UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 76. Año 2026
Páginas 1-8

Un juego de estrategia para formular conjeturas y construir contraejemplos

Uldarico Malaspina

Resumen	En este artículo se presenta un juego para dos personas, con trasfondo matemático, en el cual se plantea como problema central la búsqueda de una estrategia ganadora a partir de las reglas establecidas. La propuesta es con base en una experiencia con profesores, como un recurso didáctico para estimular el pensamiento matemático en un contexto lúdico que promueve emociones agradables y favorece procesos como la indagación, el ensayo y error, la formulación de conjeturas, la construcción de contraejemplos y la justificación de afirmaciones, enmarcados en el uso de la simetría geométrica central. Es aplicable tanto en la educación básica como en la formación de profesores. **Palabras clave:** Indagación; conjetura; contraejemplo; simetría central; educación básica; formación de profesores.
Abstract	This article presents a two-player game with a mathematical view, in which the central challenge is to find a winning strategy based on the established rules. The proposal is based on an experience with teachers, as a teaching resource to stimulate mathematical thinking in a playful context that promotes positive emotions and encourages processes such as inquiry, trial and error, the formulation of conjectures, the construction of counterexamples and the justification of statements, framed within the use of central geometric symmetry. It is applicable both in primary education and in the training of mathematics teachers. Keywords: Inquiry; conjecture; counterexample; central symmetry; primary education; teacher training.
Resumo	Este artigo apresenta um jogo para dois jogadores, com uma abordagem matemática, no qual o problema central é a busca por uma estratégia vencedora com base nas regras estabelecidas. A proposta baseia-se em uma experiência com professores, como recurso didático para estimular o pensamento matemático em um contexto lúdico que promove emoções positivas e favorece processos como a investigação, a tentativa e erro, a formulação de conjecturas, a construção de contraexemplos e a justificação de afirmações, enquadrados no uso da simetria geométrica central. É aplicável tanto na educação básica quanto na formação de professores de matemática. Palavras-chave: Investigação; conjectura; contraexemplo; simetria central; educação básica; formação de professores.

Un juego

Las siguientes, son las reglas de un juego para realizarlo en una cuadrícula de 4x4, cuyas casillas son cuadrados con lados de 2 cm de longitud.

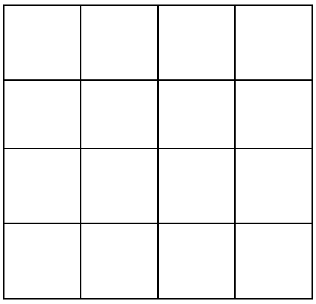

Figura 1

a) Juegan dos personas, que denominaremos **Ada y Beatriz**
b) Cada jugadora, por turnos y empezando Ada, debe marcar en la cuadrícula dada, los puntos de intersección de las líneas.
c) Ada marca con círculos pequeños y Beatriz marca con aspas pequeñas.
d) La condición es que nunca dos puntos marcados deben poder unirse por un segmento de 2 cm de longitud.
e) Pierde la jugadora que, siguiendo estas reglas, ya no puede marcar un punto de intersección.

Problema

Examinar las reglas del juego anterior y proponer una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

El juego descrito y el problema asociado formaron parte de las actividades propuestas en un curso-taller de formación continua dirigido a docentes de educación secundaria en servicio, desarrollado en Lima, como parte del programa de apoyo de la Academia Nacional de Ciencias al fortalecimiento en la formación matemática de docentes de Educación Básica Regular.[1]

El propósito del curso-taller fue contribuir al desarrollo de competencias didáctico-matemáticas de los docentes de secundaria, poniendo énfasis en la indagación y el pensamiento matemático, a partir de juegos adecuadamente seleccionados o creados, vinculados con las competencias matemáticas consideradas en el Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB).

En el número anterior destacábamos la importancia de la indagación en los procesos de aprendizaje y de resolución de problemas. Ante el problema propuesto

[1] El juego y el problema fueron creados por variación de un juego (Malaspina et al. 2025) que habíamos propuesto en un taller anterior con profesores de educación primaria. (Ver el anexo)

ahora, con las reglas dadas para el juego, algunas indagaciones marcadas por un enfoque racional, nos llevan a afirmar, por ejemplo, que hay 25 puntos que se podrían marcar y que, en el desarrollo del juego, no pueden quedar marcados todos esos puntos, pues al marcar cualquiera de ellos, ya no se pueden marcar algunos puntos que estén sin marcar, que son los que distan 2 cm del punto marcado (o que pueden unirse con tal punto mediante un segmento horizontal o vertical de longitud 2 cm).

Podríamos decir que al marcar un punto P, queda determinado un conjunto de puntos no “marcables” (Llamaremos punto “marcable” para un jugador, si puede marcarlo, por no existir otro punto ya marcado que esté a 2 cm de tal punto.) Por ejemplo, si P es un vértice del cuadrado grande, hay 2 puntos no marcables respecto de P; si P es un punto del borde, que no sea esquina, hay 3 puntos no marcables respecto de P; y si P es un punto que está en el interior del cuadrado, hay 4 puntos no marcables respecto de P.

Los juegos con trasfondo matemático brindan excelentes oportunidades para hacer indagaciones apoyados también por la intuición y más aún cuando se busca una estrategia ganadora; es decir, una estrategia que al seguirla – en un juego de dos personas – lleve a ganar a uno de los jugadores, independientemente de lo que haga su oponente. Hay juegos en los que parte de la estrategia ganadora es empezar adecuadamente el juego y otros en los que, para ganar, conviene que el oponente sea el que empiece el juego.

Ante un juego, lo natural es jugarlo y en el proceso del juego ir encontrando algunas pistas para conjeturar y finalmente descubrir una estrategia ganadora. Evidentemente, el ensayo y error está muy presente en estos intentos y la intuición juega un papel muy importante. El lector puede advertir que algo similar ocurre en los procesos de resolución de un problema matemático.

Para resolver el problema dado

Antes de encaminar una solución al problema, recomiendo enfáticamente al lector que juegue con otra persona el juego descrito y busque cómo hacer para ganar. En un grupo de profesores, jugar repetidas veces el juego dado, los llevó a la conjetura “*el que empieza, gana*” (sin importar lo que el oponente haga), pero al seguir jugando, se encontró un contraejemplo, como el que se muestra en la Figura 2:

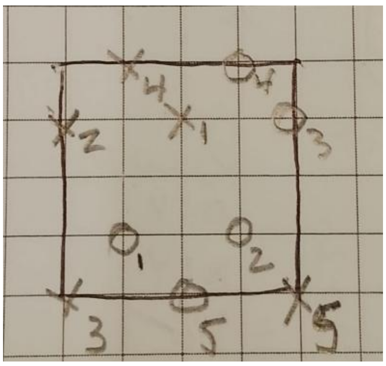

Figura 2

En este caso, comenzó Ada (marcó O_1), continuó Beatriz (marcó X_1,) y así sucesivamente (O_2, X_2, O_3, X_3, O_4, X_4, O_5, X_5); pero Ada solo pudo hacer 5 marcas; Beatriz también hizo 5 marcas; sin embargo, después que Beatriz marcó X_5, es el turno de Ada, pero ya no puede hacer una marca más, pues para cada punto P que queda sin marcar, existe algún punto marcado, tal que dista 2cm de P. En consecuencia, ganó Beatriz (que no es la que comenzó el juego) y entonces la conjetura es falsa.

Esta experiencia llevó a refinar la conjetura: "*gana el que empieza el juego, marcando el centro del cuadrado*" (sin importar lo que el oponente haga). Varios participantes mostraron casos en los que esta conjetura se cumplía. Dos ejemplos de ello son las figuras 3 y 4.

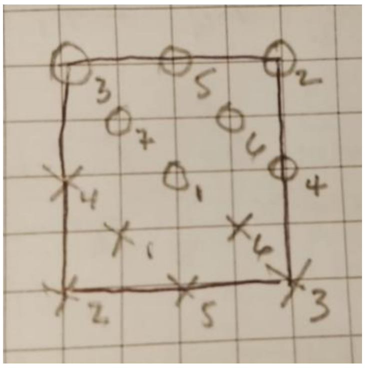

Figura 3

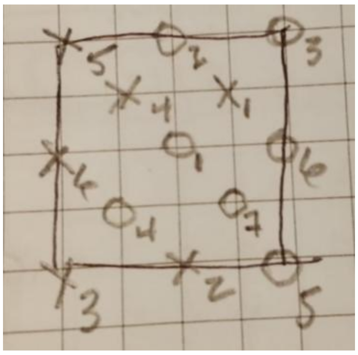

Figura 4

Como los participantes no lograron encontrar un contraejemplo, estaban por afirmar que su conjetura era verdadera; sin embargo, tal contraejemplo existe, como se muestra en la Figura 5:

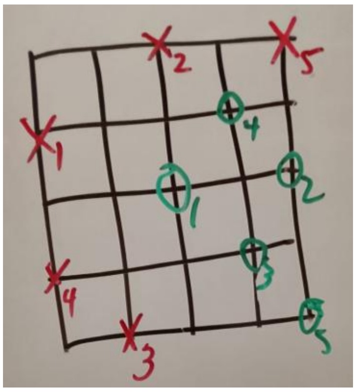

Figura 5

Se muestra que empezó Ada, marcando O_1 en el centro; se van alternando con Beatriz haciendo las marcas que se muestran y se ve que Ada llega a hacer solo 5 marcas. Como Beatriz también hizo 5 marcas, la siguiente marca le corresponde a Ada, pero ya no la puede hacer, porque ninguno de los puntos sin marcar es un punto marcable.

En consecuencia, esta segunda conjetura también es falsa, pues no se tiene una estrategia ganadora, ya que no basta empezar en el centro para ganar de forma segura.

Había que seguir buscando la estrategia ganadora, considerando que es bueno comenzar el juego y hacerlo en el centro del cuadrado.

A continuación, reproduzco lo que un grupo de profesores escribió en la ficha de trabajo sobre este juego:

> – Comenzar en el centro y marcar en el punto opuesto (diagonal) para bloquear el movimiento del otro, otorga la ventaja ganadora

Lo escrito no refleja exactamente lo que manifestaron verbalmente y lo que pudimos observar cuando jugaban. Su idea fue que para ganar había que empezar el juego y marcar el punto que se encuentra en el centro del cuadrado grande. La expresión escrita "*marcar en el punto opuesto (diagonal)*" se refiere a que los siguientes puntos que marque el que inició el juego, deben ser puntos simétricos – respecto al punto central – de los puntos que marque el segundo jugador, como se muestra en las figuras 6 y 7. Esto está en la línea de la solución propuesta por el profesor Enrique Piñeyro, miembro del equipo docente en el curso-taller.

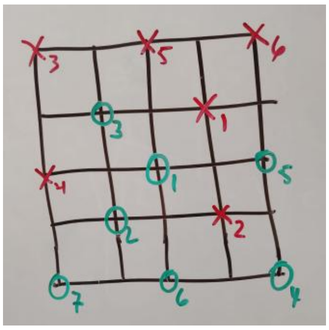

Figura 6

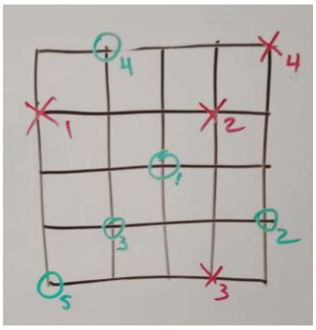

Figura 7

En ambos casos, Ada comienza con O_1 y en sus siguientes turnos Ada marca O_i en un punto que es simétrico, respecto al centro del cuadrado grande, del punto marcado por Beatriz con X_{i-1}, en la jugada previa. En la Figura 6, i va desde 2 hasta 7 y en la Figura 7, i va desde 2 hasta 5.

Se puede verificar que lo descrito es, efectivamente, una estrategia ganadora, pues todo punto que marque Beatriz (el segundo jugador) tiene un simétrico y ese será el que marque Ada (primer jugador). Es importante tener en cuenta que, de los 25 puntos de la cuadrícula, solo uno – el del centro – no tiene otro punto simétrico respecto al centro (su simétrico es él mismo). Los 24 restantes se pueden considerar en 12 parejas (P_i, P_i') de puntos simétricos entre sí, respecto al centro, con *i* que va de 1 hasta 12. Así, al comenzar Ada marcando el punto central, cada punto que marque Beatriz tendrá un punto simétrico, y si lo marcó Beatriz fue porque era marcable y su simétrico también lo será. Esto es así, porque si no fuera marcable para Ada, el simétrico tampoco habría sido marcable y no lo habría podido marcar Beatriz. Mientras Beatriz pueda marcar un punto, Ada también podrá hacerlo, por la simetría; pero luego de algunas jugadas, Beatriz ya no encontrará puntos marcables, pues se habrán agotado las parejas de simétricos marcables y así, Ada queda habiendo marcado al final y gana el juego, sin importar los puntos que marque Beatriz.

Cabe recordar que, si P y Q son puntos simétricos respecto a un punto M, entonces las distancias de P a M y de Q a M son las mismas. Más aún, las simetrías preservan las distancias[2]. Esta es la base para afirmar que el simétrico de un punto marcable también es marcable y que, si un punto no fuera marcable para Ada, su simétrico tampoco habría sido marcable para Beatriz en su turno correspondiente.

Así, resumiendo, Ada tiene una estrategia ganadora que consiste en lo siguiente:

- Empezar el juego.
- Empezar marcando el punto central del cuadrado grande.
- Los siguientes puntos a marcar por Ada deben ser puntos simétricos respecto al centro, de los puntos que marque Beatriz.

Comentarios y reflexiones

El juego y el problema nos permiten evidenciar la importancia de procesos de aprendizaje como indagar, el ensayo y error, conjeturar, construir contraejemplos y justificar afirmaciones. También, usar un concepto matemático muy importante como es la simetría – en este caso respecto a un punto – muy presente en el arte, en diversas culturas en el mundo, particularmente en tejidos preincas y aún actuales en el Perú (Cieza, 2023).

Indagar es esencialmente hacer o hacerse preguntas (Artigue y Baptist, 2012) y los juegos con trasfondo matemático son excelentes recursos didácticos para estimular la indagación, la cual no está suficientemente atendida en nuestras aulas, en los diversos niveles educativos. La creación de problemas y la invención de juegos (Malaspina et al., 2025) se articulan muy bien con los procesos de indagación y refuerzan el desarrollo del pensamiento matemático, estimulando emociones agradables. En este caso resulta muy importante – matemática y didácticamente – pensar y proponer casos particulares y formular hipótesis generales. Esto sería muy enriquecedor hacerlo en grupos de profesores, pensando

[2] Las simetrías – respecto a un punto o a una recta– son *isometrías*; es decir, dos figuras simétricas entre sí mantienen las distancias que tienen entre sus propios puntos.

en los estudiantes; o conjuntamente con los estudiantes, que tienen mucha imaginación y gran espíritu lúdico.

Los juegos con trasfondo matemático resultan altamente motivadores para promover interacciones entre profesores, así como entre profesores y estudiantes, constituyendo formas esenciales de avanzar en el hacer matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, más allá de la mera transmisión de conocimientos y la enseñanza de procedimientos algorítmicos.

Con estas reflexiones concluyo *El Rincón de Problemas* de este número de *UNIÓN* y, como en los números anteriores, invito a los lectores a participar en *El Rincón Intercreativo*, de este número.

A continuación, dejo algunas preguntas que podrían ser usadas para escribirme algo que se publicaría en *El Rincón Intercreativo* del próximo número:

i) ¿Qué juegos similares al descrito propondría para facilitar la comprensión y solución del problema propuesto?

ii) ¿Considera usted importante trabajar en la educación básica con juegos como el propuesto? ¿En qué nivel? ¿Por qué?

iii) ¿Cómo implementaría este juego y problema en una sesión de aprendizaje con sus estudiantes?

iv) ¿Qué sugiere para avivar emociones agradables en el aprendizaje de las matemáticas, mediante juegos?

Agradezco los comentarios y la propuesta que me hizo llegar el profesor Enrique Valeriano, relacionados con el problema del número anterior de *UNIÓN* y con la simetría y los juegos geométricos, y los invito a leerlos en *El Rincón Intercreativo* de este número. Agradezco también las interesantes conversaciones que tuve con el profesor Enrique Valeriano, relacionadas con el presente artículo.

Finalmente, reitero mi exhortación amigable a que me hagan llegar sus comentarios o – mejor aún – sus experiencias en aula, a partir de sus reflexiones de carácter didáctico o matemático, motivados por la lectura de este artículo. Nos dará mucho gusto publicar y comentar lo que me escriban, en el próximo número de *UNIÓN*, como lo estoy haciendo en este número.

Bibliografía

Artigue, M., & Baptist, P. (2012). Inquiry in mathematics education (Resources for implementing inquiry in science and in mathematics at school). The Fibonacci Project Resources. http://www.fibonacci-project.eu

Cieza Paredes, L. I. (2023). Un estudio etnomatemático de las simetrías en los diseños de tejidos de telar de la Comunidad Porcón, Cajamarca. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, PUCP.

Malaspina, M., Malaspina, U., & Barraga, G. (2025). La creación de problemas como marco para inventar juegos que estimulen el pensamiento matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (28), 97–116. https://doi.org/10.35763/aiem28.7521

Anexo:

El juego propuesto a docentes de educación primaria, que me sirvió de inspiración para inventar, por variación, el juego presentado en este artículo, fue el siguiente:

Se tiene un tablero de 4 filas y 4 columnas, que inicialmente tiene todas sus casillas en blanco:

<table>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
</table>

a) Juegan dos personas, que denominaremos **A** y **B**.
b) Cada jugador, por turnos, empezando A, debe escribir su letra en alguna casilla que esté en blanco y no sea adyacente a alguna de las que ya tiene escrita la letra A o la letra B.
c) Pierde el jugador que siguiendo estas reglas ya no puede escribir su letra en ninguna casilla.

Y el problema fue proponer una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

(Se aclaró que casillas adyacentes son las que comparten un lado.)