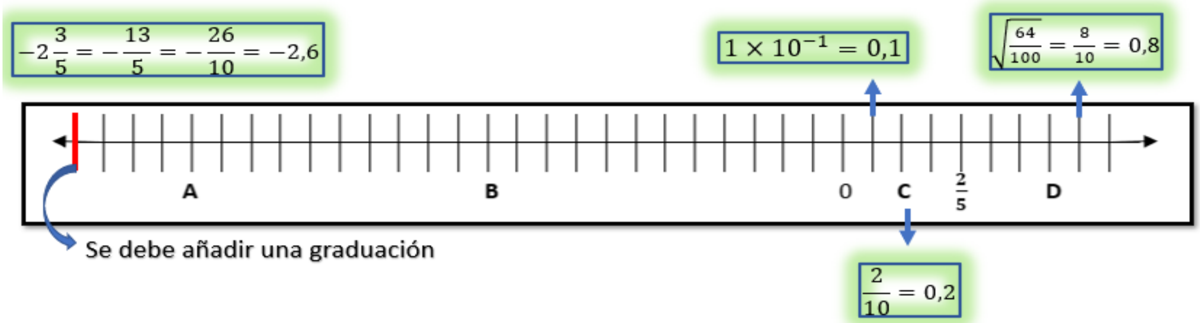


Figura 3. Equivalencias S1T1-3

Por ejemplo, $\sqrt{\frac{64}{100}}$ puede ubicarse de manera exacta sobre la recta porque al hacer el tratamiento numérico se encuentra una representación fraccionaria que coincide con la escala de la recta dada. No es el caso, de *tres centésimas* dado que su representación numérica decimal no corresponde a un número entero de veces de la escala.

Consigna 4 tarea 1 (S1T1-4). Esta actividad que cierra la tarea 1, busca que los estudiantes concluyan acerca de las características de las representaciones numéricas decimales de los puntos asociados a las graduaciones.

En este punto se espera que el estudiante haya comprendido que la escala de la recta depende tanto de las graduaciones sobre la recta, como de los puntos de referencia dados. Lo cual significa que las representaciones numéricas, encontradas a partir de una relación multiplicativa con la escala (número entero de veces la escala) tienen la misma forma que la representación numérica decimal de la escala o tienen la misma forma de los puntos de referencia.

Para el caso de la recta que nos ocupa (**Consigna 1 de la tarea 1 (S1T1-1).** Con esta actividad se tiene la intención que los estudiantes tomen consciencia del hecho, que una vez que se tiene la escala, puede encontrarse la distancia entre pares de puntos dados.

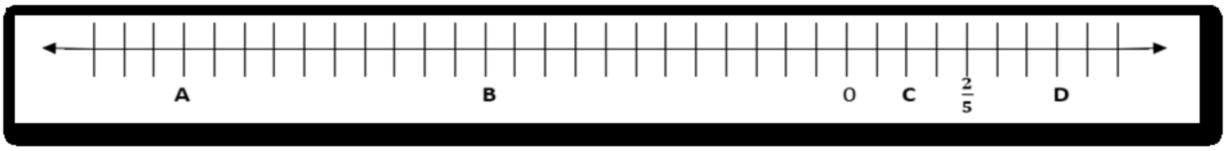


Figura 1 Recta graduada S1T1

Al analizar la recta (**Figura 1**), se observa que los segmentos que gradúan la línea recta determinan particiones congruentes, si cuatro de están particiones corresponden a $\frac{2}{5}$, la medida correspondiente a una partición se encuentra dividiendo $\frac{2}{5}$ entre 4. Con este resultado, se obtiene la escala determinada por las graduaciones ($\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$). Teniendo la medida de la escala, es posible establecer las distancias entre los puntos dados, aplicando una relación multiplicativa, $\frac{1}{10}$ veces las particiones que pueden contarse de un punto a otro.

Nótese que "$\frac{1}{10}$" tiene múltiples significados. Uno de ellos refiere a la longitud de un segmento; otro refiere al número asociado a un punto; el último, refiere a lo que acá se denomina "escala".

Se ilustra el procedimiento en la

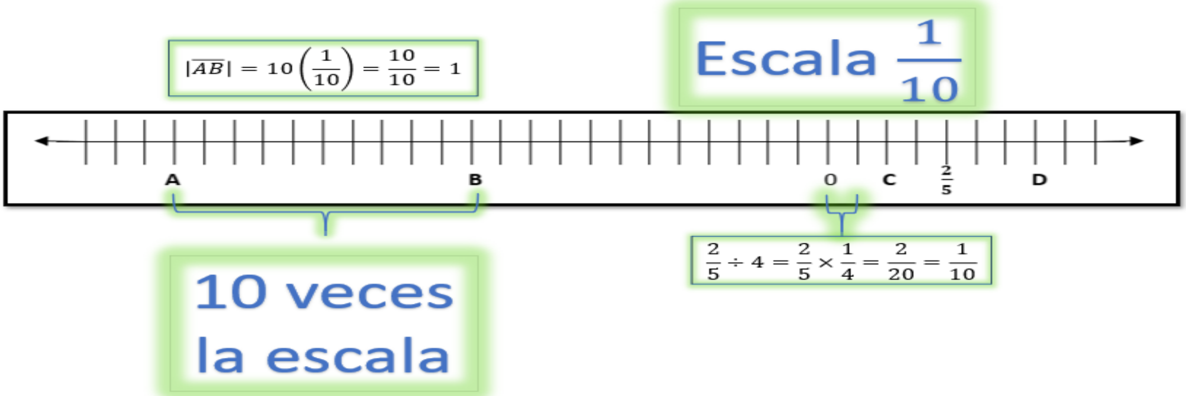


Figura 2.

) se espera que el estudiante pueda concluir que todas las representaciones numéricas ubicadas de manera exacta sobre las graduaciones son enteras (caso del 0 como punto de referencia) o tienen solo una cifra decimal no entera (caso de la escala 0,1).

Situación 1 tarea 2 (S1T2). Se aborda el estudio de las representaciones numéricas decimales infinitas y periódicas.

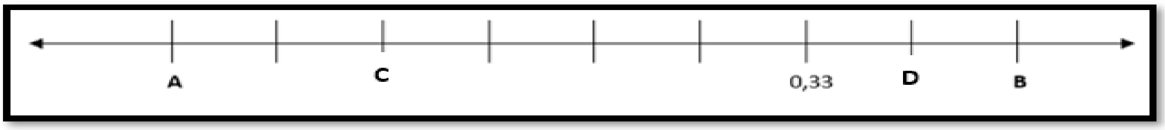
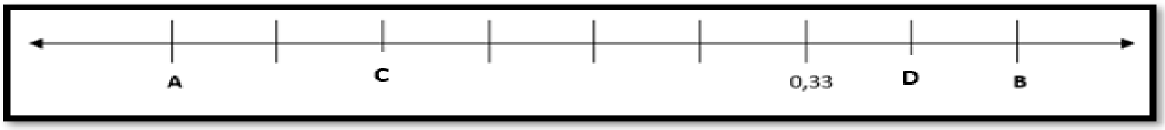


Figura 4. Recta graduada S1T2

Consignas 1, 2 y 3 tarea 1 (S1T2-1, S1T2-2, S1T2-3). En estas consignas se asigna -2 como el número que corresponde al punto A en la primera consigna se

solicita a encontrar la medida de la escala, en la segunda consigna se pide encontrar las representaciones numéricas fraccionarias y decimales de los *puntos B, C y D* de la recta



(***Figura* 3**) usando para ello la escala determinada. la tercera y última consigna de esta tarea tiene que ver con las conclusiones acerca de las características de las representaciones numéricas decimales de los números ubicados sobre las graduaciones de la recta.

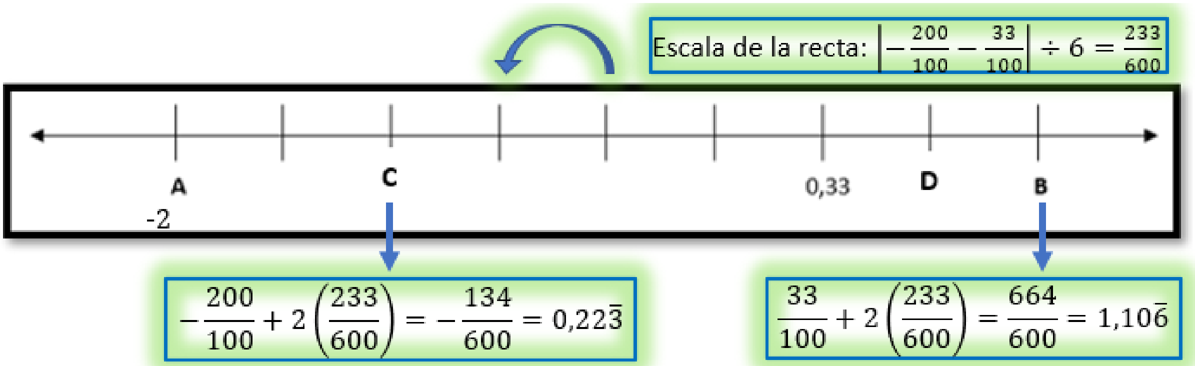


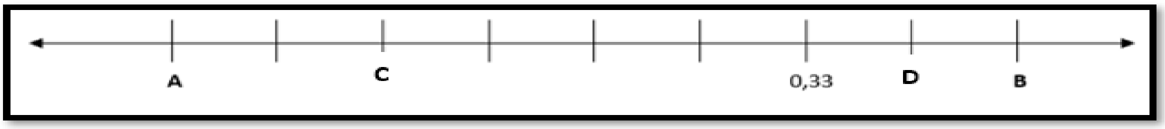
Figura 5. Procesos de homogenización S1T2

Dar respuesta a esta tarea, implica poner en juego procesos de homogenización, debido a que la medida de la escala resulta al dividir entre 6 (cantidad de particiones congruentes de un extremo a otro) el valor absoluto de la diferencia entre -2 y $0{,}33$. Como la representación numérica decimal de la medida

de esta escala ($\frac{233}{600}$) tiene infinitas cifras no enteras, se espera que los estudiantes

encuentren más pertinente realizar los tratamientos aritméticos con las representaciones numéricas fraccionarias para dar cuenta y razón de la segunda consigna. La ausencia del 0 como punto de referencia hace que los signos negativo o positivo de las representaciones numéricas surjan de los tratamientos aritméticos.

Todas las representaciones numéricas de los puntos indicados sobre la recta



(Figura) se encuentran adicionando o sustrayendo de alguno de los puntos de referencia $(-2 \; o \; 0{,}33)$, tantas veces la escala como particiones haya entre el punto de referencia y el punto del cual se desea encontrar su representación numérica. Tal es el caso de la representación numérica del punto B, que puede encontrarse adicionando a $0{,}33$ dos veces la medida de la escala

$\left(0{,}33 + 2\left(\frac{233}{600}\right) = \frac{33}{100} + \frac{167}{300} = \frac{266}{300} = 0{,}88\overline{6}\right)$.

En cuanto a las características de las representaciones decimales se puede afirmar que, solo son finitas las representaciones que corresponden a los puntos de referencia dados. Como se pudo evidenciar en la operación anterior, las demás representaciones numéricas son infinitas periódicas mixtas.

4.2. Situación 2: Dilatación sobre líneas rectas graduadas

Situación 2 tarea 1 (S2T2-1). En esta tarea se diseñaron dos consignas asociadas a la búsqueda de un número que está entre otro par de números. Se presentan tres rectas con particiones que definen graduaciones, visualmente similares, pero con escalas distintas.

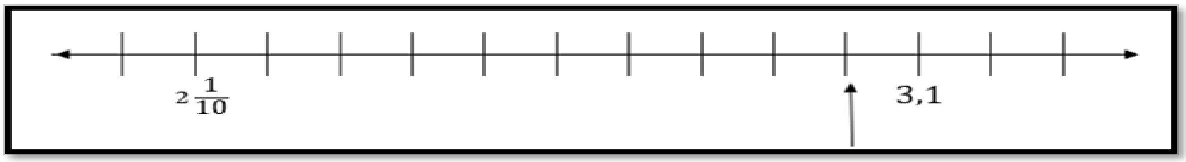


Figura 3

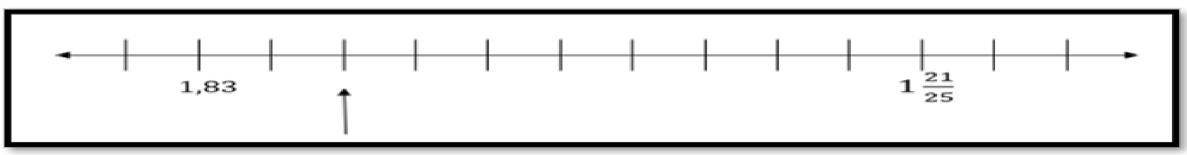


Figura 4

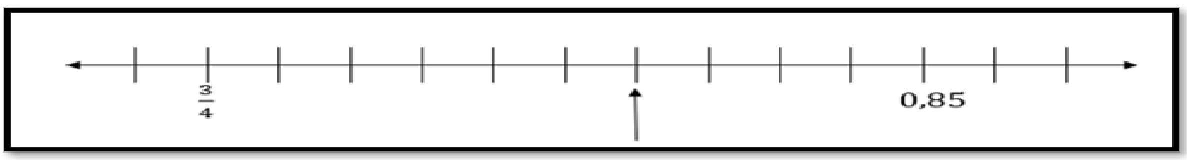


Figura 5

Figura 6. Rectas graduadas con distintas escalas (S2T1)

Se espera que, en el desarrollo de esta tarea, emerja la necesidad de encontrar las equivalencias que hacen homogéneas las representaciones numéricas de los extremos. Al igual que en la situación 1, las representaciones numéricas de los puntos indicados por flechas se pueden asignar adicionando o sustrayendo del extremo correspondiente, tantas veces la escala como particiones hay entre el extremo y el punto indicado por la flecha.

4.3. Situación 3: distintas escalas y redondeo

Esta situación pone en un primer plano la propiedad de la densidad de los números racionales, al presentarla como la posibilidad recursiva de hacer aproximaciones tan finas como se quiera de acuerdo a las escalas dadas o creando una nueva por subdivisión.

Figura 7. Dos escalas en una misma recta (S3T1)

Consigna 1 tarea 1 (S3T1-1). En esta consigna se espera que los estudiantes encuentren las representaciones numéricas correspondientes a los puntos A y B. El procedimiento para hacerlo, es el mismo que se aplicó en tareas anteriores. Sin embargo, encontrar la medida de la escala determinada por los puntos, supone que el estudiante sea capaz de reconocer que el segmento ($\overline{AB}$) cuyos extremos son los

puntos A y B es congruente el segmento que tiene como extremo inicial el punto correspondiente a 1 y extremo final el punto A; al igual que es congruente con el segmento cuyo extremo inicial es el punto B y su extremo final es el punto correspondiente al número 2.

Conviene señalar aquí, que el hecho de que no haya puntos sobredimensionados correspondientes a los números 1 y 2 dificulta la consigna en tanto se hace necesaria una discriminación visual que omita el "ruido" producido por la graduación en segmentos y además se establezca la congruencia entre las particiones definidas por los puntos.

Consignas 2 y 3 tarea 1 (S3T1-2, S3T1-3). En estas consignas se solicita encajonar a los puntos A y B respectivamente, entre el par de puntos más próximos

indicados por la graduación en segmentos.

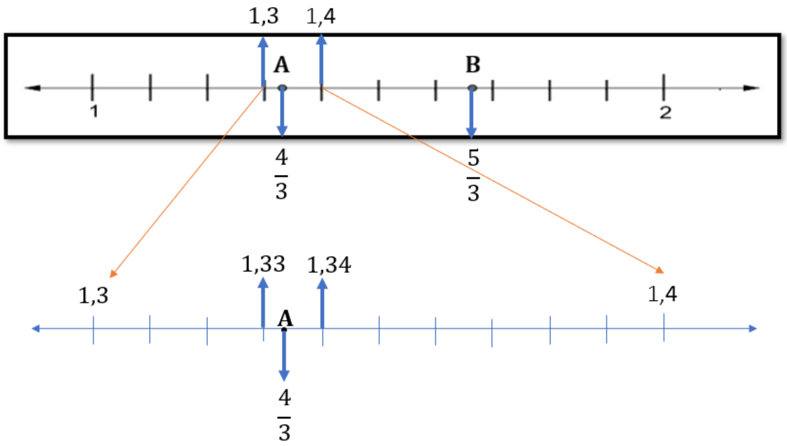


Figura 8. Tratamiento de dilatación para encajonar el punto A

Nótese que mediante este tratamiento se consigue una aproximación a las décimas de la expresión decimal correspondiente a $\frac{4}{3}$. Las consignas se orientaron a que los estudiantes produjeran este tipo de razonamientos para los puntos A y B con el fin de ir construyendo la idea de la diferencia entre el valor exacto y el valor redondeado de un número.

Debido a que la escala indicada por los segmentos es $0{,}1$, encajonar los puntos A y B de esta forma equivale a aproximar por exceso y por defecto, puntos cuya representación numérica decimal es infinita y periódica, saber $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$.

Consigna 4 tarea 1 (S3T1-4). En esta última consigna de la tarea 3 se solicita hacer un tratamiento de dilatación, subdividiendo la escala en diez partes de igual medida, con la intención de determinar si esta nueva graduación permite ubicar de manera exacta el punto B. Con esta subdivisión se puede obtener una aproximación por exceso y por defecto de la representación numérica del punto B en las centésimas tal encajonamiento exhibe que en esta nueva graduación de la recta el punto B no puede quedar ubicado de manera exacta.

4.4. Situación 4: aproximaciones y relaciones

En esta situación se agrupan tres tareas en las cuales se estudian de forma explícita representaciones numéricas que corresponden a números irracionales. Como su nombre lo indica el énfasis se da, en las aproximaciones racionales a los números irracionales que emergen de tratamientos en registros numéricos y algebraicos.

Situación 4 tarea 1 (S4T1). Esta tarea que se compone de dos consignas hace énfasis en tratamientos al interior de registros numéricos en la primera consigna se pone en consideración el funcionamiento del sistema de numeración decimal al mostrar el comportamiento de las cifras decimales no enteras de números irracionales. Mientras que, la segunda consigna centra la mirada en los razonamientos que permiten asociar representaciones numéricas de racionales e irracionales a puntos sobre la recta.

Consigna 1 tarea 1 (S4T1-1). En esta consigna se indica un tratamiento al interior del registro numérico que permite aproximar por exceso y por defecto al número $\sqrt{2}$, se pide usar el mismo tratamiento para encontrar un encajonamiento similar para los números $\sqrt{3}$ y $\sqrt{18}$.

	Encajonamiento ($\sqrt{2}$)
A menos de una décima	$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
A menos de una centésima	$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$
A menos de una milésima	$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$
A menos de una diezmilésima	$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$
A menos de una cienmilésima	$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$
…	…

Tabla 4. Encajonamiento a las cienmilésimas de $\sqrt{2}$

Este tratamiento numérico resulta de reconocer a $\sqrt{2}$ como la representación del número real positivo cuyo cuadrado es 2. Para encontrar las “unidades de orden inferior” que corresponden a las cifras no enteras de la representación numérica decimal, es necesario ir elevando al cuadrado el número redondeado (a las décimas, centésimas, etc.) para encontrar los extremos del intervalo que encajona a $\sqrt{2}$ respectivamente. Lo anterior se puede en evidenciar en la ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**4** el extremo inferior del encajonamiento a las milésimas tiene a 4 y no a 3 en su última cifra no entera, justamente porque al elevar al cuadrado $1{,}414$ se obtiene un número menor que $\sqrt{2}$ pero más cercano a este, que si se elevara al cuadrado $1{,}413$. Los puntos suspensivos al final de la tabla indican que este proceso de acotación numérica puede seguir desarrollándose desde las diferentes subunidades del sistema de numeración decimal, identificándose cada vez nuevas cifras no enteras en la representación numérica decimal y por tanto es una forma de hacer referencia a las infinitas cifras decimales que tiene la representación numérica de $\sqrt{2}$.

Situación 4 tarea 3 (S4T3). Esta tarea corresponde a la entrada algebraica de los números irracionales. Se compone de cuatro consignas que tienen la intención de asignar el significado de distancia entre puntos a los números irracionales. Continua el estudio del sistema de numeración decimal, al hacer referencia a medidas aproximadas y caracterizar la representación numérica decimal de un número irracional.

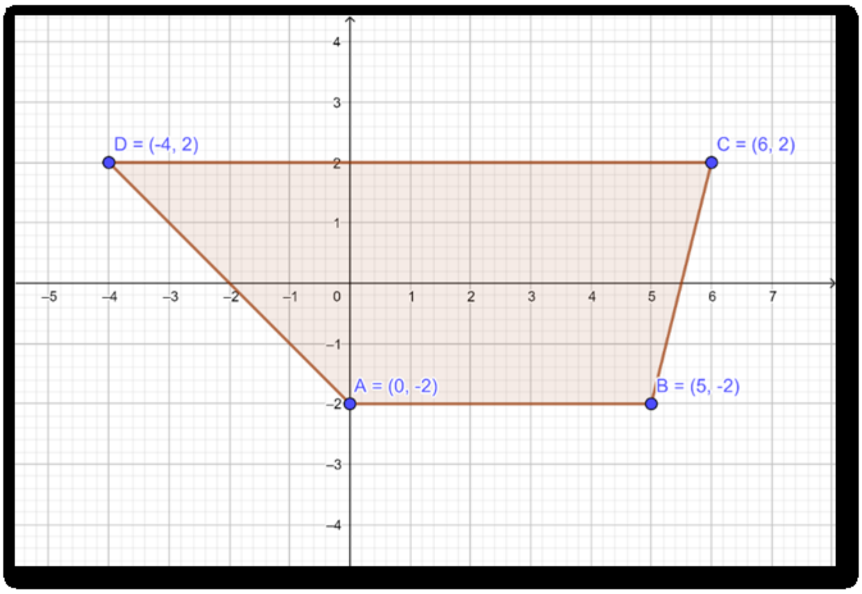


Figura 9. Trapecio ABCD correspondiente a S4T3

Destaca la figura-forma trapecio ABCD sobre el fondo cuadriculado. De acuerdo con el funcionamiento del registro cartesiano, las coordenadas de los puntos A, B, C y D, permiten hacer uso de tratamientos algorítmicos para encontrar la medida de la longitud de los lados del trapecio.

Consigna 2 tarea 3 (S4T3-2). Esta consigna permite indagar por la exactitud de las medidas encontradas correspondientes a los lados del trapecio $ABCD$. Las longitudes de los lados paralelos del trapecio tienen representaciones numéricas decimales enteras, debido a que la medida de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se puede expresar como una cantidad entera de veces de la escala del eje X (correspondiente a una unidad como se había establecido en la consigna anterior) por tanto, sus medidas son exactas.

La longitud de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ corresponden a números irracionales, como se podrá apreciar en la **Figura** .

$$d(A,D) = \sqrt{(0-(-4))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{2(16)} = \mathbf{4\sqrt{2} \approx 5,6}$$

$$d(B,C) = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \mathbf{\sqrt{17} \approx 4,1}$$

Figura 10. Tratamiento para encontrar las distancias S4T3-2

A partir de los análisis precedentes se podrá concluir que, la exactitud depende la representación numérica elegida para referirse a la medida de cada lado del trapecio y en consecuencia del perímetro del mismo.

4.5. Situación 5: aproximaciones y funciones

En esta situación que agrupa cuatro tareas, se aborda el significado de número irracional algebraico como abscisa de los puntos de corte con el eje X del grafo de una función cuadrática. En consecuencia, el énfasis se da en los tratamientos algebraicos, que permiten encontrar representaciones numéricas de las coordenadas de los puntos que describen características de las funciones cuadráticas.

Consigna 1 tarea 2 (S5T2-1). En esta consigna se pide encontrar la forma canónica de la representación simbólica algebraica correspondiente a tres funciones cuadráticas de las cuáles se dan las representaciones cartesianas además de la representación simbólica algebraica polinómica ($q(x) = x^2 - 7x + 12$, $r(x) = 6x^2 - 3x - 3$, $s(x) = 18x^2 - 9x - 2$).

Consigna 2 tarea 2 (S5T3-2). Aquí se piden las coordenadas de los puntos de corte con el eje x y se solicita establecer si las representaciones numéricas correspondientes a las abscisas de estos puntos de corte son aproximadas o exactas. Cabe anotar que todas las abscisas de estos puntos corte son números racionales.

Debido a que cuentan con la representación simbólica algebraica en su forma canónica, se espera que en la solución de este punto se dé un tratamiento de orden algebraico. Sin embargo, el acceso a las representaciones gráficas constituye un soporte que permite decidir cuándo es necesario emplearlo. Para ilustrar este aspecto a continuación se presenta los razonamientos esperados en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

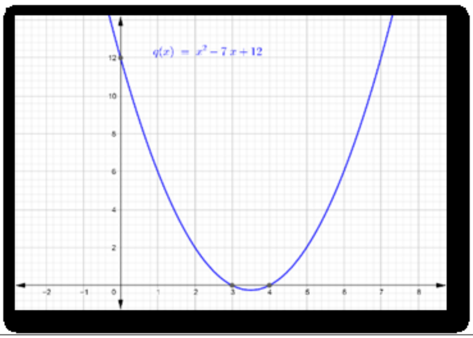
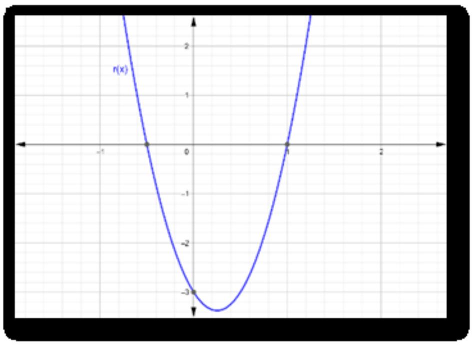
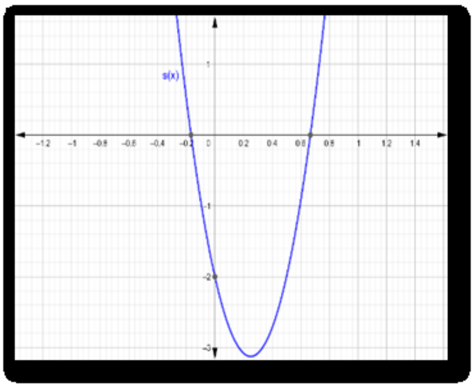
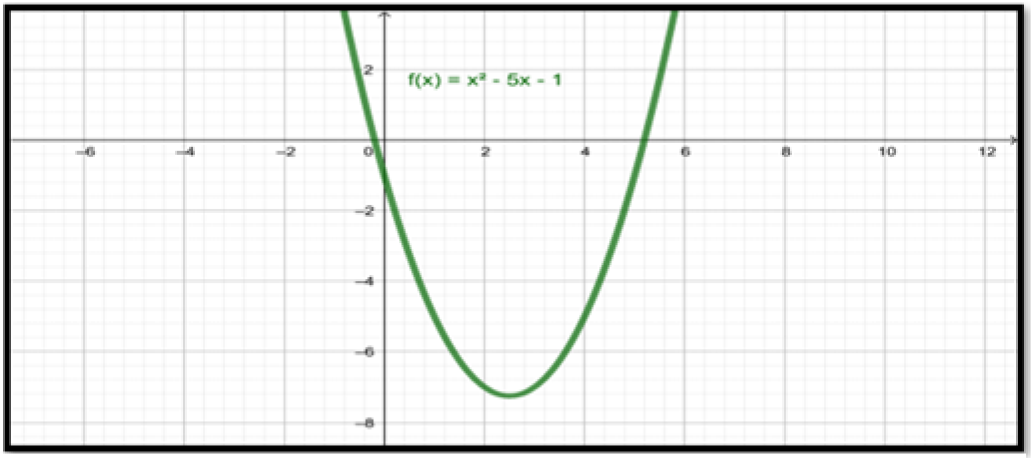
Grafo de la función cuadrática	Representación algebraica y razonamientos esperados
	Los puntos sobredimensionados del grafo de la figura-forma coinciden sobre el eje X de manera exacta sobre 3 y 4. En consecuencia se puede establecer que los puntos de corte de q son (3, 0) y (4, 0).
	Un punto sobredimensionado del grafo de la figura forma coincide con el eje X de manera exacta sobre 1. El otro punto sobredimensionado de la figura-forma que coincide con el eje X, divide al segmento unidad (ubicado a la izquierda de cero) en dos partes congruentes; con lo cual las coordenadas de los puntos de corte de r) son $(-\frac{1}{2}, 0)$ y (1,0).
	Cabe anotar que esta figura-fondo presenta una característica visual novedosa con respecto al resto. La graduación del eje X se designa mediante representaciones numéricas decimales con cifras no enteras. En consecuencia, invita a caracterizar como aproximada la representación numérica decimal correspondiente a la abscisa de ambos puntos corte. Tratamiento algebraico $s(x) = 18\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$ De $s(x) = 0$ se obtienen las abscisas de los puntos de corte: $x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{3}$

Tabla 5. Razonamientos correspondientes al ítem S5T3-2

Situación 5 tarea 3 (S5T3). Las tres consignas que componen esta tarea, se refieren al uso específico de tratamientos algebraicos, para encontrar los puntos de corte con el eje x de una función cuadrática de la cual se tiene su representación simbólica algebraica en forma canónica y su representación cartesiana. La particularidad en esta tarea es que las abscisas de los puntos cortes pedidos son números irracionales. En el caso de la abscisa positiva su significado se asocia al número de oro. Finaliza esta tarea con la solicitud de las características de la representación numérica decimal de las abscisas de los puntos de corte encontrados.

Conviene señalar que en las características de la figura-fondo no aparecen indicadores, distintos a la cuadricula, que inviten a pensar sobre la posibilidad de acercarse a un razonamiento visual para dar cuenta de la tarea.

Situación 5 Tarea 4. En la única consigna que compone esta tarea, se solicita encontrar la fracción continua de las raíces positivas de tres ecuaciones ($x^2 - 2x - 1 = 0$, $x^2 - 3x - 1 = 0$, $x^2 - 4x - 1 = 0$). También, se solicita, usar la fracción encontrada para establecer una aproximación de la raíz correspondiente, teniendo en cuenta hasta el tercer nivel de la fracción continua.



$$x = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 \dots}}}}}$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$
$$x^2 - 5x = 1$$
$$x(x-5) = 1$$
$$x - 5 = \frac{1}{x}$$
$$x = 5 + \frac{1}{x}$$

Del gráfico (figura 17) observamos que x≠0

Como puedes ver este proceso continuará indefinidamente, porque x está escrito en términos de si mismo.
Tomemos por ejemplo una aproximación que tome en cuenta hasta el tercer nivel, allí tendríamos

$$5 + \frac{1}{6} = \frac{31}{6}$$

$$5 + \frac{6}{31} = \frac{161}{31}$$

$$5 + \frac{31}{161} = \frac{836}{161} \approx 5{,}1925\dots$$

Figura 11 Tratamiento algebraico para encontrar la fracción continua S5T4

La complejidad de esta tarea se encuentra en la conversión del registro numérico fraccionario al registro decimal, pues como se evidencia en, la Figura 9 deben "omitirse" los demás niveles para adicionar al número entero el reciproco de la fracción que corresponde al tercer nivel, luego hallar el reciproco de esa adición y adicionarlo con el entero del nivel superior, hasta llegar al primer nivel. Pese a la complejidad de esta conversión decidió incluirse en el diseño una actividad que permitiera el acercamiento a este registro fraccionario, pues puede aportar en la comprensión del comportamiento de las cifras decimales no enteras de la representación numérica decimal de irracionales algebraicos.

Bibliografía

Adjiage, R. (1999). *L ' expression des nombres rationnels et leur enseignement initial* (Université Louis Pasteur). Recuperado de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012146

Adjiage, R., & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(2), 149–175. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9049-x

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (1a ed.; D. Fregona, Ed.). Libros Zorzal.

Calderón R., N. O. (2014). *Diferentes construcciones del número real* (Universidad Nacional de Colombia). Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/46409/

Coriat, M., & Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *18*(1), 25–34.

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo* (2da ed.; M. I.D., Ed.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. *91*(1), 143–168.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Traducción). Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Duval, R., & Saénz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas seleccionadas*. Editorial Universidad Distrital

Francisco José de Caldas.

García, H. (2016). *Propuesta Multirregistro para la conceptualización de los procesos de homogenización y equivalencia de las representaciones fraccionarias*. Universidad Nacional de Colombia sede Palmira.

García Moreno, A. (2017). *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media*. Universidad del Valle.

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. Universidad de Granada.

Niss, M. (1997). ¿Por qué enseñamos matemáticas en la escuela? En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 7–16). Recuperado de http: //ued. uniandes. edu.co

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3*. Universidad del Valle.

Pontón Ladino, T. (2008). *Una Propuesta Multirregistro para la Conceptualización Inicial de las Fracciones*. Universidad del Valle.

Reina, L., & Wilhelmi, M. R. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación Matemática*, *24*(3), 67–97.

Romero , I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria*. (Tesis doctoral) Universidad de Granada.

Romero, I., & Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista EMA*, *4*(2), 117–151.

Sánchez, J. C., & Valdivé F., C. (2011). El número irracional: un punto de vista epistemológico con interés didáctico. *TEACS*, *4*(1), 31–45. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4735446

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line - Where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(4), 477–488. https://doi.org/10.1080/00207390601151828

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). *Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link*. https://doi.org/10.1090/cbmath/016/01

Lourido Guerrero Diana Marcela: Estudiante de maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, sede Palmira, Colombia. Correo electrónico: dmlouridog@unal.edu.co. ORCID: 0000-0002-4146-1837.

Pontón Ladino Teresa: Dra. en Educación, Universidad del Valle, Colombia. Correo electrónico: tpontonl@unal.edu.co. ORCID: 0000-0003-2399-7715.