REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-20

https://union.fespm.es

Acrisolado de tipologías de errores en demostraciones geométricas de futuros profesores en matemática

Marcela Götte, Ana María Mántica

Fecha de recepción: 2/08/2020
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen	Se detectan y analizan errores de los alumnos del profesorado en Matemática en el trabajo con demostraciones geométricas que involucran particularmente los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. A partir del acrisolado de categorías anteriores se redefinen y agrupan en cuatro tópicos. Uno de ellos atiende a cuestiones generales referidas a la escritura en el lenguaje matemático, otros dos referidos a las cuestiones de la prueba en matemática (los fundamentos de la acción de demostrar y la demostración en sí misma) y por último uno que expone cuestiones referidas al empleo de analogías en el trabajo geométrico. **Palabras clave**: errores, geometría 3D, futuros profesores, paralelismo, perpendicularidad
Abstract	Errors of the students of the teacher in Mathematics are detected and analyzed, in the work with geometric proofs that particularly involve the concepts of parallelism and perpendicularity. Refining previous categories we redefine them and group them into four topics. One of them addresses general issues related to writing in mathematical language, two others referred to the issues of the proof in mathematics (the basis of the action to demonstrate and the demonstration itself) and finally one that raises issues relating to the use of analogies in geometric work. **Keywords**: errors, 3D geometry, prospective teachers, parallelism, perpendicularity
Resumo	Detectam-se e analizam-se erros dos alunos do professor em Matemática, no trabalho com demonstrações geométricas que envolvem particularmente os conceitos de paralelismo e perpendicularidade. A partir do acrisolado de categorias anteriores redefinem-se e agrupam-se em quatro tópicos. Um deles atende questões gerais referidas à escritura em linguagem matemáticas, outros dois referidos às questões da prova de matemática (os fundamentos da ação de demonstrar e a demonstração em sim mesma) por último um que expõe questões referidas ao uso de analogias no trabalho geométrico. **Palavras-chave**: erros, geometría 3D, futuros professores, paralelismo, perpendicularidade

1. Introducción

> Euclid has been the evil genius particularly for the history of mathematics and for the teaching of mathematics, both on the introductory and the creative levels. I. Lakatos

La enseñanza de la geometría tridimensional, en niveles avanzados, es posterior a la geometría plana y esto trae aparejado la extensión de conceptos y propiedades que se verifican en dos dimensiones (2D), pero no siempre son válidas en la geometría en tres dimensiones (3D). Particularmente este estudio se centra en las relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

Volkert (2008) sostiene que una de las cuestiones a destacar, además del orden de la geometría plana y espacial a lo largo de la escolaridad que comienza con un trabajo intuitivo de la geometría del espacio, es que las relaciones de paralelismo y perpendicularidad ya no son sólo entre rectas.

Previo al estudio que se presenta en este artículo, se realiza un análisis exploratorio, de comparar los conceptos de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en 2D y 3D; de categorizaciones obtenidas de registros sistemáticos de las investigadoras y de referentes teóricos. Se produce, a partir de este análisis, una categorización de errores que consta de siete tipos. Se expresa la tipología en términos del error en lugar de señalar la o las causas que lo provocan ya que, como lo afirma Radatz (1979), es muy difícil hacer una clara separación entre las posibles causas de un error, dado que hay una estrecha interacción entre las mismas.

El trabajo que se expone en este artículo tiene como objetivo detectar y analizar errores cometidos por futuros profesores de matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral en la realización de demostraciones geométricas tridimensionales y categorizarlos.

Para construir dicha categorización se diseña un instrumento con dos problemas que involucran los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D, se analizan las producciones escritas y el audio de las grabaciones realizadas por pares de estudiantes en el marco de un taller al resolver dicha tarea y se catalogan los errores detectados.

Para contribuir a la validez del estudio se realiza una consulta a 4 docentes investigadores universitarios que se desempeñan en profesorados en matemática. El propósito de la misma es determinar si lo que observa el investigador es realmente lo que ocurre.

A partir de los aportes de los referentes teóricos y de las devoluciones de los expertos se purifica la categorización obteniendo una que consta de cuatro tópicos.

Los errores detectados en este estudio corresponden en algunos casos a un conocimiento inacabado y en otros casos son juzgados como lo que se aleja de la resolución correcta, como la manifestación de una práctica que no coincide con lo aceptado por la comunidad matemática. Por esto, es que se considera al error como una práctica que lleva inherente conceptos equivocados o procedimientos inacabados, que se visualizan a través de la producción de los estudiantes.

Marco metodológico

Esta es una investigación cualitativa, “es un estudio en profundidad con el uso de técnicas cara a cara para la recogida de los datos en su entorno natural” (McMillan y Schumacher, 2005: 620). Estos autores sostienen que el estudio cualitativo ayuda a los lectores a entender las perspectivas múltiples de la situación según las personas estudiadas por lo cual es de índole etnográfico, lo que implica que se busca tener en cuenta la subjetividad en el análisis e interpretación de los datos.

Una característica de este tipo de investigación es que los datos estudiados están expresados en palabras, frases y afirmaciones antes que datos numéricos. Un empleo cuidadoso, de estos datos, proporcionará resultados replicables e información válida de los fenómenos estudiados (Mc Knight, Magid, Murphy y Mc Knigt, 2000). Según McMillan y Schumacher (2005) la investigación cualitativa utiliza principalmente razonamiento inductivo para sugerir una interpretación de una situación particular.

En esta investigación se emplean los datos producidos por estudiantes de la cátedra Geometría Euclídea Espacial, asignatura del primer cuatrimestre de tercer año del profesorado en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Los alumnos tienen además de los conocimientos previos de la escolaridad obligatoria, experiencias en este nivel en temas de geometría Euclídea y en métodos de demostraciones deductivas proporcionados por cátedras cursadas anteriormente, de esta carrera estructurada cuatrimestralmente en cinco años.

En una **primera etapa** de la investigación se realiza una categorización a partir del análisis de documentos, exámenes parciales individuales escritos de los alumnos de la cátedra Geometría Euclídea Espacial (GEE), y tipologías disponibles sobre errores. Esta consta de los siguientes tipos:

Imprecisión en la redacción de la demostración o notación matemática o geométrica en particular (TI): se redactan incorrectamente los pasos de una demostración o se utilizan símbolos o relaciones de la teoría de conjunto en forma incorrecta o simbología propia o se emplean incorrectamente los cuantificadores lógicos.

Determinación incorrecta de la hipótesis o tesis de una proposición (TII): se explicitan incorrectamente la tesis o la hipótesis.

Tratamiento incorrecto de teoremas o propiedades (TIII): errores lógicos, casos en que se utiliza un teorema ya probado, pero se debilitan las condiciones del mismo agregando hipótesis que no se tienen; se considera el recíproco o la inversa de la propiedad que se debería utilizar o se establece un círculo vicioso o se afirma que una proposición es verdadera y falsa sin trabajar con reducción al absurdo.

Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones (TIV): se intenta demostrar un axioma, se lo modifica o se lo contradice o no se respeta una definición acordada.

Demostraciones incompletas (TV): no se justifica un paso de la demostración (agujeros); no se demuestra todo lo que hay que demostrar; se consideran casos accidentales o extremos; se agregan condiciones a los elementos que no se tienen por hipótesis o, se justifica que un objeto no existe porque no se puede hallar por el método por el que se está tratando de construir.

Uso defectuoso de representaciones gráficas en las demostraciones (TVI): se extraen relaciones o emplean elementos de una representación gráfica en la demostración sin justificación o se realiza un dibujo que no representa la situación planteada.

Extrapolación de relaciones a distintos conceptos o propiedades a distintos contextos (TVII): se sacan de contexto propiedades válidas en el plano pero que no lo son cuando los elementos que intervienen no están en un mismo plano. También cuando se mantienen las relaciones (paralelismo, perpendicularidad, incidencia, etc.) que establece un teorema, pero se modifican los elementos (punto, recta, plano) entre los que se establecen esas relaciones.

En una **segunda etapa** se diseña un instrumento con problemas que involucran específicamente a los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D. Se analizan los documentos escritos entregados por pares de estudiantes que realizan un taller en el marco de la cátedra GEE y el análisis del audio de las grabaciones realizadas a dos binomios de estudiantes que resuelven dicha tarea. Los problemas del instrumento son:

1. Sea la siguiente proposición: “Dadas **a** y **b** rectas cualesquiera y A un punto tal que A $\notin$ **a** y A $\notin$ **b**, existe por A un único plano paralelo a las rectas **a** y **b**”. Determinar si es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla. Si es falsa, determinar las condiciones para que sea verdadera y demostrarla.

2. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si un plano α contiene a una recta **a** perpendicular a otra recta **r**, entonces el plano α es perpendicular a la recta **r**.

b) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

c) Dos rectas alabeadas son siempre perpendiculares.

d) Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano α, es perpendicular al plano α.

e) En un tetraedro regular, las aristas alabeadas son perpendiculares.

f) Dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.

Se emplea la tipología presentada para catalogar los errores en las producciones escritas de los dos binomios con el fin de refinarla.

Se realiza, en una **tercera etapa**, una consulta a 4 expertos, docentes investigadores universitarios que se desempeñan en profesorados en matemática y que se vinculan de distintas maneras a la temática de esta investigación. Esta consulta se realiza para determinar si lo que observa el investigador es realmente lo que ocurre, es decir que el error que se establece realmente corresponde a la tipología en la que se encuadra, o si existen errores que no fueron establecidos en la investigación. Estas cuestiones contribuyen a la validez del estudio.

Con las contribuciones realizadas por los expertos, el acrisolado de categorizaciones previas y los aportes de los referentes teóricos se establece una jerarquización en la tipificación de los errores obteniendo una nueva categoría. Ésta no intenta establecer generalizaciones universales, sino que, como toda investigación cualitativa, presenta generalizaciones ligadas al contexto en que se desarrolla (McMillan y Schumacher, 2005).

3. Marco de referencia

En este apartado se seleccionan algunas ideas que sirven de fundamento a este trabajo, específicamente teniendo en cuenta algunas particularidades del quehacer matemático y otras referidas al tratamiento de la geometría tridimensional y de los conceptos geométricos.

3.1. Particularidades del hacer matemático

Respecto a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos Socas (2000) manifiesta que se presentan conflictos entre el uso del lenguaje ordinario y el lenguaje matemático. Un conflicto señalado es el que provoca el uso de términos que tienen un significado en el lenguaje común que difiere del significado en el lenguaje matemático, o cuando el significado del lenguaje común y el matemático es el mismo.

Por otra parte, Radillo Enríquez y Varela (2007) también refieren a la relación entre el lenguaje matemático y el cotidiano y afirman que hay términos que tienen significados que son próximos en ambos lenguajes y otros que son diferentes lo que provoca dificultades en el uso por parte de los estudiantes. Sostienen que el lenguaje "posee un vocabulario, una sintaxis y una notación propia" (p. 265). Además, consideran que realizar una demostración "requiere el pasaje de un planteamiento verbal a una representación gráfica y simbólica" (p. 267). También, que hay términos del lenguaje matemático que requieren más de una condición para expresarlo simbólicamente.

Asimismo, respecto a la cuestión del lenguaje matemático, Ortega y Ortega (2001) manifiestan que en el "lenguaje matemático, las afirmaciones son presentadas de una manera propia, siendo tajantes, con demostraciones de su veracidad, y sin permitir ambigüedades. Todos y cada uno de los símbolos de escritura definidos y utilizados tienen una tarea determinada, exacta" (p. 3). Exponen que la escritura matemática emplea signos que la caracterizan y debe ser conocida por los estudiantes para poder interpretar lo que se quiere expresar con ella.

Dentro de los aspectos notacionales, Weber (2013) resalta que habitualmente los estudiantes ignoran como cuantificar las distintas variables en una proposición. Señala que el estudiante suele recibir mensajes mixtos, dado que en general los libros de texto matemáticos ofrecen en algunos casos una explicación intuitiva, en otros un ejemplo y en otros casos una prueba rigurosa para justificar una proposición, aunque la transición entre pensamiento intuitivo, empírico y riguroso no está explícitamente marcada, esto puede explicar parcialmente por qué los estudiantes presentan argumentos informales como pruebas en cursos avanzados.

Asimismo, Weber (2013) expresa que, aunque los estudiantes estén en un nivel académico en el que saben lo que constituye una prueba y pueden razonar deductivamente, recitar y manipular definiciones, y hacer inferencias válidas, no garantiza que puedan construir nada más que pruebas muy triviales. En sus investigaciones encuentra que los estudiantes universitarios para probar una afirmación B a menudo intentan encontrar algún teorema de la forma *A implica B*, incluso cuando el antecedente no es coherente o no es pertinente en el contexto que se utiliza.

Para Polya (1970)

> la generalización consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya el conjunto limitado. […] la particularización consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño -o incluso de un solo objeto- contenido en el conjunto dado (p. 97).

Respecto de los errores provocados por las analogías, De Castro (2012) advierte los peligros de establecer analogías entre dos situaciones diferentes basadas en características superficiales.

Asimismo, Zaslavsky y Ron (1998) realizan un trabajo en el que exploran la forma en que los estudiantes usan los contraejemplos para refutar una proposición matemática, cómo consideran el empleo de los contraejemplos, de qué manera establecen contraejemplos y cuáles son las dificultades que encuentran al refutar una proposición mediante un contraejemplo. Encontraron que los estudiantes no comprenden que un contraejemplo es suficiente para refutar una proposición y que si una proposición es válida en casos específicos (incluso si son infinitos) esto no garantiza que sea correcta para todos los casos.

Por su parte Selden y Selden (2003) detectan que un error de razonamiento clásico y extremadamente persistente es el uso del inverso del teorema a demostrar. Este error consiste en equiparar una implicación y su contraria. La base de este concepto erróneo parece ser la imprecisión del lenguaje cotidiano. Las personas a menudo usan la construcción "si, entonces" cuando quieren decir "si y solo sí". Cuando alguien dice "si llueve, no iré", a menudo también quiere decir, pero no dice explícitamente, "y si no lo hace, lo haré", que es lógicamente equivalente a lo contrario. Los autores de libros de texto pueden reforzar esta confusión cuando establecen definiciones usando "si", pero en realidad significa "si y solo sí".

3.2. Particularidades del trabajo en geometría

Existen posturas diversas con respecto a si la enseñanza de la geometría del espacio debe preceder a la del plano o viceversa. Freudenthal (1983) ha defendido en múltiples ocasiones la iniciación en geometría a partir de los sólidos. Enuncia diferentes razones: una de ellas es que, tradicionalmente en el nivel elemental, se comienza por la enseñanza intuitiva de la geometría de los sólidos. La otra razón es por considerar a los sólidos como aproximación para las figuras planas. En el análisis fenomenológico de “planos” y “rectas” considera que el entorno figura como contexto a partir del que se pueden constituir objetos mentales iniciales, sobre estos conceptos y sus relaciones como, por ejemplo, el paralelismo y la perpendicularidad.

Alerta sobre las consecuencias que tiene en los estudiantes ejercitarlos sólo en la geometría plana que va en detrimento de la imaginación espacial.

Volkert (2008) propone empezar con un curso de "geometría intuitiva" tomando los objetos tridimensionales de la realidad (pelotas, cajas, envases, etc.) y a partir de ellos determinar las figuras planas (aristas, caras y secciones de los objetos tridimensionales). Esta propuesta es la única manera de conectar las experiencias de los estudiantes con los hechos básicos necesarios para hacer geometría y es completamente al revés de la presentación propuesta por Euclides. Esto se debe a que propone un trabajo intuitivo contrariamente al sistemático formulado por Euclides. El problema se presenta cuando posterior a una enseñanza propedéutica, de manera intuitiva, en estudios superiores se requiere una sistematización de la geometría sólida. Surgen así dificultades intrínsecas de la geometría sólida que obstaculizan esa enseñanza sistemática.

Según Volkert (2008) la geometría sólida es mucho más complicada que su contraparte en el plano dado que, por ejemplo, en la geometría del plano hay sólo un tipo de ángulos mientras que en la geometría sólida hay tres tipos. Así también, la relación de perpendicularidad en el plano se define entre rectas mientras que en la geometría sólida se define entre rectas, entre rectas y planos y entre planos. Alega que la enseñanza de la geometría sólida en la escuela es un tema peligroso. La decisión de Euclides del rigor y del ordenamiento de temas puso a la geometría sólida en el final de los temas tratados, generando una separación estricta entre la geometría del plano y la sólida.

Por otro lado, Cohen (2000) afirma que los conceptos básicos como recta y plano y los conceptos de interrelación entre ellos, como perpendicularidad y paralelismo, son generalmente conocidos en el contexto de la geometría plana. Su extensión al espacio tridimensional no cambia su significado básico, pero se amplía la variedad de posibles relaciones entre ellos. Estas nuevas posibilidades necesitan una capacidad de visualización, que es a menudo bastante limitada en los estudiantes que están acostumbrados a ver todo en un plano. Incluso si los estudiantes son conscientes de la existencia de diferentes planos y direcciones, tienden a ver sólo un plano a la vez. Este tipo de conflictos suele ser un terreno en el que podrían surgir fácilmente conceptos erróneos.

Por otro lado, Vinner (1991) sostiene que cuando escuchamos el nombre de un concepto conocido muy rara vez viene a nuestra mente la definición del concepto, sino que esta palabra nos hace evocar “algo” formado por un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Este “algo” es lo que este autor denomina imagen conceptual. En la formación de conceptos geométricos la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está formada por los diversos dibujos, figuras o representaciones que recuerdan como ejemplo de este concepto junto con el conjunto de propiedades que asocian al mismo.

Para Vinner (1991) la imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociada son todas relevantes. En la formación de la imagen de un concepto juegan un papel importante, la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como extraescolarmente.

Expresa que la actividad de los estudiantes está basada sólo en sus imágenes del concepto y que la definición es inactiva o no existe.

4. Análisis y resultados

4.1. Consulta a expertos

La producción escrita del cuestionario presentado en la segunda etapa, realizado por dos pares de estudiantes de la cátedra GEE, se envía a cuatro expertos. Además, se anexa un recorte de la tipología presentada, particularizando los tipos de errores que se quiere discernir, dado que hay categorías que no presentan demasiados inconvenientes para distinguirlas y con el fin de no hacer excesiva la tarea de los expertos. Se envían sólo tres de las siete categorías, a saber, la TIII, TV y TVII, informándoles que la categorización completa consta de siete. Además, un archivo que contiene los valores de verdad de las proposiciones del cuestionario.

Se presenta a continuación una tabla que contiene la síntesis del tipo de error detectado por cada uno de los expertos en cada problema del cuestionario.

	E1(M)	E2(MS)	E3(G)	E4(F)	E5	%
P1	III	III		III	III	75
	V	V	V	V	V	100
	VII			VII	VII	50
P2a	**No responde a estos ítems.**		**III**		**III**	**33**
		V		**V**		**0**
						-
P2b			**III**	**III**	**III**	**66**
		V		**V**	**V**	**66**
		VII	**VII**	**VII**	**VII**	**100**
P2c		**III**	**III**	**III**		**0**
		V			**V**	**33**
						-
P2d		**III**		**III**	**III**	**66**
			V		**V**	**33**
						-
P2f				**III**	**III**	**33**
		V	**V**			**0**
		VII			**VII**	**33**

Tabla 1. Cuadro síntesis de respuestas de expertos

Cada columna corresponde a un experto, caracterizado con la inicial de su nombre, que se numeran del 1 al 4. La columna 5 corresponde a la categorización realizada por las autoras y la última columna es el porcentaje de coincidencia entre lo obtenido por los expertos y las autoras. Cada fila corresponde a cada uno de los problemas del cuestionario.

Al analizar las respuestas de los expertos y el resumen de la tabla se visualizan las siguientes cuestiones:

- Los errores considerados por los expertos coinciden con los de la tipología propuesta. Los expertos explicitan errores que no se les dio de la tipología, como por ejemplo el TI (errores de notación) y TIV (tratamiento incorrecto de definiciones).

- En el problema 2a y 2f los expertos exponen que se presenta el error TV y en el problema 2c suponen el error TIII el cual no ha sido considerado de este modo la categorización enviada. Respecto al problema 2a los dos expertos que consideran TV aluden en los comentarios al mal uso de la definición de recta perpendicular a un plano. El error al que aluden referido al mal empleo de las definiciones corresponde a TIV de la tipología, el cual no estaba disponible en la categoría entregada a los expertos, no obstante, por los comentarios explicitados se infiere qué error están considerando. Este error está en la categorización propuesta. En el problema 2f los dos expertos que consideran TV aluden a que es un caso particular por considerar rectas secantes, lo que podría encuadrarse en un caso particular del recíproco de la proposición dada. En el problema 2c los estudiantes justifican que la proposición es falsa empleando un teorema, es decir, consideran que para que sea verdadero deben tenerse las hipótesis de un teorema dado en la cátedra. Los expertos consideran este error proveniente de cuestiones lógicas y en nuestra categorización se considera una justificación incompleta.
- Uno de los expertos manifiesta utilizar otra definición de paralelismo entre rectas y planos (las rectas incluidas en un plano las considera paralelas al plano) lo cual le ocasionó inconvenientes para catalogar los errores dados.
- Otro de los expertos cuestiona el teorema de perpendicularidad entre recta y plano: *Si una recta es perpendicular a un plano, lo es a toda recta de éste.* Pregunta si las rectas consideradas deben pasar por el pie de la perpendicular.
- El tratamiento incorrecto de teoremas y propiedades (TIII) en algunos casos es considerado por los expertos como demostraciones incompletas (TV), lo cual se manifiesta en los comentarios realizados.

Con los aportes de los expertos y de las categorizaciones presentadas hasta el momento se decide revisar, depurar, reorganizar y perfeccionar la tipología. No se contemplan nuevos errores dado que los expertos no lo proponen y además no se considera necesario. Sin embargo, se establece una jerarquización en la tipificación de los errores atendiendo particularmente a los comentarios realizados por los expertos y al acrisolado generado en las etapas anteriores.

4.2. La tipología

A partir de sucesivas revisiones de las categorías anteriores se vuelven a redefinir, agrupándolas en cuatro tópicos con subtipos en cada una. Uno de ellos atiende a cuestiones generales referidas a la escritura en el lenguaje matemático, otros dos referidos a las cuestiones de la prueba en matemática - por un lado, a los fundamentos de la acción de demostrar y por otro a la demostración en sí misma- y por último uno que expone cuestiones referidas al empleo de analogías en el trabajo geométrico.

- ✓ El lenguaje matemático. T1
  - Redacción incorrecta. T1.a
  - Uso incorrecto de la simbología matemática. T1.b
- ✓ Lo fundamental de la *demostrabilidad*. T2
  - Determinación incorrecta de hipótesis o de tesis. T2.a

- Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones. T2.b

✓ Lo esencial de la demostración. T3

- Ejemplijismo. T3.a
- Quasilogismo. T3.b
- Cuasisofisma. T3.c

✓ Las analogías entre conceptos o propiedades. T4

- Aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D. T4.a
- Falsos dilemas. T4.b
- Extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades. T4.c

Dado que un mismo problema puede dar lugar a errores de diferentes fuentes y el mismo error puede surgir de diferentes procesos de resolución del problema es que se intenta hacer hincapié en la descripción del error en la forma lo más fiel posible.

T1. El lenguaje matemático

Se considera dentro de este tipo a los errores de redacción o escritura en las demostraciones o el uso erróneo del lenguaje propio de las matemáticas. Se recalca que los estudiantes son alumnos avanzados del profesorado en matemática por lo que no es sólo una cuestión formal considerar estos errores sino de adecuación al nivel académico en que se encuentran. Se toman como elementos característicos los siguientes dos subtipos:

T1.a. Redacción incorrecta

Se señala dentro de esta categoría la redacción incorrecta de algunos pasos o fragmentos de una demostración o utilización de escritura propia (no convencional) sin aclararla o uso de expresiones del lenguaje común que no se corresponden en el matemático. De la lectura completa de la escritura puede interpretarse lo que el estudiante quiere establecer, aunque se considera que no es la forma apropiada.

- Por ejemplo, se establece que una recta es perpendicular a otra porque está incluida en un plano que *contiene* a todas las perpendiculares a esa recta. Es incorrecto decir que el plano contiene a todas las perpendiculares sin enunciar que todas tienen un punto en común.
- Se evidencia el uso de notaciones propias sin aclararlas previamente (indican que las rectas **r** y **a’** son secantes escribiendo **r**∩**a’**).
- Emplean la frase *no tienen ningún punto en común* para indicar la relación entre dos rectas cruzadas. Esta expresión se refiere al lenguaje común ya que desde el lenguaje especializado (en lógica) es lo mismo que decir que las rectas son coincidentes, contrario a lo que afirman.

T1.b. Uso incorrecto de la simbología matemática

Se incluye en esta categoría la consideración en forma incorrecta de relaciones de pertenencia, inclusión, etc. También se considera en este subtipo el uso incorrecto de los cuantificadores lógicos, tanto su escritura o falta de ellos como la interpretación de su significado.

- Por ejemplo, se escribe simbólicamente que una recta pertenece a un plano, que un plano está incluido en una recta o que un punto está incluido en una recta respectivamente.
- Se emplea incorrectamente el cuantificador lógico *para todo*, ya que de la proposición: existen *infinitos* planos que pasan por la recta **a** y son perpendiculares a un plano π se deduce que *todo* plano que pasa por la recta **a** es perpendicular al plano π. Se considera como expresiones equivalentes a *infinitos* y *todo*.

T2. Lo fundamental de la *demostrabilidad*

Se utiliza el término "*demostrabilidad*" aludiendo a los cimientos de la acción o proceso de demostrar. Se consideran aquí como bases de esta acción: hipótesis y tesis de la proposición, axiomas y definiciones acordadas.

Se toman los siguientes dos subtipos:

T2.a. Determinación incorrecta de hipótesis o de tesis

Muchas veces las proposiciones están enunciadas en términos de una implicación, donde la primera parte es la hipótesis y la segunda es la tesis, pero en otras ocasiones no es directo establecer estos elementos por el lugar que ocupan en la proposición. Se consideran errores de este tipo cuando se explicitan incorrectamente las hipótesis o la tesis de la propiedad que se pide demostrar o cuando no se distingue entre la hipótesis y la tesis. También cuando no se utiliza la hipótesis ya que esto denota que no se reconoce su función en el proceso de demostrar o cuando no se demuestra todo lo requerido en la proposición. Asimismo, se incluye dentro de esta categoría a las justificaciones en las que se debilitan las condiciones de la hipótesis de un teorema.

Por ejemplo, se ignora en la demostración parte de la tesis de la propiedad. O se escribe en la hipótesis '**a**, **b** rectas' y en la tesis '**a** y **b** son perpendiculares si por **a** o por **b** se puede trazar un plano perpendicular a **b** o a **a** respectivamente'. Se evidencia que no se distingue cuál es la hipótesis y cuál es la tesis.

T2.b. Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones

Los conceptos trabajados en Geometría Euclídea forman parte de una amplia red de relaciones que los ligan, lo que conlleva una diversidad de organizaciones posibles de esos conceptos. Los axiomas y definiciones pueden variar de un texto a otro, pero una vez establecidos no deben quebrantarse. Respecto al tratamiento de los axiomas, se detallan errores donde no se respeta su condición, ya sea porque se los quiere demostrar o se los contradice. Se considera también en este subtipo la transgresión de definiciones acordadas.

T3. Lo esencial de la demostración

Se considera como *lo esencial de la demostración* a la resolución del problema dado y a la justificación del encadenamiento realizado para justificar la validez del razonamiento. Se incluye en esta categoría de errores a aquellos que involucran una transgresión a los requerimientos de una demostración en el nivel académico de los estudiantes, particularmente en lo referido al empleo de los ejemplos en la justificación de las afirmaciones, a las inferencias y a lo completo e ilación de las justificaciones en las demostraciones. Se consideran tres subtipos:

T3. a. Ejemplijismo

Esta palabra surge de relacionar el término espejismo (apariencia engañosa de algo) con ejemplo y decidir. Por un lado, al no poder encontrar un ejemplo para decidir la existencia de un objeto, los estudiantes exponen que el objeto no existe y por otro lado sostienen que una proposición es falsa citando un teorema con otra tesis, en lugar de utilizar un contraejemplo.

T3.b. Quasilogismo

Esta palabra surge para considerar los argumentos que en apariencia corresponden a una ley lógica. Se considera en este subtipo a los errores en que se realizan razonamientos que no son válidos. Por un lado, se toman los casos en los que se vulnera alguna regla de inferencia o ley lógica y por otro donde se produce un círculo vicioso. Se incluye también en este subtipo al error de considerar el recíproco de la propiedad dada, ya que, si bien no se vulnera una ley de inferencia, se considera que se desconocen las equivalencias entre una proposición y las asociadas a ella (contrarrecíproco, recíproca e inversa).

T3.c. Cuasisofisma

Esta palabra surge para considerar los argumentos que son exiguos para justificar un razonamiento. Se considera un error de este tipo cuando hay un “agujero” en la demostración, es decir, falta justificar algún paso en el encadenamiento lógico. En ocasiones, aunque no se justifique, la implicación es correcta si bien queda en manos del lector establecer las razones por lo cual esto es así, mientras en otras la implicación es válida en ciertos casos excepcionales. Por esta razón también se incluye aquí a los casos particulares, es decir, casos donde no se tienen en cuenta todas las condiciones relativas entre los conceptos que se involucran o donde se ignora una parte de la tesis. También se considera dentro de esta categoría a los errores donde el estudiante utiliza una representación gráfica para justificar una proposición, haciendo referencia explícita a un dibujo o evocando a uno, sin otra justificación formal.

T4. Las analogías entre conceptos o propiedades

Muchos aprendizajes extraescolares se realizan por semejanzas, buscando parecidos, aplicando lo que funciona en una “cosa” a otra “cosa” similar. También en la escuela se utiliza esta metodología de anclar a las estructuras conocidas los conceptos nuevos para sentirse seguro. Las analogías favorecen la habilidad para transferir conocimientos de unos dominios a otros, pero a veces se quebrantan o se ignoran los límites de aplicabilidad, realizando interpretaciones inadecuadas. Se consideran tres subtipos dentro de esta tipología:

T4.a. Aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D

Se cataloga a errores como de este tipo cuando se sacan de contexto propiedades válidas en el plano pero que cuando los elementos que intervienen no están en un plano dejan de serlo. Por ejemplo, en el plano, por un punto existe una única recta perpendicular a otra, en cambio en el espacio existen infinitas rectas perpendiculares a otra por un punto. Similar a esta propiedad es la unicidad de la mediatriz de un segmento que es válido en el plano, pero no en las tres dimensiones. También en el plano si una recta corta a otra, corta a todas sus paralelas, pero en 3D no es verdadera esta propiedad.

T4.b. Falsos dilemas

Se toma la expresión *falso dilema* cuando se considera en la demostración una proposición alternativa, que no se corresponde con la proposición a demostrar. Se considera dentro de esta categoría a los errores en los cuales se suplanta la proposición a demostrar por otra que involucra relaciones o conceptos similares pero que no es lógicamente equivalente a la dada. Por ejemplo en varios casos, ante el requerimiento de demostrar que “dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra”, se reemplaza por la propiedad “Dadas dos rectas cruzadas **r** y **s**, si por una de ellas **r** se puede trazar un plano α perpendicular a **s**, por ésta se puede trazar un plano β perpendicular a **r**” que es un teorema que se presenta y demuestra en el libro de texto, que tiene elementos similares a los de la proposición dada pero que no es equivalente a la misma.

T4.c. Extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades

Se incluye en esta categoría a los errores donde se extrapolan sin control o sin justificación propiedades que cumple una parte o subconjunto al todo o universo o viceversa, es decir, del todo a cada una de las partes. Asimismo, se considera un error de este tipo cuando se extiende la demostración a otros casos similares sin analizar su adecuación. Por ejemplo, se asevera que una recta es perpendicular a un plano por ser perpendicular a una recta incluida en dicho plano, extendiendo la propiedad de un subconjunto del plano (una recta) a todo el plano. Algo similar ocurre al considerar que si un punto es exterior a dos rectas coplanares es exterior al plano que éstas determinan.

5. Conclusiones y perspectivas

Retomando el objetivo de este artículo que es categorizar los errores cometidos por estudiante del profesorado en matemática al resolver problemas de geometría en 3D comenzamos expresando la relación entre las dos tipologías que se presentan.

		TI.	TII.	TIII.	TIV.	TV.	TVI.	TVII.
T1	A	✓						
	B	✓						
T2	A		✓			✓		
	B				✓			
T3	A					✓		
	B			✓				
	C					✓	✓	
T4	A							✓
	B			✓				
	C							✓

Tabla 2. Relación entre tipologías

Teniendo en cuenta los referentes considerados en el marco de referencia y el análisis del instrumento presentado, se exponen conclusiones y discusiones referidas a las cuestiones particulares que se toman en la tipología final de este estudio. Se consideran para ello tres apartados, uno referido a lo que involucra al *lenguaje matemático*, otro referido a la *prueba en matemática* y finalmente una concerniente a las *analogías en el trabajo geométrico*. Estos apartados se originan en función de ordenar la lectura de estas conclusiones, no obstante, se finaliza estableciendo relaciones entre ellos ya que hay cuestiones que los atraviesan.

5.1. Respecto a El lenguaje matemático

Se evidencian dos aspectos referidos a la estructura propia del lenguaje matemático. Un aspecto refiere al empleo de los términos propios de la disciplina y otro a la estructura y a la presentación de los contenidos.

Socas (2000), Radillo Enríquez y Varela (2007), Ortega y Ortega (2001) y Weber (2013) destacan la particularidad de la simbología matemática que permite expresar sin ambigüedades, con precisión y rigurosidad las afirmaciones de esta disciplina. Señalan que los símbolos en matemática tienen un significado preciso que debe ser conocido por los estudiantes, lo cual no siempre ocurre. El deficiente uso de esta característica se presenta en la tipología final como *uso incorrecto de la simbología matemática.*

En el estudio se evidencia el mal uso de los símbolos en cuanto a la relación entre *elementos* y *conjuntos* o entre *conjuntos* tanto en la escritura simbólica como coloquial. Además, respecto del uso de cuantificadores se visualiza por un lado la omisión y por otro el mal uso de ellos.

Se detecta, asimismo, que algunos sujetos consideran como expresiones equivalentes a *infinitos* y *todo* (Zaslavsky y Ron, 1998). Por otro lado, Radillo Enríquez y Varela (2007) señalan que hay conceptos matemáticos que requieren más de una condición para expresarlo simbólicamente. En la proposición “dos rectas **r** y **s** son perpendiculares si por una de ellas **r**, se puede trazar un plano β perpendicular a la otra **s**”, considerada por los estudiantes involucrados en esta investigación, está implícito que existe un plano β que contiene a la recta **r** y es perpendicular a **s.** Al expresar esta propiedad los alumnos omiten considerar este cuantificador existencial y de lo escrito, se establece que cualquier plano que contenga a la recta **r** será perpendicular a la recta **s**, lo cual es incorrecto.

En cuanto a la precisión del lenguaje y a la rigurosidad de la presentación de los enunciados, Ortega y Ortega (2001) y Weber (2013) señalan que ambas están supeditadas al nivel académico de los estudiantes. En esta investigación, los sujetos son estudiantes avanzados del profesorado en matemática, por lo cual es pertinente tener especialmente en cuenta este aspecto en la tipología.

Otra característica destacada por Socas (2000) y por Radillo Enríquez y Varela (2007) es que en el lenguaje usual hay términos que tienen el mismo significado y otros que tienen diferente significado al matemático, lo cual provoca un conflicto ya sea para distinguirlos o para determinar que el significado es efectivamente el mismo. El lenguaje ordinario no requiere de la misma precisión que el lenguaje matemático para ser comprendido. Las irregularidades respecto a particularidades referidas a la escritura de las demostraciones y la influencia del lenguaje cotidiano sobre el uso que hacen los estudiantes del lenguaje matemático se presentan en la tipología final bajo la denominación de *redacción incorrecta*.

En el estudio se encuentra la expresión *rectas cruzadas* con un significado del lenguaje común, distinto al que refiere el libro de texto de la cátedra para denominar a las rectas alabeadas. Usualmente los estudiantes emplean este término para designar, por ejemplo, a calles que se cortan. En matemática este término refiere a rectas no coplanares y por tanto que no se intersecan.

Asimismo, a la expresión -*no tienen ningún punto en común*- para indicar la relación entre dos rectas cruzadas, los estudiantes la emplean según la acepción del lenguaje común. Desde el lenguaje de la lógica esta expresión indica que las rectas son coincidentes, pues es una doble negación, contradiciendo el concepto de rectas cruzadas.

Además, el vocablo “un” es interpretado en ocasiones como artículo y en otras ocasiones como pronombre numeral cardinal. Este error se evidencia cuando los estudiantes deducen que dos rectas con *un* punto en común son secantes. El “un” que los estudiantes utilizan es pronombre numeral cardinal y ellos lo emplean como artículo, dado que dos rectas con un punto común (*un* con acepción artículo) pueden ser coincidentes dado que, según esta acepción, podrían tener más de uno.

5.2. Respecto a la *Prueba en matemática*

Weber (2013) presenta a la prueba como un problema a resolver por los estudiantes universitarios pues sostiene que éstos necesitan estrategias y heurísticas que le ayuden a decidir cómo encararlas. Las irregularidades respecto a particularidades referidas a la prueba en matemática se consideran en la tipología final bajo la denominación de *lo fundamental de la demostrabilidad*, que refiere a los fundamentos de la acción de demostrar, y de *lo esencial de la demostración*, que refiere a la demostración en sí misma.

Para resolver un problema de demostrar una proposición es necesario mostrar de un modo concluyente la exactitud de la proposición enunciada. Para esto, es imprescindible determinar los elementos estructurales que son la premisa y la conclusión, es decir, establecer hipótesis y tesis. Si bien no es requerimiento de la consigna explicitar hipótesis y tesis en los problemas de los instrumentos analizados, se vislumbran los errores en torno a esta cuestión a través del análisis de la demostración o de lo escrito, si lo hacen.

En el estudio se presentan errores donde se ignora en la demostración parte de la tesis de una propiedad o donde hipótesis y tesis enunciadas no se corresponden con la proposición dada o donde no se puede distinguir cuál es la hipótesis y cuál es la tesis. También se encontró que parte de la hipótesis no se utiliza en la resolución del problema.

Se considera también en este punto el aspecto referido al uso defectuoso de definiciones y de axiomas o postulados (Weber, 2013 y Selden y Selden, 2003).

En un concepto confluyen imágenes, impresiones, experiencias, representaciones, ejemplos, propiedades intrínsecas y la definición. La definición establece condiciones necesarias y suficientes que quedan ocultas muchas veces en las definiciones al emplear el “si” cuando en realidad significa “sí y sólo sí”. Todas estas características generan tensiones en el uso del concepto al punto que muchas veces los estudiantes no pueden describir el concepto con sus propias palabras o no pueden presentar ejemplos o transgreden o contradicen las definiciones como se evidencia en este trabajo.

Específicamente la definición que algunos alumnos toman de rectas, recta y plano o planos paralelos no condice con la definición acordada al considerar que la intersección puede no ser vacía. En este sentido, uno de los expertos consultados manifiesta el esfuerzo demandado al catalogar los errores ya que considera una definición (respecto al paralelismo) distinta a la convenida. Es habitual que ambas definiciones coexistan en los textos de geometría de nivel superior. Considerar una u otra definición puede modificar las condiciones que se deben imponer al establecer el valor de verdad de una de las proposiciones analizadas en los instrumentos de esta investigación. En ocasiones, los estudiantes consideran las representaciones disponibles que pueden no coincidir con la definición acordada.

También dentro de los errores que surgen en este trabajo están los referidos al uso incorrecto de axiomas. Se encuentra que los estudiantes en unos casos contradicen o transgreden los axiomas o los desconocen o intentan demostrarlos. Este error se visualiza entre otros, en el caso de un alumno que determina un plano tomando una recta y un punto de ella, ignorando el axioma de determinación del plano o en otro alumno que pretende demostrar que dos puntos están alineados.

Para el segundo aspecto, lo *esencial de la demostración,* se consideran errores que involucran una transgresión a los requerimientos de una demostración según el nivel académico en el que se realiza este estudio. Se consideran particularmente tres subtipos, uno que refiere al empleo de los ejemplos en la justificación de las proposiciones, otro a las inferencias y por último el que alude a lo completo e ilación de las justificaciones en las demostraciones. Weber (2013) sostiene que los estudiantes universitarios no pueden construir una prueba sin solicitar ayuda al profesor, aunque se les brinde una sugerencia para comenzar. Sus estrategias, en general, son ineficaces y rudimentarias. Se instituyen en este trabajo los términos ejemplijismo, quasilogismo y cuasisofisma con el fin de englobar distintas acciones sobre aspectos propios de la demostración.

En el análisis realizado se detecta que los estudiantes concluyen que un objeto buscado no existe dado que intentan construirlo por un método y no lo logran. Se presenta el caso en que dicen que no hay plano paralelo a dos rectas cruzadas ya que no pueden construir un plano con dichas rectas. Así la imposibilidad de determinar ese plano lo alegan a la imposibilidad de existencia del plano determinado por esas rectas cruzadas.

En algunos casos, en los instrumentos analizados en este estudio, para justificar que una proposición es falsa no se emplea un contraejemplo, sino que la justifican aludiendo a un teorema en el que coincide la conclusión, aunque las premisas consideradas no son coherentes con las premisas de la proposición a justificar (Weber, 2013). Cuando se pretende fundamentar que no todas las rectas alabeadas son perpendiculares, se justifica con la condición que deben cumplir dos rectas alabeadas para ser perpendiculares. Los estudiantes no consideran la especificidad del contraejemplo como forma de refutar una proposición (Zaslavsky y Ron, 1998).

Se consideran, por otro lado, en la tipología final, errores que vulneran leyes lógicas (Zaslavsky y Ron, 1998; Weber, 2013 y Selden y Selden, 2003). Se presenta, en ocasiones, el empleo incorrecto de la regla de inferencia Modus Ponens donde se afirma el consecuente para concluir el antecedente lo cual es un razonamiento fallido, tanto con proposiciones cuantificadas como no cuantificadas. Asimismo, utilizan en una demostración una propiedad que es posterior a la dada, lo que algunos de estos autores denominan círculo vicioso o tautología. Por otra parte, los estudiantes presentan un error de razonamiento clásico y muy persistente como es el probar el recíproco del teorema que se debe demostrar.

Se manifiestan también errores que refieren a argumentos que son exiguos para justificar los pasos de un razonamiento (Zaslavsky y Ron, 1998)

Respecto a los agujeros en las demostraciones, es decir, cuando basan una demostración en proposiciones implícitamente admitidas en el razonamiento y no son previamente establecidas, hay distintos tipos. Por un lado, cuando no se justifica un paso en una demostración puede ocurrir que la implicación sea correcta, porque es válida, pero en otros casos la implicación no es válida. En el primer caso, el agujero puede pasar desapercibido en la lectura o corrección de esa demostración. Consideramos también dentro de los cuasisofismas los casos particulares. Este tipo de agujero en la demostración se presenta ya que se omite demostrar algún caso o no se justifica por qué se seleccionan éstos y no otros.

Los estudiantes usan argumentos intuitivos y empíricos para probar todo tipo de proposiciones. Se basan en ejemplos y casos individuales, por ello se considera dentro de esta particularidad, el error cuando se hace referencia explícita a un dibujo realizado.

5.3. Respecto a las *Analogías en el trabajo geométrico*

Las analogías, procedimientos que usualmente se emplean para adquirir prácticas o experiencias de la vida cotidiana, favorecen la habilidad para transferir conocimientos de un dominio fuente a un dominio meta. En esta transferencia a veces se quebrantan o se ignoran los límites de aplicabilidad, realizando recuperaciones o extrapolaciones inadecuadas. Las generalizaciones o particularizaciones en lo referido a la geometría en 2D y 3D se realiza, en ocasiones, sin la debida vigilancia conceptual lo que provoca errores que en esta tipología se consideran bajo los aspectos de *aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D*, *falsos dilemas* y *extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades* (De Castro, 2012; Polya, 1970; Volkert, 2008; Cohen, 2000)

Respecto a las propiedades de perpendicularidad entre rectas, los alumnos en general las visualizan en un plano. La propiedad -*Por un punto pasan infinitas rectas perpendiculares a otra recta*- es válida en cada uno de los infinitos planos que existen, pero los estudiantes ignoran que están en ese contexto tridimensional (se quedan en el plano), no logran una real fusión entre el concepto de perpendicularidad y las imágenes disponibles. Esto muestra que la experiencia y la intuición son inherentes a la geometría aún en niveles avanzados de estudio y el hábito de trabajar tantos años en 2D es muy fuerte y hace que los estudiantes no puedan desapegarse de este concepto de rectas perpendiculares.

Lo mencionado sintoniza con lo que se consideran *falsos dilemas* dado que hasta el momento de comenzar el estudio de la geometría en 3D, tercer año de la carrera, las rectas perpendiculares siempre fueron rectas secantes y esta relación de perpendicularidad se estableció sólo entre rectas. Cohen (2000) sostiene que la extensión en el espacio tridimensional del concepto de perpendicularidad no cambia su significado base, pero amplía las posibles relaciones entre ellos. Subraya además que la capacidad de visualización muchas veces es limitada y es propio con lo que los estudiantes están acostumbrados a ver en el plano.

5.4 Respecto a *cuestiones transversales*

El nivel académico de los estudiantes que forman parte de este estudio exige una geometría sistemática. La sistematización de la geometría genera polémica entre diversos autores respecto a la pertinencia de comenzar el estudio de la geometría 2D antes que la 3D o viceversa.

Autores como Volkert (2008) y Freudenthal (1983) recomiendan comenzar la enseñanza por una geometría intuitiva tomando objetos tridimensionales de la realidad y a partir de ellos ir a la geometría 2D. Cuando posterior a esa enseñanza intuitiva se requiere de una sistematización de la geometría tridimensional aparecen conflictos propios de ésta, respecto a su enseñanza formal. En este estudio se presenta esta particularidad ya que la pluralidad de las posibles relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre elementos, que se amplía en 3D, hace que aparezca exacerbado el uso de propiedades similares, equivalentes o no, donde intervienen los elementos y relaciones pero que no respetan hipótesis o tesis de la proposición dada.

El ordenamiento habitual para la enseñanza superior comienza con la geometría 2D y separada de la del espacio. Esto afecta a definiciones de algunos conceptos geométricos particularmente referidos a la relación de paralelismo pues al definir rectas paralelas se establece que estas rectas tienen intersección vacía, pero es tácito, en general, que son coplanares dado que no puede suceder otra posibilidad en el plano. En 3D, esta condición tácita genera conflictos con la definición de rectas paralelas y rectas alabeadas.

Por otro lado, la formación de los conceptos geométricos se ve atravesada por diversos aspectos, en particular las definiciones por expresiones que no se corresponden con el lenguaje cotidiano. En especial, el empleo de la expresión *sí* en el lenguaje cotidiano se interpreta como *sí y solo sí,* aunque no lo sea. En una definición formal, en ocasiones se refuerza esta interpretación incorrecta dado que se utiliza la expresión *sí* cuando en realidad significa *sí y solo sí.* Este empleo erróneo se extiende en proposiciones que no son bicondicionales y son tomadas como tal o en el empleo equivocado del recíproco de la propiedad dada (Selden y Selden, 2003).

Asimismo, es habitual que los estudiantes consideren que si una proposición es válida en casos específicos lo es para todos los casos, es decir extienden la propiedad que cumple un conjunto de objetos al todo. Esto se evidencia cuando se consideran expresiones equivalentes a *infinitos* y *todo*. Es decir, el mal uso de los cuantificadores lleva a generalizaciones que no siempre son correctas (Zaslavsky y Ron, 1998; Polya, 1970).

El interés por el estudio de las particularidades de la enseñanza de la geometría tridimensional es una temática en agenda de investigación en educación matemática. Se destacan, por ejemplo, los estudios de Ramírez Uclés, Flores Martínez y Ramírez Uclés (2018) que identifican errores específicos de la argumentación visual y derivados del uso incorrecto de los elementos de razonamiento, contenidos y procedimientos matemáticos.

Algunas líneas con las que se puede continuar profundizando en temáticas derivadas de esta investigación son:

- Estudiar las relaciones entre dificultades y errores.
- Realizar una categorización detallada de las dificultades de estudiantes de profesorado en matemática que surgen en geometría 3D.
- Analizar en forma minuciosa las definiciones y sus implicaciones. Establecer definiciones equivalentes.

Bibliografía

Cohen, N. (2000). Misconceptions in 3-D Geometry Basic Concepts. En P*roceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychological of Mathematical Education*. Hiroshima: Japan.

De Castro, C. (2012). *Estimación en Cálculo con Números Decimales: Dificultad de las Tareas y Análisis de Estrategias y Errores con Maestros en Formación* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España. https://www.researchgate.net/publication/280132066

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Mc Knight, C., Magid, T., Murphy, E. & Mc Knigt, M. (2000). Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician. Rhode Island: American Mathematical Society.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa. Una introducción conceptual*. Madrid: Pearson Educación.

Ortega, J. F. y Ortega, J. A. (2001). Matemáticas: ¿Un problema de lenguaje? Rect@. Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA Recuperado el 8 de febrero de 2016.de https://doaj.org/article/983f0ead221340a084f82d2f87012d9b

Polya, G. (1970). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Trillas.

Radatz, H. (1979). Error analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics*, *6*, 163-172.

Radillo Enríquez, M. y Varela, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático. En R. Abrate y M. Pochulu (Comps.) *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*, 263-280. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Ramírez Uclés, R; Flores Martínez, P, y Ramírez Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 21 (1), 29-56. http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-21/numero-21-1/351-201802a

Selden, A. & Selden, J. (2003). Errors and misconceptions in college level theorem proving. Tennessee Technological University Department of Mathematics Tech Report No. 2003-3. http://math.tntech.edu/techreports/TR_2003_3.pdf
Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación secundaria. En L, Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*,125-154. Barcelona: Horsori.
Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Volkert, K. (2008). *The problem of solid geometry.* Recuperado el 7 de julio de 2011de http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG1/Papers/VOLK.pdf controlar.
Weber, K. (2013). Students' difficulties with proof. MAA Research sampler 8 recuperado el 12 de febrero de 2016 de https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof.
Zaslavsky, O. & Ron, G. (1998). Students' understandings of the role of counter-examples. In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 225 – 232.

Autores:

Primer autor: **Götte, Marcela**
Profesora de las cátedras Geometría Euclídea Espacial y Matemática Discreta I y II en el Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Argentina. Magister en Didácticas Específicas. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo que ha realizado publicaciones sobre la temática en distintas revistas especializadas nacionales e internacionales.
Dirección Electrónica: marcelagotte@gmail.com

Segundo autor: **Mántica, Ana María**:
Profesora en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, en el profesorado en Matemática. Magister en Didácticas Específicas, mención en matemática. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo que ha realizado publicaciones en revistas especializadas nacionales e internacionales.
Dirección Electrónica: ana.mantica@gmail.com