ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-20

Relevancia de la teoría de conjuntos en la enseñanza de las matemáticas a nivel de bachillerato para la solución de situaciones combinatorias: una experiencia didáctica

Arturo Malesani, Sabrina Garbin Dall´Alba

Fecha de recepción: 23/08/2020
Fecha de aceptación: 9/05/2021

Resumen

Se presenta el diseño e implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de la Combinatoria a un grupo de estudiantes con edades entre 16-17 años. Los hallazgos muestran que recuperar la teoría de conjuntos en esta etapa escolar, no conlleva necesariamente a resultados no deseados y denunciados por Klein (1973). Introducir la teoría de conjuntos dentro de una coherencia metodológica y articulada previo a la teoría combinatoria, podría favorecer la posibilidad de dotar a los alumnos de elementos simbólicos y conceptuales necesarios para comunicar matemáticamente el proceso de resolución de situaciones combinatorias propuestas, al tiempo que contribuye a que ellos desarrollen una actitud positiva hacia las matemáticas.
Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, teoría de conjuntos, teoría combinatoria.

Abstract

The design and implementation of a didactic unit for the teaching of Combinatorics to a group of students aged 16-17 years is presented. The findings show that recovering set theory at this school stage does not necessarily lead to unwanted results denounced by Klein (1973). Introducing set theory within a methodological and articulated coherence before combinatorial theory could support the possibility to provide students with the symbolic and conceptual elements necessary to mathematically communicate the process of solving proposed combinatorial situations while helping them to develop a positive attitude towards mathematics.
Keywords: mathematics teaching, set theory, combinatorial theory.

Resumo

Neste estudo apresentamos o desenho e a implementação de uma unidade didática para o ensino da Combinatória a um grupo de estudantes entre 16 e 17 anos. Os resultados mostram que a abordagem da teoria de conjuntos nesta fase escolar não gera necessariamente efeitos indesejaveis como descrito por Klein (1973). A introdução da teoria dos conjuntos dentro de uma metodologia coerente e articulada previamente à abordagem da teoria Combinatória possibilitaria suprir os elementos simbólicos e conceituais necessários aos estudantes para uma eficaz comunicação matemática com fins de resolução da mesma. Concomitantemente, tal conduta contribuiria para o desenvolvimento de uma atitude positiva para com a disciplina de Matemática.
Palavras-chaves: Professor de Matemática, teoria dos Conjuntos, teoria

	Combinatória

1. Introducción

El interrogante acerca de las maneras más adecuadas de estimular la generación de nuevos y mejores matemáticos, capaces de impulsar el desarrollo de esta ciencia tan necesaria para el progreso de los países y el mejor vivir de sus habitantes (Chvanova y Garbin, 2017), no es novedosa. Sin embargo, y a pesar de los muchos debates en torno a la didáctica de las matemáticas, tendentes a estimular y fortalecer su consolidación como disciplina fundamental frente a las necesidades educativas del presente (Godino, 2010), la emergencia de prácticas escolares alternativas, y los avances logrados por la teoría de la educación matemática en las últimas décadas, ello no significa que todas las aristas involucradas en la discusión hayan sido resueltas.

De hecho, resulta en particular significativo que actualmente, y sobre todo en el contexto iberoamericano, las deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar sean cada vez mayores. En el caso de España, los resultados obtenidos en los procesos de evaluación nacional no logran superar la media (OECD, 2019); y estas cifras son similares a las que corresponden a América Latina (Palafox, 2018; Rivas y Scasso, 2017). De igual modo, son evidentes las dificultades que confrontan los estudiantes frente al razonamiento formal y la comprensión del lenguaje matemático en la transición del Pensamiento Matemático Elemental (PME) al Avanzado (PMA); así como también la falta de motivación y el desinterés por el estudio especializado de esta ciencia y de sus derivas prácticas. Y es que, por lo general, en la enseñanza obligatoria media se emplean lenguajes matemáticos poco rigurosos y no formales, y se reserva para la formación universitaria el acercamiento al lenguaje formal y lógico matemático. Esto abre una brecha entre la educación secundaria y la profesional respecto del aprendizaje de las matemáticas. Y pasa por alto la necesidad de establecer un tránsito adecuado y no abrupto del PME al PMA, que involucra un conocimiento previo de la representación formal de las matemáticas, su lenguaje, formalización y demostración (Garbin y Azcárate, 2011; Olivieri y Garbin, 2017), y una "gestión" didáctica que considere la importancia y complejidad del proceso.

De cara a esta primera observación, y en contra del rechazo categórico al uso de la teoría de conjuntos en la enseñanza preuniversitaria de las matemáticas, que se impuso en numerosos programas a nivel mundial hacia los años setenta del siglo pasado a raíz del enfrentamiento irresoluble entre una concepción mecanicista de las mismas y una tendencia formalista (la matemática moderna) ampliamente influenciada por el grupo de Bourbaki, el presente trabajo propone su incorporación como una herramienta para facilitar la resolución de problemas correspondientes al área de las probabilidades y la teoría combinatoria. No se trata, por supuesto, de insistir en el enfrentamiento entre estos dos enfoques que, en cierta medida, deciden el curso de la enseñanza de las matemáticas a lo largo de la segunda mitad del siglo XX; y que fueron discutidas *in extenso* por Kline (1976). En palabras de Sorando (2002), el trabajo de este autor tuvo

> […] el valor de saber denunciar los errores del sistema tradicional memorístico y a la vez alertar sobre los nuevos desastres que la arrolladora modernidad conjuntista traía a las escuelas e institutos. Al hacerlo se enfrentaba a los defensores de ambos sistemas. Lo hacía en el momento oportuno, previendo la nueva situación. Y no caía en el tono apocalíptico de quien sólo describe fracasos pasados y predice fracasos futuros, sino que argumentaba las razones para unos y otros, a la vez que sentaba los principios fundamentales para la necesaria reforma de la enseñanza de las matemáticas en dichos niveles. (pp.121-122)

Por el contrario, y a partir de una experiencia didáctica concreta (Autor, 2018), nos interesa mostrar que la recuperación de la teoría de conjuntos es posible y podría permitir dotar a los estudiantes de elementos simbólicos y conceptuales necesarios para comunicar matemáticamente el proceso de resolución de situaciones combinatoria propuestas, al tiempo que contribuir a que ellos desarrollen una actitud positiva hacia las matemáticas. Sabemos, por otra parte, como han demostrado Sriraman y English (2010), que ninguna teoría única es capaz de solucionar todos los problemas didácticos que intervienen en esa articulación de diversas disciplinas que es la educación matemática.

La teoría de conjuntos se puede entender como el estudio de las propiedades generales que definen los conjuntos, las cuales son intrínsecas e independientes de la naturaleza de los objetos que involucren y de las operaciones que puedan efectuarse entre ellos. Por su parte, la teoría combinatoria es una rama de la matemática encargada de estructurar modelos capaces de establecer la numeración de las diferentes configuraciones que puede tomar algún objeto de un conjunto. En este sentido, es posible afirmar que la teoría combinatoria es, grosso modo, el arte de contar los cardinales de cierto tipo de conjunto.

Enumerar los objetos que forman parte de un conjunto implica asignarles un orden a esos elementos. Este resulta de establecer una correspondencia biunívoca entre un conjunto determinado y algún subconjunto de los números naturales o, inclusive, los naturales. Esa enumeración que se asigna a los elementos de un conjunto devela la relación que existe entre la teoría combinatoria, la teoría de conjuntos y el concepto de función. Dicho concepto está inmerso en el desarrollo de la génesis epistemológica de la teoría de conjuntos.

El enfoque epistemológico que le damos a la unidad didáctica, según una concepción discreta (finita) de la teoría de conjuntos, se inspira en el nexo intuitivo de dicha idea según fue establecida por Cantor en 1891: “los conjuntos son colecciones que pueden ser contadas” (Lavine, 2005, p. 13). Para Lavine (2005), Cantor “[t]rató a las colecciones infinitas como si fueran finitas, a tal grado que el más agudo historiador de la obra de Cantor, Michael Hallett, enfatizó el ‘finitismo’ de Cantor” (p. 13).

Por una parte, este nexo puede mostrarles a los estudiantes el desarrollo conceptual de la matemática, su desarrollo epistemológico y la problemática que puede generar una definición errónea (Véase final de la sección 2.2.). Por otra, permitirles profundizar en lo que significa resolver un problema combinatorio. Y, finalmente, adquirir elementos simbólicos y conceptuales, propios de la teoría de conjuntos, que les permitan plasmar y establecer argumentaciones formales en la resolución de situaciones combinatorias, como primer paso hacia el tránsito y posterior consolidación del PMA.

La experiencia didáctica a la cual hacemos referencia respondió a dos preguntas fundamentales: a) ¿Qué diseño didáctico permitiría introducir el estudio de la teoría combinatoria a partir de los referentes teóricos de la teoría de conjuntos? b) ¿Qué estrategia de evaluación permitiría verificar que este método de trabajo no sólo les permite a los estudiantes familiarizarse con el lenguaje matemático y su simbología para poder interpretar definiciones, teoremas o enunciados de problemas, sino que también incentiva en ellos una actitud favorable hacia las matemáticas? A partir de ellas, desarrollamos el planteamiento que nos interesaba sostener en torno a tres fases, supervisadas y aprobadas por pares, según el modelo establecido por la Universidad Simón Bolívar de Venezuela: a) Diseño de una propuesta didáctica, cuyo tema de enseñanza corresponda al programa vigente de matemáticas de Educación Media General (primeros niveles de bachillerato); b) Implementación de la propuesta en una Institución Educativa con un enfoque de investigación-acción dentro del aula de clases; c) Evaluación del proyecto implementado mediante el resultado obtenido.

2. Diseño de la unidad didáctica

El diseño propuesto para la unidad didáctica en la cual se centró la experiencia que nos interesa discutir aquí se fundamentó teóricamente en los trabajos de Kline (1973), Sorando (2002) y Contreras (2012), en lo que refiere a la incorporación de la teoría de conjuntos para facilitar la resolución de situaciones combinatorias. Por otra parte, su estructuración y formalización metodológica se basaron en los lineamientos contemplados por Callejo (1992). Para Callejo, una “unidad didáctica” consiste en:

> Una unidad de trabajo relativa a un proceso de enseñanza-aprendizaje, articulado y completo. En ella se debe precisar por tanto los contenidos, los objetivos, las actividades de enseñanza-aprendizaje y las actividades para la evaluación. Estos elementos deben tener en cuenta los diferentes aspectos de la clase y desarrollarlos en función de las, necesarias, adaptaciones curriculares. (p. 7)

Finalmente, para articular el recurso a metodologías distintas, que responden a filosofías diversas y a veces contrarias subyacentes a las matemáticas, en cuanto al qué y cómo enseñar, tomamos en consideración el esquema de los cuatro cuadrantes (AQAL) concebido por Ken Wilber, según su aplicación al campo de las matemáticas, su filosofía y su enseñanza tal como la desarrollan Chvanova y Garbin (2017).

2.1. Consideraciones relativas al qué y para qué enseñar

En principio, y de cara a la hipótesis inicial que manejamos respecto de la incorporación de la teoría de conjuntos como facilitadora para la resolución de problemas combinatorios en la formación matemática preuniversitaria, el diseño de la unidad didáctica que nos interesaba proponer se interrogó acerca del qué y para qué enseñar. Y, de manera específica, nos concentramos en la teoría combinatoria.

Como sabemos, la teoría combinatoria es una de las ramas de la matemática que se ocupa del arte de contar. En términos generales, esta teoría se imparte en la educación media con el propósito de enseñar el Binomio de Newton o de proporcionar un preámbulo necesario para poder abordar con profundidad ciertos temas de probabilidad y estadística. Y, en este sentido, el profesor tiende a entregarles a los estudiantes las fórmulas básicas de una permutación ($P_n = n!$), r-permutación o variación ($P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$) y combinación ($C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$). A manera de preámbulo, el docente suele presentar estas fórmulas como una manera de dar respuesta a situaciones como las siguientes: ¿de cuántas formas diferentes es posible sentar a 7 personas en 7 sillas alineadas?; ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar con 1, 2, 3, 4, 5 y 6?; si se desea preparar una ensalada con tomate, zanahoria, papa y brócoli, ¿de cuántas formas se puede preparar la ensalada usando sólo 2 ingredientes? Una vez presentados los problemas, y después de resaltar las diferencias significativas de la naturaleza de cada uno, el docente procede a aplicar las fórmulas correspondientes.

Ahora bien, aunque reconocemos la importancia de establecer diferencias concretas mediante la exposición de situaciones disímiles, reducir la enseñanza de la teoría combinatoria a su dimensión más pragmática puede resultar insuficiente para desarrollar el PMA y lograr un aprendizaje significativo de los contenidos por parte de los estudiantes. Por el contrario, consideramos que la enseñanza de la teoría combinatoria no sólo debe suponer un entrenamiento mecánico de los estudiantes en la utilización de fórmulas y procedimientos para resolver problemas al respecto, sino también la generación de un proceso de comprensión acerca de la naturaleza de lo que se cuenta y el origen de las fórmulas que nos permiten dilucidar lo que se quiere contar. Por otra parte, es importante iniciar a los alumnos en las maneras de argumentar matemáticamente la solución de problemas, tanto a nivel oral como en la escritura; y reducir el aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos a través de limitadas representaciones (ejemplos) de objetos matemáticos restringe una formación conceptual sólida del esquema asociado al objeto de estudio. De ahí la importancia y validez de incorporar aspectos vinculados a la teoría de conjuntos para introducir una adecuada conceptualización de modelos combinatorios. Estos aspectos familiarizan y concientizan a los alumnos acerca del uso riguroso del lenguaje matemático (su simbología) para la interpretación de definiciones, teoremas o enunciados de problemas; y, además, inscriben la significación de cada fórmula combinatoria en un cierto contexto conjuntista más amplio.

A partir de la introducción de una serie de nociones básicas de la teoría de conjuntos, la teoría combinatoria aportaría una serie de procedimientos capaces de facilitar el cálculo de los cardinales que los integran. La explicación, entonces, podría redefinirse de la siguiente manera:

Sea $P_1, P_2, \dots, P_k$ una sucesión de conjuntos finitos, con intersección diferente de vacío dos a dos.

Se define el conjunto producto cartesiano como:

$$P_1xP_2xP_3x\ldots xP_k=\{(p_1,p_2,\ldots,p_k):p_1\in P_1\wedge p_2\in P_2\wedge\ldots\wedge p_k\in P_k)\}$$

Y su cardinal $\#(P_1xP_2xP_3x\ldots xP_k)$ es igual a: $\#(P_1)\cdot\#(P_2)\cdot\#(P_3)\cdot\ldots\cdot\#(P_k)=n_1n_2n_3\cdot\ldots\cdot n_k$; cuya demostración está fundamentada en el método inductivo, y cuyo caso base (k=2) consiste en construir una especie de arreglo o rectángulo formado por los elementos de P_1xP_2. Para luego proceder a multiplicar el número de elementos que contiene la fila, por el de las columnas; donde luego se establece la hipótesis inductiva para $k=n$ y por último se demuestra fácilmente para $k=n+1$. Este resultado nos permite enunciar y justificar la siguiente afirmación: "Si una tarea se realiza en "k" etapas y cada etapa se puede realizar en una cantidad finita de pasos: P_1 en n_1 pasos, P_2 en n_2 ,y así sucesivamente hasta P_k en n_k pasos , entonces la tarea completa se puede hacer en $n_1n_2n_3\cdot\ldots\cdot n_k$ formas posibles". Esto lleva el nombre del principio del producto el cual se puede tomar como definición gracias a la técnica desarrollada en la demostración de: $\#(P_1xP_2xP_3x\ldots xP_k)=\prod_{k=1}^{n}n_k$. En virtud de lo anterior, resulta casi de manera natural hacer uso del principio del producto y definir la expresión $n!$, desde la siguiente situación concreta: ¿de cuantas maneras distintas se pueden sentar n personas en n sillas alineadas?

Por otro lado, también se puede deducir la fórmula $\frac{n!}{(n-r)!}$ desde la siguiente situación: ¿de cuántas maneras diferentes se pueden extraer r elementos de un conjunto de n elementos? Utilizando el principio del producto se obtiene que $P(n,r)=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-(r+1))$; y luego, si se multiplica la igualdad por $(n-r)!$ Y así se obtiene el resultado deseado a través de las manipulaciones algebraicas apropiadas.

Finalmente, para obtener la fórmula de $\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ basta con introducir la necesidad de contar: el número de subconjuntos que se pueden forman, sin importar el orden de estos, de r elementos de un conjunto A de n elementos; donde $C_{n,r}$ será ese número de subconjuntos. En virtud de la definición, resulta casi inmediato afirmar que : $P(n,r)\ =\mathrm{r}!\cdot C_{n,r}\ =>\ \ C_{n,r}\ =\frac{P(n,r)}{r!}$; lo cual es cierto, ya que si se multiplica el número de combinaciones, por la cantidad de configuraciones en que puede permutar cada subconjunto de A de r elementos, en efecto se obtiene $P_{n,r}$ como resultado de ese producto. De esta manera, si el resultado se sustituye en la fórmula de $P(n,r)$ en $C_{n,r}\ =\frac{P(n,r)}{r!}$, se efectúa la división y obtenemos que $C_{n,r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$.

En este orden de ideas, y a fin de que los estudiantes puedan aprender el contenido de teoría combinatoria desde el enfoque antes explicitado, decidimos desarrollar la secuenciación por módulos de los siguientes contenidos:

Módulo (1): Preliminares de Teoría Concreta de Conjuntos
Definición de conjunto
Conjuntos definidos por extensión y comprensión
Cardinal de un conjunto
Relación entre conjuntos
Relación entre el concepto de función y cardinal
Diagrama de Venn
Operaciones de conjuntos: Unión, Intersección, Diferencia, Diferencia Simétrica y Complemento
Repaso de las nociones del concepto de función
Módulo (2): Teoría Combinatoria
Principio del producto
Principio de la suma
r-Permutaciones
Combinaciones
Binomio de Newton
Consecuencias del Binomio de Newton

Tabla 1. Módulos y Contenidos trabajados en la Unidad Didáctica

2.2. Consideraciones relativas al cómo enseñar y las estrategias a implementar

La unidad didáctica se diseñó con un enfoque de metodología sistémica, la cual incorpora aspectos y momentos específicos diferenciados de tres métodos complementarios, según se expone a continuación:

a) La clase magistral: es frecuentemente elegida por el docente ya que, en alternancia con otros modos, permite fomentar la competencia sana entre los alumnos mediante juegos y discusiones, abarcar un número significativo de contenidos en un tiempo relativamente corto e incorporar diferentes modalidades de trabajo. Al respecto, puede consultarse el texto de López (2002), en el cual el autor cita a diferentes teóricos que reflexionan sobre el tema. Estos aportan definiciones relevantes de la clase magistral y destacan las posibles ventajas y desventajas de la metodología.
b) El trabajo cooperativo: es una metodología basada en el trabajo de pequeños grupos con la finalidad de resolver una tarea, un problema o consolidar un objetivo en común. Resulta interesante debido a que, mediante la colaboración e inclusive la confrontación entre los participantes, estos tienen la oportunidad tanto de construir ciertas partes del conocimiento, como de fijarlo y transmitirlo a través de la interacción colectiva. Además, es positivo para promover el desarrollo de las destrezas sociales de los alumnos (Berenguer et al., 2000, pp.1-4).
c) La clase invertida: es una metodología de trabajo que tiene la particularidad de intercambiar los roles del docente y del alumno. Esta innovadora metodología educativa nos interesa en particular porque le proporciona al alumno mayor oportunidad con respecto al tiempo que necesita para asimilar los contenidos planteados por el docente (Barreras, 2016, pp. 173-196).

Según López (2002), los métodos educativos cumplen la función de estructurar los contenidos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Y, como señala Amat (2002), a cada profesor le corresponde seleccionar y combinar aquellos métodos que permitan aumentar la probabilidad de éxito de los objetivos educativos planteados, en función de las destrezas de sus alumnos y de la naturaleza de los contenidos curriculares previstos. Desde esta perspectiva y como lo escribimos en sesión anterior (2) para articular de forma sistémica las metodologías distintas, que responden a filosofías diversas y a veces contrarias subyacentes a las matemáticas tomamos en consideración el esquema de los cuatro cuadrantes (AQAL).

La metodología sistémica, entendida como el conjunto de interconexiones entre las diferentes situaciones matemáticas y las evaluaciones diseñadas para constatar su aprendizaje, supone que cada parte del diseño engloba al siguiente en función de su aplicabilidad y de las diversas formas (contextos) de ejercitación y evaluación. En vista de ello, el primer módulo de la unidad didáctica enfatizó aquellas estrategias que permitían desarrollar diferentes habilidades sociales en los estudiantes, fundamentales para su desenvolvimiento en el segundo módulo. Este último, de mayor grado de dificultad, por ser un módulo de aplicación de conocimientos, cuyos problemas son de tipo algorítmico, de repetición o de traducción simple/compleja, y de procesos o situaciones reales (modelado a partir de algún contexto específico), exigía herramientas de carácter más individual.

La planificación de la propuesta didáctica estuvo conformada por 16 diseños didácticos que se clasifican en tareas, actividades y rasgos manifiestos como se expone a continuación:

- Tarea: situación didáctica elaborada en casa de forma individual o en grupos pequeños.
- Actividad: situación didáctica elaborada en el aula de clase de forma individual, en grupos pequeños o en grandes grupos.
- Rasgos: evaluación del comportamiento del alumno basado en los acuerdos establecidos en el primer día de clases a manera de “Contrato Didáctico” entre el docente y los estudiantes:

a) Estudiar matemática es algo que está vinculado con la disciplina; por lo tanto, un alumno que se desenvuelve de manera cónsona con este ítem debe: ser puntual con la hora de llegada a la sesión de clase; seguir las instrucciones impartidas para el desarrollo de cada tarea o actividad propuesta; demostrar dominio teórico y práctico de la materia y prestar atención en clase y no utilizar el tiempo de la asignatura para la elaboración de trabajos de otras materias o para terminar trabajos de la materia asignados para la casa.
b) Estudiar matemática tiene que ser un acto de responsabilidad y constancia. Sólo así se podrá entender el verdadero significado que esconde la matemática. Por lo tanto, un alumno que se desenvuelve de manera cónsona con este ítem debe: manifestar su interés por la materia mediante la elaboración de los ejercicios asignados en la Guía (entregada el primer día de clases) y estar en pleno conocimiento de las entregas establecidas en el plan de evaluación.
c) Las acciones del alumno se considerarán apropiadas, si y sólo si benefician a sus compañeros o lo benefician a sí mismo. Por lo tanto, un alumno que se desenvuelve de manera cónsona con este ítem debe: relacionarse de forma ecuánime y cordial con sus compañeros y con el docente; respetar su

proceso de aprendizaje y el de sus compañeros; cumplir con el reglamento interno de la institución o manual de convivencia.

d) La nota que califica al estudiante es directamente proporcional al esfuerzo y dedicación demostrados en las evaluaciones individuales y grupales.

El plan de evaluación diseñado en función de estas consideraciones se expone a continuación:

Tipo de Estrategia Evaluativa	Finalidad de la Estrategia	Elaboración en	%	Modalidad de trabajo
Actividad # (1): Aplicación del cuestionario de actitud hacia la matemática, institucionalización y construcción del contrato didáctico con los alumnos, proyección de dos materiales audio visuales.	-Determinar la actitud inicial de los estudiantes hacia la matemática. -Definir el contexto de enseñanza y de aprendizaje junto con los alumnos. -Introducir y motivar la importancia de la matemática en nuestras vidas.	Aula de clase	0%	Individual
Actividad #(2): Manejo de los conceptos de teoría de conjuntos a través del lenguaje escrito (sin simbología matemática).	Familiarizar a los estudiantes con las dinámicas cooperativas e introducirlo conceptualmente en el tema a tratar.	Aula de clase (trabajo cooperativo)	3%	En grupos de 3 y los alumnos determinan los grupos
Tarea #(0): Investigar el significado de cada símbolo matemático a utilizar en el curso, mediante una tabla de símbolos facilitada por el docente.	Familiarizar a los estudiantes con la notación de operadores y conectores lógicos y su significado.	Casa (clase invertida)	2%	Individual
Tarea # (1): Elaborar una carpeta, cuya portada contenga un dibujo que vincule los conceptos de: teoría de conjuntos y teoría combinatoria.	Permitirle al estudiante establecer la conexión entre estas dos teorías de forma intuitiva.	Casa (clase invertida)	2%	Individual
Tarea # (2): Investigar la historia de los matemáticos Ramanujan,	Introducir a los estudiantes en el contexto histórico, información personal de los personajes y	Casa (clase invertida)	3%	Individual

Littlewood, y Hardy.	líneas de investigación.			
Tarea #(3): Elaborar un ensayo referente al video *La razón de oro* y responder las preguntas planteadas.	Mostrar al alumno la importancia de la matemática en la vida cotidiana de los seres humanos y cómo ha ido evolucionando a lo largo de la historia.	Casa (clase invertida)	3%	Individual
Tarea #(4): Elaborar un trabajo de investigación con base en una lista de videos referentes a teoría de conjuntos.	Adquirir un glosario que sintetice, de forma ordenada y estructurada, todas las definiciones, propiedades de los objetos, símbolos lógicos y conjuntistas.	Casa (Clase invertida)	8%	Individual
Actividad #(3): Realización de un esquema referente a los conceptos relacionados con los conjuntos numéricos.	Recapitular y remediar posibles esquemas mal formados asociados a la estructura conjuntista de los sistemas numéricos vistos en el bachillerato, desde la óptica de la teoría de conjuntos.	Aula de clase (trabajo cooperativo)	3%	En grupos de 3 y los alumnos determinan los grupos
Tarea #(5): Elaborar un trabajo referente a los videos del módulo (2), a partir de las siguientes preguntas: ¿Qué son axiomas? ¿Qué es un teorema? ¿Qué es un Corolario? ¿Te imaginabas que el hacer matemáticas era como se pudo observar en la película? ¿Por qué? Y, por último explica: ¿qué entiendes por hacer matemática? y ¿qué tan importante es el rol de un matemático en nuestra sociedad?	Determinar qué conceptos formaron los alumnos, después haber visto de la película *El hombre que conoció al infinito*.	Casa (trabajo cooperativo)	4%	En grupos de 3 y el docente determina los grupos
Actividad #(4): Ejercitación del lenguaje matemático mediante la simbología de la teoría de conjuntos. Continuación de la Actividad # (2).	Recapitular e intercambiar los conceptos desarrollados en la tarea #(5) aplicados al contexto particular de la Actividad # (4); cuyo fin ulterior es trabajar y practicar en el intercambio de información matemática de forma oral y escrita.	Aula de Clase (trabajo cooperativo)	6%	Los mismos grupos de la Actividad # (2)
Actividad #(5): Interrogatorio lúdico	Determinar el nivel de aprendizaje a nivel grupal que	Aula de clase	5%	En grupos de 7 y el

referente a la teoría desarrollada en los trabajos #4 y #5 y trabajo con la guía de ejercicios prácticos que fueron entregados el primer día de clase.	han alcanzado los estudiantes y brindarles el espacio para que restructuren, debatan y ejerciten el conocimiento asociado a las estructuras cognitivas que vinculan este contenido.			docente determina los grupos
Tarea #(6): A partir de la proyección de la película *El hombre que conoció al infinito*, elaborar un ensayo argumentativo en torno a su postura referente a lo visto y a algunas preguntas facilitadas por el docente.	Concientizar a los estudiantes de la importancia del rigor en la escritura de la matemática, la importancia de las definiciones bien plantadas y la importancia del matemático en la sociedad y su rol en la ciencia.	Casa	6%	Individual
Actividad #(6): Evaluación escrita e individual referente a todo al módulo de teoría concreta de conjuntos.	Determinar el nivel de apropiación los conceptos básicos y notación conjuntista.	Aula de clase	15%	Individual
Actividad #(7): Evaluación escrita e individual referente al módulo de teoría Combinatoria: principio de la suma y del producto, cálculos con n-factoriales y r-permutaciones.	Determinar el nivel de destreza adquirido por los estudiantes en la resolución de situaciones asociadas al principio del producto y de la suma y destrezas algebraicas de operaciones con n!,	Aula de clase	15%	Individual
Actividad #(8): Evaluación escrita e individual referente al módulo de teoría combinatoria: problemas de los diferentes modelos combinatorios y cálculos de polinomios de la forma $(x+a)^n$, mediante la fórmula del Binomio de Newton.	Determinar el nivel de destreza adquirido por los estudiantes en el modelaje de situaciones combinatorias y aplicación del Binomio de Newton.	Aula de clase	15%	Individual, pero fue adaptada para hacerse en parejas.
Rasgos: Evaluación del comportamiento a lo largo de todo el trimestre y segunda aplicación del cuestionario de actitud hacia la matemática.	Incentivar al estudiante para que su conducta sea cónsona a la establecida en el contrato didáctico y determinar la actitud final de los estudiantes hacia la matemática	Aula de clase	10%	Individual

Tabla 2. Estrategias evaluativas diseñadas para la unidad didáctica

En función de los requerimientos del centro educativo en el que se ejecutaría la unidad didáctica propuesta, todas las actividades y tareas sugeridas tuvieron una ponderación independientemente a su finalidad, a excepción de los test de actitud hacia la matemática. Los porcentajes se ajustaron en función del objetivo perseguido por la implementación de la estrategia, la modalidad de trabajo, la dificultad y el lugar en donde se desarrollaría la misma. Por otro lado, el criterio de elección de los porcentajes respondió al grado de dificultad matemática de la actividad, la finalidad y la modalidad de elaboración de la misma.

2.3. Consideraciones relativas a los aspectos motivacionales

El diseño de la unidad didáctica contempló, adicionalmente, algunas actividades y tareas tendentes a generar una conciencia en los estudiantes acerca del desarrollo conceptual de la matemática, su especificidad epistemológica y los problemas que puede acarrear una definición mal estructurada. Al mismo tiempo, esta conciencia suponía también adquirir una actitud positiva y entusiasta hacia las matemáticas y su aprendizaje. Como señalan Moreno et al, citando a Wise, Spinder, De Wit y Gerber (2018), “los estados emocionales positivos activan los llamados núcleos dopaminérgicos […] favoreciendo el aprendizaje” (p. 5).

A fin de que los estudiantes pudieran asumir su contacto con la matemática de una manera divertida y relajada, se propusieron la Actividad # 1 y las Tareas # 1, 2 y 6 (Tabla N°2). Asimismo, estas estrategias permitían comunicar algunos aspectos históricos de la disciplina y justificar la importancia de aprender a manejar su simbología. El diseño incorporó dos sesiones dedicadas a la proyección de materiales audiovisuales. La primera, posterior a la presentación del curso, la realización del test inicial de actitud hacia la matemática y de los acuerdos pactados en el contrato didáctico, se organiza a partir de la proyección de dos documentales: *El mundo de las matemáticas de Donald* y *Grandes temas de matemática*, los cuales hablan del desarrollo de las matemáticas hasta el presente, su relación con el arte y la naturaleza, y su presencia en la vida cotidiana. La segunda, al final del primer módulo (Tabla N°1), gira en torno a la proyección de la película *El hombre que conocía el infinito* (2015), sobre la vida y la obra del matemático hindú Ramanujan. La película trasluce un aprendizaje relevante sobre la diferencia entre un experimento (numérico) y una demostración, el lugar problemático de la intuición en la generación del conocimiento, el valor que tiene compartir los hallazgos entre pares, y la importancia de aprender a transmitir los resultados matemáticos, defender y argumentar las propias aseveraciones y no dejarse llevar por creencias religiosas o prejuicios culturales.

3. El contexto y los participantes

La unidad didáctica diseñada se implementó en un grupo de 20 alumnos del último año de secundaria (16-17 años), pertenecientes a un centro educativo privado, adjunto a la Universidad Simón Bolívar (USB). En este centro de enseñanza, Unidad Educativa de la Universidad Simón Bolívar, un 40% del alumnado son hijos de profesores de la universidad, 40% hijos de empleados administrativos de la misma institución, 12% hijos de su personal obrero y 8% provenientes de otros sectores de las comunidades adyacentes.

Debido a la lejana ubicación de la Unidad Educativa respecto al centro urbanizado de Caracas, el 45 % de los alumnos usan el transporte que provee gratuitamente la USB para poder llegar a clase y el resto es acompañado por sus padres mediante el uso de vehículos propios. Esta información es relevante debido a los frecuentes disturbios sociales (manifestaciones públicas, protestas y/o huelgas), deficiencias de unidades de transporte públicas o privadas, que hacen inestable cualquier planificación y realización efectiva del horario de clases. De hecho, las actividades previstas y planificadas en el "laboratorio teórico" (Primera fase), tuvieron que ser modificadas y reajustadas.

Por otra parte, los alumnos no tenían experiencia en cuanto a la metodología de "clase Invertida" ni tampoco al "trabajo cooperativo". Estaban acostumbrados a evaluaciones y actividades de carácter psicométrico y no de carácter formativo o de refuerzo; la mayoría de los porcentajes de sus evaluaciones, en matemática, estaba entre 15-20% del total de nota acumulada; estilo que dificulta una evaluación multidimensional.

La aplicación de la unidad didáctica se inició el 1 de enero de 2018 y finalizó el 21 de marzo del mismo año, con dos sesiones de trabajo semanales de 90 minutos cada una.

4. Instrumentos de recopilación y análisis de datos

El análisis de la experiencia didáctica se articula a partir de dos instrumentos de recopilación y procesamiento de la información. El primero de ello, cuantitativo, está constituido por las calificaciones finales obtenidas por los estudiantes a partir de la implementación del diseño de evaluación, y las que corresponden al lapso escolar anterior (Tabla N°3). El segundo, cualitativo, contempla los errores cometidos por los alumnos en relación a los temas trabajados sobre teoría combinatoria; y su categorización se basa en el trabajo de Navarro-Pelayo y otros (1998) (Tabla N°6). Asimismo, el análisis permite observar y valorar la capacidad de comunicación matemática formal de los estudiantes al cabo de la experiencia didáctica.

En cuanto a la actitud de los alumnos hacia la matemática el test de Fennema y Sherman readaptado por Doepken *et al.* (2013) nos permite identificar los cambios producidos después de la experiencia. Dicho instrumento posee coeficientes de fiabilidad desde 0,86 hasta 0,93. Además, las expresiones de inconformidad, quejas y cuestionamientos expuestos por los alumnos durante la implementación de la unidad didáctica arrojan datos cualitativos relevantes al respecto.

5. Algunos hallazgos

5.1. Calificaciones de los alumnos

En la Tabla N°3 podemos observar los resultados estadísticos aplicados a las calificaciones de los estudiantes. Al comparar las calificaciones observamos: un incremento de la media en 0.35 puntos; un descenso de la moda en 3 puntos; un descenso de la mediana en 1 punto; un incremento de 1 punto con respecto a la mínima nota y la equiparación de la máxima calificación obtenida en la experiencia didáctica.

Indicadores	Calificaciones finales del grupo de alumnos al final de la Unidad Didáctica (UD)	Calificaciones finales del grupo de alumnos en el trimestre anterior a la aplicación de la UD
Media	11.05	10.7
Moda	9	12
Mediana	10	11
Mínimo	3	2
Máximo	18	18

Tabla 3. Resumen de los indicadores de las diferentes tendencias de las calificaciones. (La escala de notas es de 01 como mínima y 20 como máxima)

Ante estos resultados se podría decir que no hay evidencia de una mejora significativa en cuanto a los resultados cuantitativos de las calificaciones de los estudiantes. Tampoco hay evidencia de una desmejora significativa. Consideramos, sin embargo, que este es un dato relevante en vista de los siguientes factores: a) cambio radical del método de enseñanza y aprendizaje; b) poco tiempo de adaptación al cambio; c) introducción de unas técnicas de conteo sustentadas en el enfoque epistemológico ya explicitado; d) ambiente inadecuado e inestable para el aprendizaje (situación sociopolítica del país, suspensión de clases, falta de servicios básicos, etc.).

5.2. La actitud hacia las matemáticas

La Tabla N°4 presenta los parámetros mediante los cuales se analizaron los resultados del test de Fennema y Sherman (Doepken, 2013). Éste contiene 47 ítems los cuales son subdivididos en 4 subescalas, con intervalo de desempeño entre un mínimo y máximo de 12 y 60 puntos respectivamente. Para este estudio incorporamos una nueva subescala denominada: Concepción apropiada de la finalidad de la matemática.

Parámetros del Test			
Subescalas	Número de ítems	Intervalos De Desempeño (I.D.D)	
		Mínimo	Máximo
Concepción apropiada de la finalidad de la matemática.	10	10	50
Confianza personal para aprender matemática.	12	12	60
Utilidad del contenido.	12	12	60
Actitud hacia el éxito.	11	12	60
Percepción que se tiene del	12	11	60

profesor.			

Tabla 4. Rangos de valores de desempeño por cada subescala del cuestionario

En la Tabla Nº5 presentamos los resultados de las dos aplicaciones del Test, la primera al comienzo de la experiencia didáctica y la segunda al final. Los resultados de la segunda aplicación del test superaran a los de la primera en cada uno de los ítems. Es decir, muestran un cambio favorable de actitud hacia las matemáticas en cuanto a: concepción apropiada de la finalidad de la matemática, confianza personal para aprender matemática, utilidad del contenido, actitud hacia el éxito y percepción del rol del profesor.

Resultados de la aplicación del test de actitud hacia la matemática		1.ª Aplicación del Test	2.ª Aplicación del Test	
Subescalas:	**Media del (I.D.D)**	**Puntaje**	**Puntaje**	**Diferencia**
Concepción apropiada de la finalidad de la matemática.	30	46,35	48,85	2,5
Confianza personal para aprender matemática.	36	38,7	44,2	5,5
Utilidad del contenido.	36	36,4	47,75	11,35
Actitud hacia el éxito.	35.5	37,9	48,05	10,15
Percepción que se tiene del profesor.	36	38	39,6	0,6

Tabla 5. Rangos de valores de desempeño por cada subescala del cuestionario

5.3. La resistencia al cambio de los estudiantes

A mediados del trimestre que duró la experiencia didáctica, justo cuando el proceso se hacía de creciente dificultad matemática y los procesos cognitivos más exigentes, y al tiempo en que aumentaba la responsabilidad matemática del estudiante y disminuía la del docente, los alumnos manifestaron su desconcierto y la dificultad de gestionar su propio aprendizaje. Esto implicó reelaborar y renegociar lo planificado para mantener a los estudiantes en la zona de desarrollo próximo. Algunas de las quejas formuladas eran del tipo: “No estamos haciendo matemáticas en clase”, “El profesor no saca cuentas”, “Estamos perdiendo el tiempo hablando de conjuntos”, “¿Por qué tenemos que ver otra vez los conjuntos de los positivos y de las fracciones?” y “¿Qué tienen que ver los conjuntos con la matemática?”.

Esta situación fue solucionada en una reunión que se pauto con la profesora guía del grupo y los estudiantes. En ella se acordó que la actividad # (8) de la (Tabla N°2) fuese hecha en parejas, seleccionadas previamente por el practicante, en función de los promedios equivalentes de los alumnos. Sin embargo, al comparar estas manifestaciones de malestar y el resultado positivo de la experiencia, ellas pueden ser atribuidas a la angustia que produce todo proceso de adaptación al cambio.

5.4. Errores observados

En la Tabla N°6 mostramos el porcentaje de los errores de tipo epistemológico identificados en las últimas dos evaluaciones escritas administradas a los estudiantes (Actividades # 7 y 8 de la Tabla N°2). Recurrimos, para formularlos, a las etiquetas que proponen Navarro-Pelayo et al (1996). En el marco de la experiencia didáctica estos errores fueron discutidos con los estudiantes mediante el diálogo socrático, la resolución de los problemas en la pizarra y, en algunos casos, la atención individual a cada alumno.

Error de:	%de error.
1) Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema.	5%
2) Orden.	10%
3) Repetición.	0%
4) Confundir el tipo de objetos.	5%
5) Enumeración no sistemática.	5%
6) Respuesta intuitiva errónea.	5%
7) No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente.	35%
8) No recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula combinatoria.	35%
9) Interpretación errónea del diagrama en árbol.	0%

Tabla 6. Proporción de errores cometidos en las Actividades # 7 y 8 (Tabla n° 2)

En la actividad # 7 se proponían problemas vinculados con el Principio de la Suma, el Principio del Producto, r-permutaciones y cálculos factoriales de expresiones algébricas y numéricas. En la actividad # 8 se proponían modelos combinatorios de permutación, y variación y combinación; así como también cálculos de polinomios de la forma $(x+a)^n$, mediante la fórmula del Binomio de Newton.

Los resultados demuestran que los errores de interpretación, intuición y elección de modelos erróneos de solución matemática son poco frecuentes; y, probablemente, los enfoques adoptados en la unidad didáctica favorecieron resultado positivo. Por otra parte, los ítems número 7 y 8 de la Tabla n °6 ponen en evidencia la necesidad de no desestimar la importancia del aprendizaje memorístico y dar un tiempo oportuno para la asimilación del contenido. Al respecto, los errores correspondientes al ítem 8 de la Tabla n° 6 se debieron exclusivamente a problemas de memorización de las fórmulas $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ y $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$. En muchos casos, al momento de escribir el denominador en ambas expresiones, la fórmula $C_{n,r}$ carecía del factor $r!$; y en el caso de $P_{n,r}$, lo agregaban. Estos errores pudieron ser identificados y categorizados gracias a entrevistas sostenidas con el 35% de los estudiantes que los habían cometido.

5.5. Capacidad de comunicación matemática

Elegimos algunos problemas combinatorios (Actividad # 8, Tabla N°2) con vistas a revisar la estructura comunicativa utilizada por los estudiantes en su resolución, y poder encontrar evidencia de la relevancia positiva o negativa del estudio de la teoría de conjuntos correspondiente al módulo 1. A modo de ejemplo, mostramos a continuación dos respuestas obtenidas en relación a dos de los problemas planteados.

Problema 1: Determinar cuántos paralelogramos se pueden formar con 4 rectas paralelas oblicuas y 4 horizontales, utilizando algún modelo combinatorio; suponga que entre cada recta consecutiva hay la misma distancia.

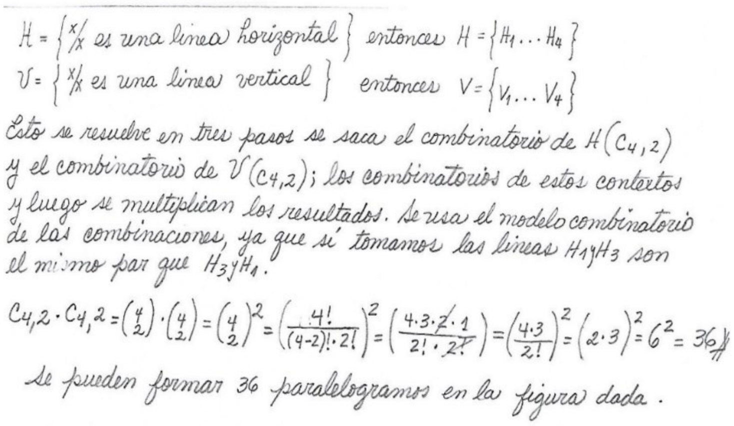
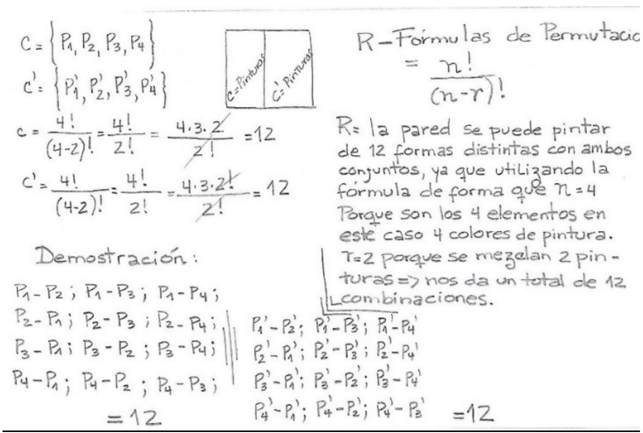

$H = \{x/x$ es una línea horizontal$\}$ entonces $H = \{H_1 \ldots H_4\}$
$V = \{x/x$ es una línea vertical$\}$ entonces $V = \{V_1 \ldots V_4\}$
Esto se resuelve en tres pasos se saca el combinatorio de $H(C_{4,2})$ y el combinatorio de $V(C_{4,2})$; los combinatorios de estos conteos y luego se multiplican los resultados. Se usa el modelo combinatorio de las combinaciones, ya que si tomamos las líneas H_1 y H_3 son el mismo par que H_3 y H_1.
$C_{4,2} \cdot C_{4,2} = \binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2} = \binom{4}{2}^2 = \left(\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}\right)^2 = \left(\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1}{2!\cdot \cancel{2!}}\right) = \left(\frac{4\cdot 3}{2!}\right)^2 = (2\cdot 3)^2 = 6^2 = 36$
Se pueden formar 36 paralelogramos en la figura dada.

Figura 1. Respuesta del problema de los paralelogramos.

Problema 2: Se Tienen dos conjuntos de botes de pintura y en cada uno de ellos hay 4 colores, todos diferentes. Se desea pintar una pared de forma tal, que la mitad de la pared sea una mezcla de 2 colores del primer conjunto y la otra mitad una mezcla de 2 colores del segundo conjunto. ¿De cuántas maneras se puede pintar la pared?


$C = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$
$C' = \{P'_1, P'_2, P'_3, P'_4\}$

R– Fórmulas de Permutació $= \frac{n!}{(n-r)!}$
$c = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2!}} = 12$
$c' = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 12$
R= la pared se puede pintar de 12 formas distintas con ambos conjuntos, ya que utilizando la fórmula de forma que $n=4$ Porque son los 4 elementos en este caso 4 colores de pintura. $r=2$ porque se mezclan 2 pinturas ⇒ nos da un total de 12 combinaciones.
Demostración:
P_1-P_2; P_1-P_3; P_1-P_4;
P_2-P_1; P_2-P_3; P_2-P_4;
P_3-P_1; P_3-P_2; P_3-P_4;
P_4-P_1; P_4-P_2; P_4-P_3;
$=12$
$P'_1-P'_2$; $P'_1-P'_3$; $P'_1-P'_4$
$P'_2-P'_1$; $P'_2-P'_3$; $P'_2-P'_4$
$P'_3-P'_1$; $P'_3-P'_2$; $P'_3-P'_4$
$P'_4-P'_1$; $P'_4-P'_2$; $P'_4-P'_3$
$=12$

Figura 2. Respuesta del problema de las pinturas y la pared.

Estos ejemplos demuestran que, en general, los estudiantes aprendieron a articular un lenguaje matemático formalmente estructurado, así como también a demostrar el razonamiento que acompaña la aplicación de las fórmulas. En la resolución de problemas tienen en cuenta las definiciones de los conjuntos involucrados, escriben de forma detallada junto a los cálculos correspondientes, y además, utilizan dibujos o diagramas en la argumentación formal. Es decir, hacen uso de diferentes lenguajes de representación semiótica, con su respectiva conversión y translación de estos registros. Esto sugiere cierta comprensión conceptual de estos alumnos (Duval, 1995).

6. Consideraciones finales

En la introducción escribimos los cuestionamientos que queríamos abordar en este artículo. Al tener como referentes estas cuestiones mostramos algunos aspectos del diseño, desarrollo y hallazgos de la implementación de la Unidad Didáctica diseñada.

Los hallazgos son parciales y no concluyentes, pero muestran suficientes indicios para poder responder de modo afirmativo a las preguntas e inquietudes planteadas. O, por lo menos, dejan una duda razonable que alienta al sí como respuesta. Implementamos la Unidad Didáctica en un ambiente inadecuado e inestable para el aprendizaje (situación sociopolítica del país, suspensión de clases, falta de servicios básicos, etc.) y a un grupo de estudiantes con una única experiencia de aprendizaje, la de una didáctica tradicional y memorística. Este ambiente y la resistencia al cambio de los estudiantes e introducir la teoría de conjuntos tanto temida para estos niveles de enseñanza podrían hacernos pensar sobre la imposibilidad de obtener buenos resultados desde el punto de vista del aprendizaje. Sin embargo, los hallazgos muestran que el haber introducido la teoría de conjuntos de forma previa al desarrollo de un módulo de aprendizaje de Combinatoria no conlleva necesariamente a resultados negativos, no deseados y denunciados por Klein (1973). En su contrario hemos mostrado resultados que muestran que introducir la teoría de conjuntos dentro de una coherencia metodológica y articulada no frena sino favorece la posibilidad de dotar a los alumnos de elementos simbólicos y conceptuales que ayudan a formar argumentaciones formales en la resolución de situaciones combinatorias y, todo ello, sin perder una actitud positiva hacia las matemáticas.

Pensamos que una intervención didáctica cuya metodología integre distintos enfoques podría superar algunos de los errores denunciados por Klein (1973), correspondientes a la época en la cual se incluyó como contenido escolar la teoría de conjuntos. Así mismo, favorecería un tránsito proporcional hacia las matemáticas superiores y desarrollaría mayores competencias de comunicación matemática en los alumnos. Esto abre la necesidad de seguir un proyecto de investigación que profundice y corrobore los indicios que esta implementación didáctica muestra.

Referencias

Amat, O. (2002). *Aprender a enseñar. Una visión práctica de la formación de formadores*. Barcelona: Gestión 2000.

Barreras, M. (2016). Experiencia de la clase inversa en didáctica de las lenguas extranjeras. *Educatio Siglo XXI*, 34(1), pp.173-196.

Berenguer, L. (ed.) (2000). *Trabajo cooperativo en clase de matemáticas*. Recuperado el 20 de agosto del 2020, de http://www.ugr.es/~pflores/textos/otros/LaXSanFernando.pdf

Brown, M. (Director) y Pressman, E. (Productor). (2015). *El hombre que conocía el infinito* [Película]. Reino Unido: Warner Bros.

Callejo, M. L. (1992). *Orientaciones para la elaboración de unidades didácticas a áreas matemáticas.* Recuperado el 20 de agosto del 2020, de https://ieps.es/wp-content/uploads/2012/09/MON-13.pdf

Chvanova, A. & Garbin, S. (2017). La formación matemática y la resolución de "problemas para investigar": una aproximación según el enfoque integral de Ken Wilber. *Revista Paradigma*, 38(1), pp. 353-379.

Contreras, F. A. (2012). La evolución de la didáctica. *Horizonte de la Ciencia*, 2(2), pp. 20-25.

Doepken, D., Lawsky, E. y Padwa, L. (2013), *Modified Fennema-Sherman Attitude.* The Woodrow National Fellowship Foundation. Recuperado el 20 de agosto del 2020, de https://teacherleaders.files.wordpress.com/2013/07/modified-fennema-math-attitude.doc

Duval, R. (1995). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, pp. 37-65.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, 38, pp. 53-67.

Godino, J. (2010). *Teoría e investigación en Educación Matemática*. Recuperado el 20 de agosto del 2020, de https://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Kline, M. (1973). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI editores S.A.

Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el infinito*. México: Fondo de Cultura Económica.

López, R. G. (2002). Análisis de los métodos didácticos en la enseñanza. *Publicaciones: Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla*, 32, pp. 261-334.

Malesani, A. (2018). *Manual de la implementación de la unidad didáctica para la enseñanza de teoría combinatoria del 5º año de diversificado.* Manuscrito no publicado, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.

Moreno, A. E., Rodríguez, J. V. R. y Rodríguez, I. R. (2018). La importancia de la emoción en el aprendizaje: Propuestas para mejorar la motivación de los estudiantes. *Cuaderno de pedagogía universitaria*, 15(29), pp. 3-11.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1998). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación Matemática*, 8(1), pp. 26-39.

OECD. (2019), *PISA 2018 results combinated executIVE summaries volume I, II & IIIoecd.* Recuperado el 20 de agosto de 2020, de https://www.oecd.org/pisa/Combined_Executive_Summaries_PISA_2018.pd

Olivieri, A. y Garbin, S. (2017). *Una experiencia sobre el uso del foro online en cursos de álgebra universitaria: una posibilidad para favorecer las competencias de comunicación y argumentación*. Recuperado el 20 de agosto, de https://www.researchgate.net/publication/334230840_UNA_EXPERIENCIA_SOBRE_EL_USO_DEL_FORO_ONLINE_EN_CURSOS_DE_ALGEBRA_UNIVER

SITARIA_UNA_POSIBILIDAD_PARA_FAVORECER_LAS_COMPETENCIAS_DE_COMUNICACION_Y_ARGUMENTACION

Palafox, J. (2018). PISA. Análisis comparado 2000 a 2015. Indicios esperanzadores. *Voces De La Educación*, 3(5), pp. 136-169.

Rivas, A. y Scasso, M. (2017), *Centro de implementación de políticas públicas para la equidad y el crecimiento.* Recuperado el 20 de agosto de 2020, de https://www.cippec.org/wp-content/uploads/2017/12/DT-Que-paises-mejoraron-en-PISA-vf.pdf

Sorando, J. M. (2002). ¿Os acordáis de los conjuntos? *Suma*, 39, pp. 121-121.

Malesani. Arturo
Licenciado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar.
Email: arturomalesani.8@gmail.com
Direccción: Via Alessandro Prosdocimi, 42 INT.8. Italia. Este (PD).Cap. 35042.

Garbin. Sabrina:
Doctora en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales (UAB-España) ,Profesora Titular Jubilada del Dpto de Matemáticas Puras y Aplicadas de la USB Venezuela con línea de investigación: Desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado y transición del Pensamiento Matemático Elemental al Avanzado. Email: sgarbin@usb.ve
Dirección: Calle Fernán González 65, 5B. Madrid. España.