

## Razonamiento automático con GeoGebra Discovery en contextos reales de enseñanza de las matemáticas: el proyecto IAxEM

Angélica Martínez-Zarzuelo, Álvaro Nolla, Tomás Recio, Piedad Tolmos, Pilar Vélez

|                        |  |
|------------------------|--|
| <p><b>Resumen</b></p>  | <p>Se presenta el proyecto de investigación “Inteligencia aumentada en educación matemática mediante modelización, razonamiento automático e inteligencia artificial” (IAxEM-CM), financiado por la Comunidad de Madrid, cuyo objetivo es el diseño, experimentación y evaluación de propuestas educativas que integran razonamiento automático a través de GeoGebra Discovery e inteligencia artificial en contextos reales de aprendizaje matemático, dirigidas a estudiantes de Educación Primaria y Secundaria y al profesorado, tanto en la formación inicial como en activo. En el artículo se describen el enfoque y las principales líneas de actuación del proyecto, así como los aprendizajes derivados de su primer año de desarrollo, invitando a la comunidad educativa a reflexionar sobre su potencial y a colaborar en su implementación en el aula.</p> <p><b>Palabras clave:</b> educación matemática, formación del profesorado, inteligencia artificial, razonamiento automático, GeoGebra Discovery</p> |
| <p><b>Abstract</b></p> | <p>This paper presents the research project “Inteligencia aumentada en educación matemática mediante modelización, razonamiento automático e inteligencia artificial” (IAxEM-CM), funded by the Community of Madrid. The project aims to design, implement, and evaluate educational proposals that integrate automated reasoning through GeoGebra Discovery and artificial intelligence in real-world mathematics learning contexts, targeting primary and secondary school students as well as pre-service and in-service teachers. The article describes the project’s approach and main lines of work, as well as the insights gained during its first year of development, inviting the educational community to reflect on its potential and to engage in its implementation in the classroom.</p> <p><b>Keywords:</b> mathematical education, teacher training, artificial intelligence, automatic reasoning, GeoGebra Discovery</p>  |
| <p><b>Resumo</b></p>   | <p>Apresenta-se o projeto de investigação “Inteligencia aumentada en educación matemática mediante modelización, razonamiento automático e inteligencia artificial” (IAxEM-CM), financiado pela Comunidade de Madrid, cujo objetivo é a conceção, experimentação e avaliação de propostas educativas que integram o raciocínio automático através do GeoGebra Discovery e a inteligência artificial em contextos reais de aprendizagem matemática, dirigidas a alunos do ensino básico e</p>   |

secundário e aos docentes, tanto em formação inicial como em exercício. O artigo descreve a abordagem e as principais linhas de ação do projeto, bem como os ensinamentos retirados do seu primeiro ano de desenvolvimento, convidando a comunidade educativa a refletir sobre o seu potencial e a colaborar na sua implementação na sala de aula.

**Palavras-chave:** educação matemática, formação de professores, inteligência artificial, raciocínio automático, GeoGebra Discovery

## 1. Contexto y marco de la propuesta

El proyecto “Inteligencia aumentada en educación matemática mediante modelización, razonamiento automático e inteligencia artificial” (IAxEM-CM)<sup>1</sup>, financiado por la Comunidad de Madrid para el periodo 2025-2027, constituye el marco en el que se sitúa el trabajo que se presenta en este artículo. El proyecto se desarrolla mediante un consorcio interuniversitario que integra grupos de investigación de cuatro universidades madrileñas (Universidad Rey Juan Carlos, Universidad Complutense de Madrid, Universidad Autónoma de Madrid y Universidad Antonio de Nebrija), con la colaboración de investigadores internacionales con amplia experiencia en educación matemática y tecnología educativa.

Asimismo, participan como instituciones asociadas diversos centros de Educación Primaria y Secundaria de la Comunidad de Madrid; las Facultades de Educación de las universidades implicadas; el Centro de Enseñanza Superior en Humanidades y Ciencias de la Educación Don Bosco (adscrito a la Universidad Complutense de Madrid); la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas (SMPM) “Emma Castelnuovo”; el Instituto “GeoGebra Maslama Al-Mayriti”; y la institución privada STEAM-Talent. El proyecto cuenta, además, con el apoyo de la Dirección General de Bilingüismo y Calidad de la Enseñanza, del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado (INTEF), de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas y de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), instituciones a las que se agradece su colaboración.

El proyecto se orienta al análisis del potencial educativo de la integración en el aula de herramientas tecnológicas de modelización matemática, paseos matemáticos, visualización e impresión 3D, razonamiento automático en combinación con GeoGebra Discovery<sup>2</sup>, e inteligencia artificial, atendiendo tanto al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como a las actitudes de los estudiantes hacia la materia. Desde este enfoque, se considera que una incorporación planificada y didácticamente fundamentada de estas herramientas tecnológicas puede contribuir de manera significativa a mejorar el aprendizaje matemático y a favorecer actitudes positivas hacia las matemáticas, siempre que su uso esté alineado con los objetivos matemáticos y las decisiones didácticas del aula.

<sup>1</sup> <https://iaxem.es>

<sup>2</sup> Accesible gratuitamente en <https://github.com/kovzol/geogebra/releases> y disponible en diversas versiones (on y off line) y soportes (tabletas, teléfonos, ordenadores).

En este contexto, el planteamiento del proyecto parte de la constatación de la escasez de experiencias didácticas llevadas a cabo en el aula con GeoGebra Discovery y, en general, de la limitada implementación de herramientas tecnológicas como la inteligencia artificial (p. ej., ChatGPT, AlphaGeometry), la modelización y la impresión 3D (p. ej., Tinkercad<sup>3</sup>, GeoGebra 3D<sup>4</sup>, BlockSCAD<sup>5</sup>), la realidad virtual (p. ej., NeoTrieVR<sup>6</sup>) o los paseos matemáticos con dispositivos móviles (p. ej., EduCity<sup>7</sup>, MathCityMap<sup>8</sup>), a pesar de las recomendaciones de la normativa educativa actual, que insiste en el uso de metodologías que integren este tipo de recursos.

Si bien existen experiencias previas desarrolladas por los grupos de investigación del consorcio, como se detallará en la sección siguiente, estas iniciativas ponen de manifiesto la necesidad de avanzar hacia propuestas más sistemáticas e integradas en la práctica docente. Asimismo, la necesidad de responder con urgencia y de modo sistemático a la carencia de experiencias didácticas con las herramientas señaladas anteriormente ha sido destacada por reputados investigadores en Educación Matemática, siendo múltiples las referencias al interés y la necesidad de experimentar tales herramientas en el aula y, particularmente, en la formación de docentes.

En este sentido, resulta especialmente relevante la aportación de Hanna y Yan (2021). La profesora Gila Hanna es una figura destacada en el ámbito de la Educación Matemática<sup>9</sup>, en particular en relación con el papel del razonamiento y la demostración. Es profesora emérita del Department of Curriculum, Teaching and Learning de la Universidad de Toronto, Canadá. Ha sido directora de Educación Matemática del Instituto Fields, el equivalente en matemáticas a la Fundación Nobel. En ese artículo, Hanna y Yan señalan que:

... GeoGebra has recently added an Automated Reasoning Tool (ART) to help students conjecture that a given property holds for a specific geometric object and then to find a proof that their conjecture is true...It is perhaps too early for empirical studies of classroom experience using the enhancements to GeoGebra... While it is reasonable to expect proof technology to Foster students' proving abilities, and there is certainly supporting anecdotal evidence, its potential advantages have not yet been systematically assessed....The key is to make a start, beginning with exploratory studies of the potential of these new tools at both the secondary and post-secondary levels. (Hanna & Yan, 2021, p.44-45)

De este modo, el proyecto IAxEM constituye una respuesta directa a esta demanda "to make a start, beginning with exploratory studies", impulsando el desarrollo de propuestas didácticas que permitan analizar, en contextos reales, el potencial educativo del razonamiento automático y de las herramientas tecnológicas asociadas.

---

<sup>3</sup> <https://www.tinkercad.com>

<sup>4</sup> <https://www.geogebra.org/3d?lang=es>

<sup>5</sup> <https://www.blockscad3d.com/editor/>

<sup>6</sup> <https://www2.ual.es/neotrie/>

<sup>7</sup> <https://educity.web.ua.pt>

<sup>8</sup> <https://mathcitymap.eu/es/>

<sup>9</sup> véase [https://en.wikipedia.org/wiki/Gila\\_Hanna](https://en.wikipedia.org/wiki/Gila_Hanna)

## 2. Enfoque didáctico y líneas de trabajo

En este contexto, y en coherencia con el enfoque descrito anteriormente, el proyecto se orienta al diseño y desarrollo de propuestas educativas para su aplicación en el aula de matemáticas, basadas en el uso de herramientas tecnológicas de modelización matemática, paseos matemáticos, visualización e impresión 3D, razonamiento automático e inteligencia artificial, así como en la interacción entre ellas, para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de forma contextualizada e inclusiva.

En particular, se analizan las posibilidades educativas de distintas herramientas tecnológicas, entre las que se incluyen las herramientas de razonamiento automático (GeoGebra Discovery), las herramientas de inteligencia artificial (ChatGPT, AlphaGeometry), y las herramientas de modelización, paseos matemáticos, visualización e impresión 3D (MathCityMap, Tinkercad, GeoGebra 3D, BlockSCAD, EduCITY, NeoTrie VR). Asimismo, se contempla la identificación y el desarrollo de mejoras técnicas necesarias para su uso en entornos educativos, con el fin de contribuir al desarrollo de capacidades de demostración y razonamiento asistidos por inteligencia artificial generativa y simbólica, así como al fomento de la competencia STEAM y a la conexión de las matemáticas con la realidad (a través de rutas matemáticas, análisis de obras de arte, y actividades de modelización e impresión 3D), así como a la difusión (a través de actividades de ciencia ciudadana) y a la inclusión (proyecto MatesGG, talento matemático) de las matemáticas.

Estas líneas de trabajo se concretan en el diseño e implementación de tareas en distintos contextos educativos, como paseos matemáticos en entornos reales, actividades de modelización con apoyo de herramientas digitales y propuestas de razonamiento automático con GeoGebra Discovery, desarrolladas tanto con alumnado en contextos escolares como en la formación inicial y permanente del profesorado.

Entre estas propuestas se incluyen tareas para el aula de matemáticas basadas en problemas contextualizados y situaciones del entorno que integran herramientas de paseos matemáticos con MathCityMap (p. ej., Ariño-Morera et al., 2024; Martínez-Zarzuelo et al., 2025) (véanse Figuras 1 y 2); modelización matemática y visualización e impresión 3D (Ariño-Morera et al., 2023) (véase Figura 3); razonamiento automático (con GeoGebra Discovery) e inteligencia artificial en la enseñanza de la geometría elemental (Botana et al., 2024; Kovács et al., 2024; Recio & Martínez-Zarzuelo, 2025) (véanse Figuras 4 y 5), atendiendo a su interacción y a su uso en contextos reales, contextualizados e inclusivos.

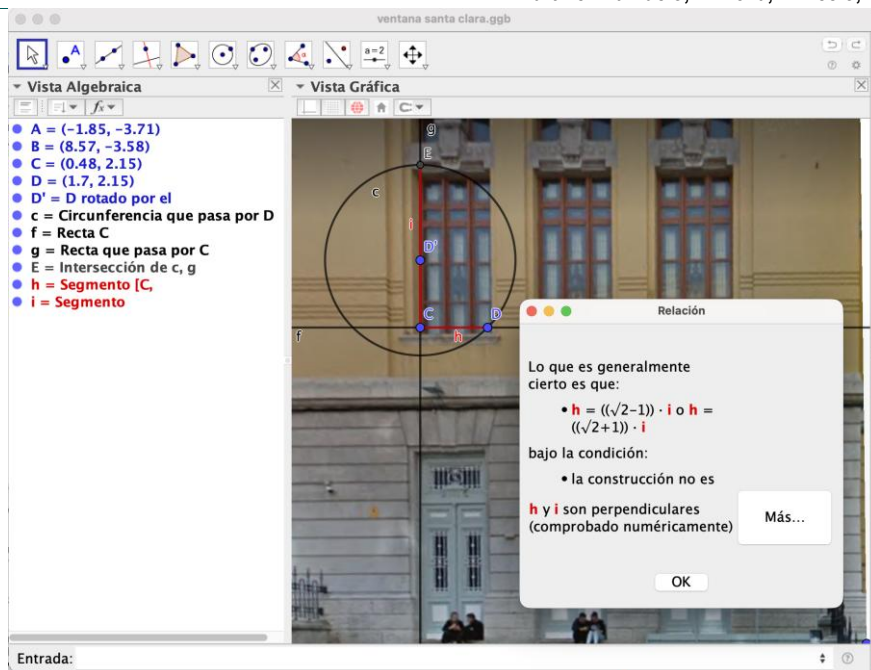


Figura 1. Paseo matemático con GeoGebra Discovery, mostrando la proporción planteada en las ventanas de la fachada principal del I.E.S. Santa Clara (Santander).

Fuente: Ariño-Morera et al. (2024).

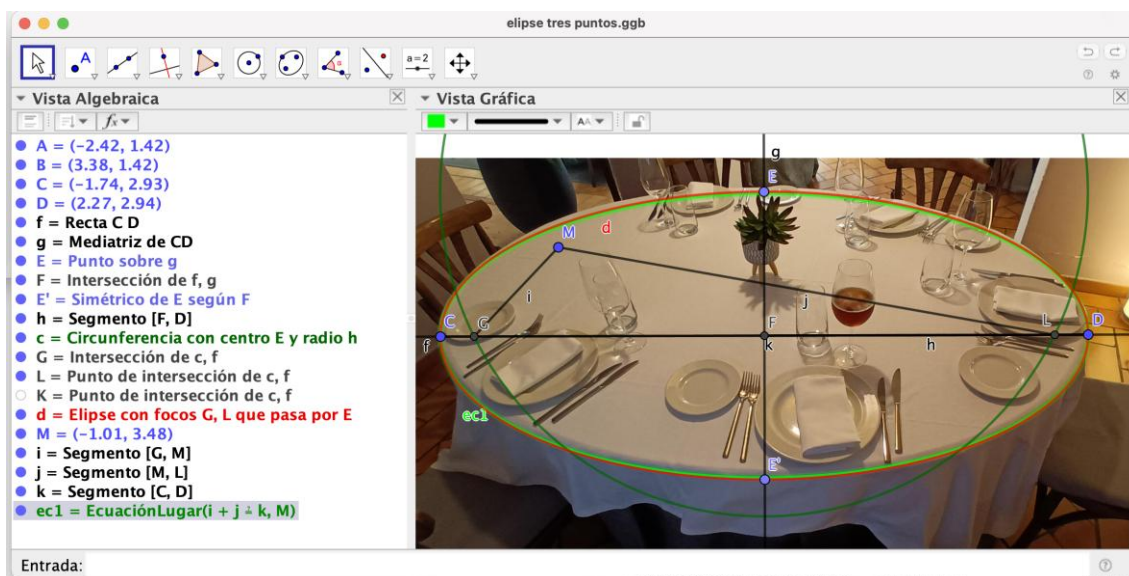


Figura 2. Construcción y verificación del modelo de una mesa elíptica.

Fuente: Ariño-Morera et al. (2024).

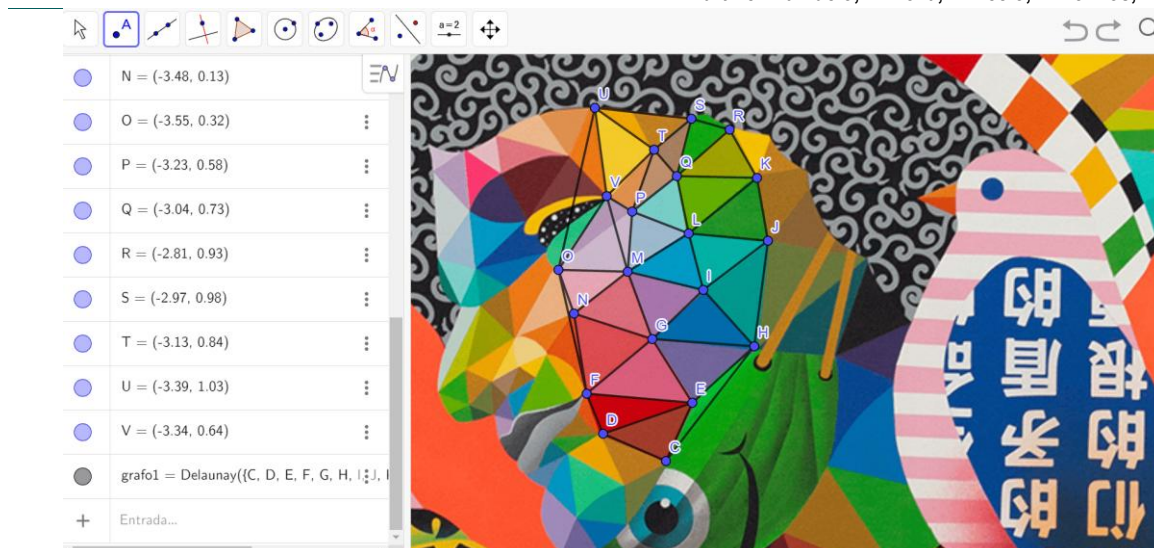


Figura 3. Modelización con GeoGebra de las triangulaciones existentes en la obra Liberty Statue I, de Okuda (<https://okudasanimiguel.com>).

Fuente: Ariño-Morera et al. (2023).

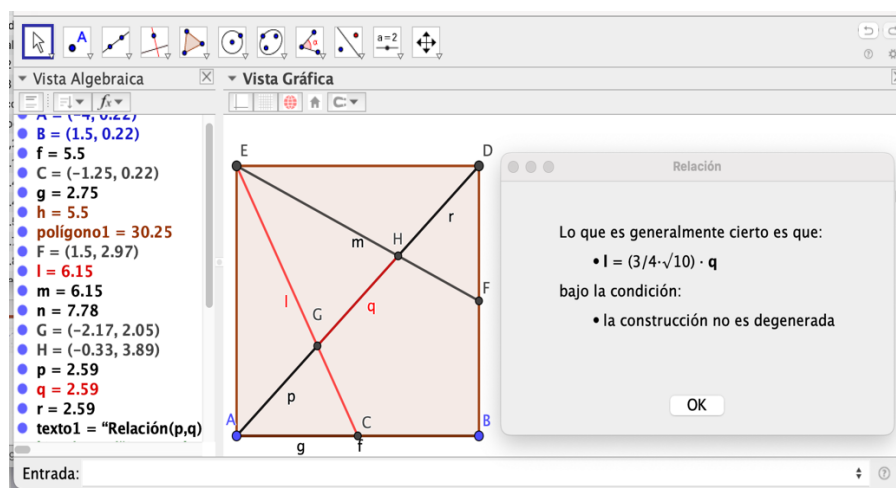
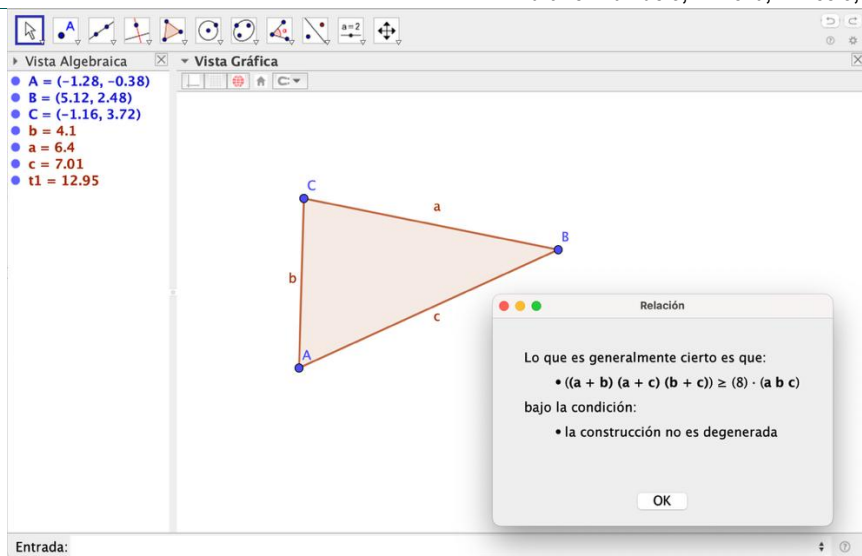


Figura 4. GeoGebra Discovery encuentra una relación no trivial entre los segmentos  $l$  (desde el vértice  $E$  del cuadrilátero al punto medio  $C$  del lado  $AB$ ) y  $q$  (intersección de tales segmentos a los puntos medios, con la diagonal  $AD$ ).

Fuente: Recio & Martínez-Zarzuelo (2025).



**Figura 5. GeoGebra Discovery encuentra automáticamente una clásica desigualdad involucrando los lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de un triángulo arbitrario. Fuente: Recio & Martínez-Zarzuelo (2025).**

Se prevé la implementación de estas propuestas en centros educativos, centros especializados y Facultades de Educación de la Comunidad de Madrid, dirigidas tanto a estudiantes de Educación Primaria y Secundaria como a la formación inicial y permanente del profesorado.

En este marco, el proyecto incorpora un modelo de evaluación orientado al análisis de los procesos de razonamiento matemático del alumnado, estructurado en un sistema de dimensiones e indicadores y en el diseño y validación de instrumentos de recogida de datos, que permite analizar el potencial educativo de las propuestas diseñadas, así como su contribución a las mejoras en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y en las actitudes de los estudiantes (utilidad, motivación, interés, etc.), y a partir de ello orientar la formulación de recomendaciones y la difusión de orientaciones formativas dirigidas a distintos agentes de la comunidad educativa, que contribuyan a un uso fundamentado y didácticamente significativo de las herramientas tecnológicas consideradas en la enseñanza de las matemáticas.

### 3. Aprendizajes iniciales y retos para la práctica docente

A lo largo del primer año del proyecto, el año 2025, los grupos de investigación que desarrollan el proyecto se han centrado, por un lado, en la elaboración de un marco teórico y en el diseño de prototipos de propuestas didácticas que integran razonamiento automático, inteligencia artificial y contextos reales en el aula de matemáticas. Por otro, se está avanzando en el diseño de un modelo de evaluación que permita analizar de forma sistemática las primeras implementaciones de estas propuestas.

Los primeros resultados obtenidos han permitido ensayar de manera inicial algunas de estas propuestas en unas primeras jornadas de formación del profesorado en ejercicio, así como identificar aprendizajes iniciales y retos didácticos asociados a su integración en la práctica docente. Entre estos aprendizajes destacan la necesidad

de guiar el uso de las herramientas tecnológicas para favorecer el razonamiento matemático del alumnado y la importancia de integrar estas propuestas en secuencias didácticas coherentes.

Una vez analizados los pros y contras de esa primera experiencia, se trata ahora, a lo largo de 2026, de difundir el proyecto, de recabar la colaboración del profesorado en ejercicio y, en consecuencia, de generalizar la puesta en práctica y la evaluación de las propuestas.

Este trabajo se plantea como una oportunidad para compartir estas experiencias iniciales y abrir un espacio de diálogo con el profesorado sobre los retos y posibilidades de integrar, de forma didácticamente significativa, el razonamiento automático y la inteligencia artificial en la enseñanza de las matemáticas.

## Bibliografía

- Ariño-Morera, B., Benito, A., Nolla, Á., Recio, T., & Seoane, E. (2023). *Looking at Okuda's artwork through GeoGebra: A Citizen Science experience*. *AIMS-Mathematics*, 8(8), 17433-17447. <https://doi.org/10.3934/math.2023890>
- Ariño-Morera, B., Martínez-Zarzuelo, A., Lázaro del Pozo, C., & Recio, T. (2024). *Paseos matemáticos con MathCityMap y GeoGebra Discovery: una propuesta*. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 117, 19-37.
- Botana, F., Recio, T., & Vélez, M.P. (2024). *On Using GeoGebra and ChatGPT for Geometric Discovery*. *Computers*, 13(8), 187. <https://doi.org/10.3390/computers13080187>
- Hanna, G. & Yan, X. (2021). *Opening a discussion on teaching proof with automated theorem provers*. *For the Learning of Mathematics*, 41(3), 42-46. <https://www.jstor.org/stable/27091220>
- Kovács, Z., Parisse, B., Recio, T., Vélez, M.P. & Yu, J.H. (2024). *The ShowProof command in GeoGebra Discovery: Towards the automated ranking of Elementary geometry theorems*. *ACM Communications in Computer Algebra*, 58(2), 27-30. <https://doi.org/10.1145/3712023.3712026>
- Martínez-Zarzuelo, A., Nolla, Á., Recio, T., Tolmos, P., Ariño-Morera, B., & Gallardo, A. (2025). *An Experience with Pre-Service Teachers, Using GeoGebra Discovery Automated Reasoning Tools for Outdoor Mathematics*. *Education Sciences*, 15(6), 782. <https://doi.org/10.3390/educsci15060782>
- Recio, T. & Martínez-Zarzuelo, A. (2025). *Herramientas de razonamiento automático en GeoGebra Discovery: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 120, 19-32.

## Agradecimientos

Proyecto PHS-2024/PH-HUM-383 (IAxEM-CM)<sup>10</sup> Inteligencia aumentada en educación matemática mediante modelización, razonamiento automático e

---

<sup>10</sup> <https://iaxem.es>

---

inteligencia artificial, de la Comunidad de Madrid, Consejería de Educación, Ciencia y Universidades.