ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 60. Diciembre 2020
Páginas 233-244

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Estadísticos de orden y razonamiento proporcional

Carmen Batanero Bernabeu, Silvia María Valenzuela Ruiz,
Nuria Begué Pedrosa

Fecha de recepción: 21/07/2020
Fecha de aceptación: 30/11/2020

Resumen

Los estadísticos de orden tienen gran importancia en el análisis exploratorio de datos e inferencia estadística no paramétrica y se estudian en diversos niveles educativos. La investigación didáctica describe errores en su comprensión. En este trabajo analizamos la relación de los estadísticos de orden con el razonamiento proporcional, apoyándonos en el enfoque ontosemiótico, y la investigación sobre estadístico de orden y razonamiento proporcional. Se analizan ejemplos que muestran la relación de los errores asociados a los estadísticos de orden con el razonamiento proporcional. Se finaliza con algunas implicaciones para la mejora de la enseñanza de estos estadísticos.
Palabras clave: Estadísticos de orden, comprensión, razonamiento proporcional, dificultades de los estudiantes, conflictos semióticos

Abstract

Order statistics are very important in exploratory data analysis and nonparametric statistical inference and are studied at various educational levels. The educational research describes errors in their understanding. In this work we analyze the relationship of order statistics with proportional reasoning, relying on the ontosemiotic approach, and research dealing with order statistics and proportional reasoning. On this basis, we analyze examples that show the relationship of errors associated with order statistics and proportional reasoning. We finish with some implications for improving the teaching of these statisticians.
Keywords: Order statistics, understanding, proportional reasoning, student' difficulties, semiotic conflicts

Resumo

Os estatísticos de ordem são de grande importância na análise exploratória de dados e na inferência estatística não paramétrica e são estudadas em vários níveis educacionais. A pesquisa didática descreve erros no seu entendimento. Neste trabalho, analisamos a relação da estatística de ordens com o raciocínio proporcional, contando com a abordagem ontosemiótica, e a investigação sobre estatística de ordens e raciocínio proporcional. Analisam-se exemplos que mostram a relação de erros associados às estatísticas de ordem com raciocínio proporcional. Finaliza-se com algumas implicações a melhora do ensino desses estatísticos.
Palavras-chave: estatísticos de ordem, compreensão, raciocínio proporcional, dificuldades de estudantes, conflitos semióticos

1. Introducción

Los estadísticos de orden son un tema importante en estadística y nos indican la posición que un cierto valor ocupa dentro de un conjunto de datos ordenados y, por ello, nos informan del porcentaje de datos que tienen un valor de la variable menor o igual que el estadístico (Hoaglin, Mosteller y Tukey, 1983). Por ejemplo, el primer cuartil es el valor de la variable que deja por debajo la cuarta parte de los datos ordenados. Un uso frecuente de estos estadísticos es para comprobar el crecimiento adecuado (peso y talla) de los niños a cada edad. Asimismo, se utilizan en los medios de comunicación en relación a datos económicos y sociales.

El más usado de estos estadísticos es la mediana, al ser también una medida de valor central. La mediana es preferible a la media cuando la distribución de los datos es muy asimétrica (por ejemplo, en una distribución exponencial) y también en variables ordinales (Betanzos y López, 2017). Otros estadísticos de orden son el máximo y mínimo, cuartiles, deciles, percentiles y sus rangos. Todos ellos juegan un gran papel en el análisis exploratorio de datos, introducido por Tukey (1977), porque su valor cambia poco cuando hay datos atípicos. En consecuencia, se utilizan como base en gráficos que se emplean en este enfoque, como, por ejemplo, el gráfico de la caja, en el que se presentan visualmente el máximo, mínimo, cuartiles y mediana de la distribución. Además, muchos métodos de estadística no paramétrica utilizan estadísticos de orden. Dicha estadística tiene un uso más general que la paramétrica, al requerir condiciones menos restrictivas para su aplicación.

En España el estudio de los estadísticos de orden comienza en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO); concretamente, la mediana se cita por primera vez en el currículo de los cursos de primero y segundo de ESO donde se incluye el cálculo de la mediana y el intervalo mediano (MECD, 2015). En tercer curso se introducen los percentiles y cuartiles, su cálculo, interpretación y propiedades, y en cuarto curso el diagrama de caja, que se debe utilizar para comparar dos distribuciones. Indirectamente, el trabajo con frecuencias acumuladas está también relacionado con los estadísticos de orden. Estos contenidos se continúan utilizando en Bachillerato, donde, además, el concepto de percentil se aplica, tanto en la lectura de las tablas de la distribución normal, como en segundo curso de Ciencias Sociales en el uso de dicha distribución para el cálculo de intervalos de confianza.

A pesar de dedicarse varios años a su estudio, la investigación didáctica ha descrito numerosas dificultades en su comprensión y aplicación en estudiantes (Cobo, 2003; Mayén y Díaz, 2010; Mayén, Cobo, Batanero y Balderas, 2007) y futuros profesores (Gea, Batanero, Fernández y Arteaga, 2016), pero estos estudios no analizan la posible causa de estos errores.

El objetivo de este trabajo es analizar el razonamiento proporcional requerido en el trabajo con los estadísticos de orden, para intentar explicar algunos de estos errores, por su relación con dicho razonamiento. En primer lugar, presentamos algunos fundamentos teóricos, seguido por una síntesis de dificultades típicas relacionadas con los estadísticos de orden y con el razonamiento proporcional. A continuación, analizamos, mediante algunos ejemplos, la relación entre los estadísticos de orden y el razonamiento proporcional, resaltando las posibles dificultades de los estadísticos de orden que pueden ser explicadas por este tipo de razonamiento. Se concluye con algunas implicaciones para la enseñanza de los estadísticos de orden.

2. Algunos elementos teóricos

Para realizar nuestro análisis, utilizaremos los objetos matemáticos elementales definidos en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019). Dicho enfoque asume que el significado de un objeto matemático surge de las prácticas que realiza una persona, o se llevan a cabo en el seno de una institución, para resolver las situaciones-problemas de donde surge dicho objeto. Se diferencia el significado institucional, que sería el considerado correcto por una institución (por ejemplo, la ESO o el Bachillerato) y el significado personal (el que adquiere una persona, que puede ser diferente en algunos aspectos del institucional). Las diferencias entre el significado institucional y personal dan origen a los conflictos semióticos. También se diferencian los siguientes tipos de objetos matemáticos elementales asociados a cada objeto matemático:

- *Campos de problemas:* Son las situaciones o aplicaciones que inducen actividades matemáticas de donde surge el objeto. Por ejemplo, la necesidad de comparar dos conjuntos de datos ordinales o de determinar el porcentaje de casos con valor menor que uno dado, serían campos de problemas relacionados con los estadísticos de orden.
- *Lenguaje:* Puesto que los objetos matemáticos son inmateriales, se necesitan representaciones de estos, tanto para referirse a ellos o comunicar la solución de los problemas, como para operar con dichos objetos. Dentro del lenguaje, encontramos palabras como percentil o mediana, símbolos como Me, P90, D5 y gráficos como el de la caja o la distribución de frecuencias acumuladas.
- *Algoritmos y procedimientos:* Para resolver los problemas se realizan una serie de procedimientos, que llegan a ser objeto de enseñanza. Por ejemplo, para calcular el primer cuartil de un conjunto pequeño de datos aislados, se ordenan los datos y se toma el valor al que corresponde una frecuencia acumulada de n/4, siendo n el número de datos. Si hay dos valores en esta posición, se toma la media aritmética de los mismos.
- *Definiciones y propiedades:* El estudiante debe aprender las diferentes definiciones de cada uno de los estadísticos de orden y también sus diversas propiedades, que relacionan estos estadísticos entre sí y con otros objetos matemáticos. Así, la mediana es el percentil del 50% o el quinto decil.
- *Argumentos:* Finalmente, el estudiante debe ser capaz de argumentar utilizando razonadamente los estadísticos de orden para resolver problemas, o comunicar su solución a otras personas.

3. Dificultades con los estadísticos de orden

La mayor parte de las investigaciones relacionadas se centran en la mediana, siendo escasas las relacionadas con otros conceptos. Estas investigaciones han descrito las siguientes dificultades, que se pueden generalizar a los estadísticos de orden:

- *Comprensión de campos de problemas:* Los estudiantes no siempre reconocen las situaciones en que hay que aplicar la mediana. Esto ocurre cuando se les pide elegir una medida de tendencia central y utilizan la media o moda, en lugar de la mediana, aunque los datos sean ordinales o haya valores atípicos (Delson y Mugabe, 2013; Mayén, Díaz y Batanero, 2009).
- *Comprensión del lenguaje:* se confunde la notación o la terminología de estos estadísticos (Mayén et al., 2009). Por otro lado, cuando se pide interpretar la mediana o los cuartiles algunos estudiantes no proporcionan una interpretación adecuada (Gea, Batanero, Fernández y Arteaga, 2016). Hay también dificultad para interpretar el gráfico de la caja e incluso el polígono de frecuencias acumuladas (Gea, Arteaga y Cañadas, 2017).
- *Comprensión de las definiciones:* La definición de la mediana no es clara para los estudiantes y confunden la media y mediana, e incluso con el valor de la variable (Carvalho, 2001; Mayén, Díaz y Batanero, 2009). Muchos estudiantes conciben la mediana como centro y otros no saben qué tipo de centro es (si con los datos ordenados o no). Así, en la tabla de frecuencia pueden tomar como mediana el valor central de la variable, sin tener en cuenta las frecuencias o incluso el centro geométrico. Asimismo, al pedirles interpretar los resúmenes estadísticos de una distribución Gea et al. (2017) informan que algunos estudiantes interpretaron que todos los países por debajo del primer cuartil tienen el mismo valor de la variable y otros confundieron el valor del percentil con el de la variable.
- *Comprensión de las propiedades:* Los estudiantes generalizan indebidamente a los estadísticos de orden propiedades algebraicas de las operaciones aritméticas, por ejemplo, el tener elemento neutro o simétrico. Otras veces olvidan la propiedad de robustez y la aplican incorrectamente a la media, donde no es válida.
- *Procedimientos de cálculo:* son una de las mayores fuentes de dificultad en el trabajo con los estadísticos de orden, debido a la existencia de varios algoritmos de cálculo (Schuyten, 1991). Por ejemplo, son capaces de calcular la mediana o un percentil de un conjunto pequeño de datos, pero no cuando se les dan organizados en una tabla de frecuencias o por medio de una representación gráfica (Schuyten, 2001).

Las anteriores investigaciones se reducen a describir los errores más frecuentes de los estudiantes, pero no profundizan en su posible causa, más allá de la falta de conocimiento o la complejidad del tema. En nuestro trabajo trataremos de explicar algunos de estos errores en términos de conflictos semióticos relacionados con la proporcionalidad, es decir, de discordancias entre el significado de los objetos matemáticos que intervienen en el trabajo con estadísticos de orden, causados por la relación de éstos con el razonamiento proporcional.

4. Razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional y su desarrollo han sido analizados en diferentes trabajos de investigación, que se resumen en Behr, Harel, Post y Lesh (1992), Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012) y Obando, Vasco y Arboleda (2014). Estos últimos autores indican que el interés por el tema ha estado vigente a lo largo de cincuenta años, debido a la importancia del mismo en diferentes áreas curriculares, pero a pesar de esta extensa investigación los estudiantes no alcanzan un nivel suficiente de razonamiento proporcional en su aprendizaje.

La investigación pionera parte del estudio del papel del razonamiento proporcional en el desarrollo del razonamiento probabilístico, surgido de las investigaciones sobre comparación de probabilidades de Piaget e Inhelder (1951). Estos autores propusieron a niños de diferentes edades comparar la probabilidad de un mismo suceso en dos urnas compuestas de un número dado de casos favorables y posibles. Para resolver el problema, los niños comenzaban comparando los casos favorables en las dos urnas, posteriormente los desfavorables, y no es hasta la adolescencia que son capaces de calcular las razones entre casos favorables y posibles (o desfavorables). Este trabajo inició una extensa investigación sobre razonamiento proporcional en los niños.

Uno de los primeros autores en investigar el tema fue Noelting (1980a y 1980b), quien propuso a niños de diferentes edades un problema de comparación de dos razones, ejemplificado por mezclas (agua y zumo de naranja), preguntando a los niños cuál de las dos mezclas (con diferente número de cucharadas de agua y zumo) tenía mayor sabor a naranja. Variando los valores de las razones en las dos mezclas describen las etapas y estrategias que siguen los niños a diferentes edades para resolver el problema. Generalizan y amplían a los problemas de comparación de fracciones las estrategias descritas por Piaget e Inhelder (1951) en la comparación de probabilidades.

Son muchos los investigadores que posteriormente han estudiado el razonamiento proporcional (por ejemplo, Karplus, Pulos y Stage, 1983; Vergnaud, 1983). En estos trabajos se han encontrado dos tipos básicos de estrategias correctas en la comparación de fracciones: estrategias multiplicativas y no multiplicativas. En las estrategias multiplicativas los términos de una fracción se relacionan multiplicativamente y esta relación se extiende a la segunda razón. En la mayoría de los casos la relación se establece entre el numerador y denominador de la misma fracción (estrategia “intro”) o entre numeradores y denominadores de las dos fracciones (estrategias “entre”). Rara vez se emplea la estrategia de productos cruzados. Las estrategias correctas no multiplicativas consisten en establecer una relación dentro de una fracción y extenderla a la segunda mediante operaciones aditivas, o comparar únicamente los numeradores o denominadores de las fracciones cuando el otro término es idéntico. También se ha apreciado que un mismo sujeto puede usar diferentes estrategias y tratar a veces de resolver un problema más complejo con una estrategia elemental.

Según muestran varios estudios (Fernández y Llinares, 2012; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Turnaire y Pulos, 1985) diversos factores influyen en la dificultad de las tareas de proporcionalidad: la relación entre los números involucrados, el uso de razones enteras y no enteras, las unidades de las magnitudes que aparecen en la situación, el formato en que se presenta la tarea y la familiaridad del contenido, entre otros. Los problemas que involucran números naturales pequeños, aquellos en los que aparecen relacionados los primeros o segundos términos de una razón y en los que existe una relación de divisibilidad entre sus términos, resultan más fáciles para los alumnos. Tourniaire y Pulos (1985) sugieren que es más sencillo visualizar cantidades discretas que continuas y, por tanto, los estudiantes desarrollarán mejor las tareas de proporcionalidad que involucren cantidades discretas.

Burgos y Godino (en prensa) describen diversos significados de la proporcionalidad, teniendo en cuenta el nivel algebraico con el cual es necesario trabajar para resolver problemas relacionados. También indican que en algunos campos (como la probabilidad) el trabajo con proporcionalidad implica a objetos matemáticos específicos de dichos campos (la aleatoriedad, en el caso de la probabilidad). Dentro de estos significados, los siguientes se aplican para el estudio de los estadísticos de orden:

- Significado *aritmético*, caracterizado por la aplicación de procedimientos aritméticos.
- Significado *proto-algebraico*, centrado en la aplicación de la proporción y la resolución de ecuaciones de la forma $Ax=B$.
- Significado *algebraico-funcional*: donde se aplica la función lineal y sus propiedades: $f(a+b)= f(a)+f(b); f(ka)=kf(a)$.

En particular, un percentil está relacionado con la idea de razón, o comparación multiplicativa entre dos cantidades de magnitudes ordenadas. En el caso del percentil la magnitud es el cardinal de una colección de elementos y la cantidad el número que expresa el cardinal del conjunto de elementos por debajo del percentil. La razón aparece cuando se determina el cociente entre este número y el que corresponde al cardinal del conjunto de datos. Burgos y Godino (en prensa) describen diferentes tipos de problemas de proporcionalidad, entre los cuales dos aparecen en el estudio de los estadísticos de orden:

- *Comparación:* Cuando se trata de comparar dos razones ab = cd, lo que establece una proporción. Los valores a, b, c y d son números enteros cualesquiera, y las razones a/b y c/d son relaciones multiplicativas entre los mismos. En el estudio de los percentiles se compara la razón dada por el orden del percentil (r/100) con la razón dada por la posición x del percentil en el conjunto de datos ordenado y el número total de elementos n del conjunto de datos (x/n). Por ejemplo, en un conjunto ordenado de 40 datos (n = 40), el percentil 20 (r = 20) sería aquel que ocupa la posición 8 (x = 8), dándose la comparación 20/100 = 8/40. También aparecería este tipo de problema al comparar dos percentiles.

- *Valor faltante:* Cuando uno de los términos de la proporción ab = cx es desconocido, donde a, b y c son números enteros conocidos y *x* es el valor que se pretende determinar. Si el valor del percentil es desconocido, se utiliza la comparación anterior para determinar una ecuación r/100 = x/n, de donde se obtiene *x*. Una vez determinado el valor *x*, el percentil sería el valor de la variable que ocupa el lugar *x*. Por tanto, además de aplicar el significado proto-algebraico de la proporcionalidad, habría que establecer una correspondencia entre cada elemento ordenado y el valor correspondiente de la variable. Siguiendo con el ejemplo anterior, para calcular la posición *x* del percentil 20 en el conjunto ordenado de 40 datos, resolvemos la ecuación $x = \frac{20 \cdot 40}{100} = 8$.

En nuestro trabajo tendremos también en cuenta el fenómeno denominado ilusión de linealidad (descrito, entre otros, por De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2007). Puesto que muchos fenómenos matemáticos y físicos pueden describirse mediante relaciones lineales, al estar relacionadas las magnitudes en las que intervienen la proporcionalidad, los estudiantes extienden el modelo lineal a situaciones en que no se aplica en diferentes temas matemáticos. Por ejemplo, cuando se pide a los estudiantes indicar el tipo de relación entre dos variables representadas en un diagrama de dispersión, hay una tendencia a sugerir que la relación es lineal, incluso cuando la tendencia del diagrama sea muy diferente a la de una recta (Estepa, 2008). Otros estudiantes consideran como funciones únicamente las funciones de tipo lineal (Evangelidoy, Spyrou, Elia y Gagatsis, 2004). Por otro lado, Van Dooren et al. (2003) describen varios ejemplos de ilusión de linealidad en el campo de la probabilidad, incluyendo ejemplos históricos, como las primeras soluciones a problemas propuestos por el Caballero de Meré, en las que se utilizó la proporcionalidad que no era adecuada y llevó a soluciones incorrectas.

5. Razonamiento proporcional y conflictos semióticos en el trabajo con los estadísticos de orden

Como se ha indicado, en el trabajo con los estadísticos de orden interviene el razonamiento proporcional, por lo que algunas dificultades de razonamiento proporcional se transmiten al trabajo con estos estadísticos. Un ejemplo lo tenemos cuando se desea calcular un percentil a partir de un conjunto de datos agrupados en intervalos. En este caso, es necesario realizar una interpolación en la distribución de frecuencias acumuladas, si se desea obtener un valor preciso para el percentil. Tomemos como ejemplo el cálculo de la mediana en un conjunto de datos agrupados en intervalos, siguiendo el procedimiento descrito en Batanero y Díaz (2008). Sean x_i y x_{i+1} los extremos inferior y superior del intervalo mediano, es decir, el intervalo en que la frecuencia relativa acumulada alcanza el valor ½.

Representemos en un polígono la distribución de frecuencias acumuladas (que en este caso es una línea poligonal. Nos centramos únicamente en el salto de la frecuencia acumulada en el intervalo mediano, es decir, aquél en el que se encuentra la mediana (Figura 1). En esta figura se han trazado dos líneas horizontales que corresponden a las frecuencias relativas acumuladas h_i y h_{i+1} correspondientes a los extremos del intervalo mediano x_i y x_{i+1}, respectivamente. Se han trazado también dos líneas verticales en estos extremos y se han marcado los puntos de corte del polígono de frecuencias acumuladas con dichas líneas horizontales y verticales.

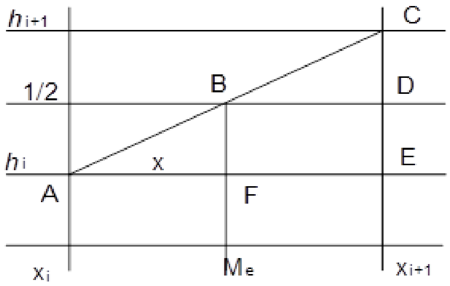

Figura 1. Cálculo de la mediana con datos agrupados.
Fuente: Batanero y Díaz (2008, p.56).

La mediana M_e es el valor de la variable al que corresponde una frecuencia relativa acumulada igual a ½. Por tanto, en la Figura 1 hay que determinar el segmento AF (x) y sumarlo al extremo inferior del intervalo mediano, x_i. Pero los triángulos ABF y ACE son proporcionales, por lo que también lo serán los segmentos AF (x) y AE (x_{i+1}-x_i). Utilizando el teorema de Thales tenemos una ecuación, cuya solución proporciona el valor x buscado:

$$\frac{x}{AE} = \frac{BF}{CE}, \text{ o lo que es lo mismo: } \frac{x}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\frac{1}{2} - h_i}{h_{i+1} - h_i}$$

Los conflictos de los estudiantes surgen al resolver incorrectamente la ecuación o al plantear la proporcionalidad en forma incorrecta (por ejemplo, cambiando numerador y denominador en una de las razones, lo que supone el uso incorrecto del teorema de Thales). En otros casos, no se llega a interpolar dando un valor "a ojo" para la mediana, incluido en el intervalo mediano.

También interviene el razonamiento proporcional al calcular un percentil en el caso más sencillo, es decir, a partir de un conjunto de datos no agrupados. En este caso, si el rango del percentil que se desea calcular es *r,* y *n* el número de datos de la muestra o población, habría que calcular el r% de *n*. El valor de la variable que ocupa este lugar sería el percentil. No obstante, es importante recordar que el conjunto de datos ha de estar ordenado, pues algunos estudiantes calculan los percentiles sin ordenar los datos (Mayén et al., 2009). Estos autores nos recuerdan también la dificultad con el caso de indeterminación, cuando más de un valor de la variable corresponde al rango del percentil buscado. En este caso todos estos valores cumplen la definición del percentil y la indeterminación se resuelve asignando la media aritmética del mínimo y máximo de los mismos como percentil.

Por otro lado, en ocasiones el razonamiento proporcional se generaliza indebidamente o se aplica inadecuadamente en el estudio de los estadísticos de orden. Los estudiantes están acostumbrados a que la proporcionalidad numérica tenga un paralelo con la proporcionalidad geométrica y esto ocasiona otros conflictos semióticos, entre los que destacamos los siguientes:

- *Se atribuye la proporcionalidad con el orden del percentil a la variable en estudio, y no al número de datos.* Así, la mediana es el valor de la variable tal que el 50% de los datos es menor o igual que ella y el otro 50% mayor. Algunos estudiantes suponen que lo que se deja por debajo de la mediana es el 50% del rango de variación de la variable, es decir, interpretan que la mediana es el centro geométrico de la distribución y la calculan hallando el valor medio entre el máximo y el mínimo del conjunto de datos. Por ejemplo, en un conjunto de datos 1, 3, 3, 4, 7, 8, 11, La mediana sería igual a 4, pero algunos estudiantes tomarían como mediana el valor 6, pues aplicarían la proporcionalidad, promediando los valores 1 y 11 (Mayén et al., 2007).
- *Se espera proporcionalidad entre el número de datos comprendido en un intervalo de valores y la amplitud de dicho intervalo.* En el gráfico de la caja el porcentaje de casos incluidos entre el primer cuartil y la mediana (25%) es igual al porcentaje de casos incluidos entre la mediana y el tercer cuartil (25%). Pero la distancia entre la mediana y los cuartiles es la misma únicamente si la distribución de la variable es simétrica, pero si es asimétrica, estas distancias pueden ser diferentes. Sin embargo, si el gráfico de la caja no es simétrico, algunos estudiantes interpretan que el porcentaje de casos entre la mediana y cada uno de los cuartiles primero y tercero es diferente. Es decir, quisieron trasladar la proporcionalidad geométrica a una proporcionalidad estadística en un caso que no se aplica. Esta confusión se ha observado en la interpretación del gráfico de la caja de una distribución asimétrica por parte de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria (Gea, Arteaga y Cañadas, 2017).
- *Se atribuyen a los estadísticos de orden algunas propiedades algebraicas de la función lineal que no se aplican.* Por ejemplo, no hay un elemento neutro en el cálculo de los estadísticos de orden; si aparece en el conjunto de datos un valor igual a cero, hay que tenerlo en cuenta en el cálculo del percentil. Por el contrario, en la función lineal $F(0+x) = 0 + F(x) = F(x)$ por lo cual el cero es un elemento neutro, lo que confunde a los estudiantes, como ha descrito Cobo (2003) en el cálculo de la mediana. En otros casos se atribuye la propiedad asociativa cuando no es adecuada. Así, por ejemplo, la mediana del conjunto de datos (1,1, 2, 3, 3, 4, 5) es 3. Si dividimos en dos este conjunto de datos, por ejemplo, tomamos por un lado (1, 1) y por otro (2, 3, 3, 4, 5) tenemos que sus medianas correspondientes son 1 y 3, respectivamente. Por tanto la mediana de estas dos medianas es igual a 2 que difiere de la mediana del conjunto de datos original que era 3.

6. Reflexiones finales

En este trabajo hemos analizado algunas dificultades de los estudiantes en el trabajo con los estadísticos de orden, relacionándolos con el razonamiento proporcional requerido para dicho trabajo, con el fin de orientar la labor del profesor en la enseñanza de estos estadísticos.

Hemos mostrado, en primer lugar, que el tipo de razonamiento algebraico requerido es aparentemente no muy elevado, pues se reduce al significado aritmético o proto-algebraico de la proporcionalidad en la descripción de Burgos y Godino (en prensa). Aun así, pensamos que los estadísticos de orden tienen una alta complejidad semiótica, al implicar además de diferentes objetos matemáticos ligados a la estadística (dato, conjunto de datos, variable, valor, rango, frecuencia, frecuencia acumulada, orden, posición en un conjunto de datos) otros ligados a la proporcionalidad (magnitud, cantidad, razón, proporción, función lineal).

Los ejemplos mostrados indican que, en ocasiones, los estudiantes no aplican como debieran la proporcionalidad en su trabajo con los estadísticos de orden, trasladando las dificultades con el razonamiento proporcional, por ejemplo, al plantear inadecuadamente una proporción o resolver incorrectamente una ecuación, al trabajo con otros estadísticos. En otros casos aplican la proporcionalidad a la variable en estudio (y no al número de valores en el conjunto de datos) o al conjunto de datos no ordenado o bien extienden incorrectamente propiedades de las funciones lineales a los estadísticos de orden, que no las poseen.

El profesor ha de estar atento a estas dificultades y prevenirlas en sus estudiantes para ayudarles a superarlas. Merece la pena una discusión detallada con los estudiantes de cuál es el significado preciso de los estadísticos de orden y un análisis de sus propiedades que pueden ser exploradas con la ayuda de algunos de los recursos existentes para el estudio de los estadísticos de orden en Internet. Finalmente destacamos la importancia de mostrar al estudiante ejemplos de uso de estos estadísticos en la vida cotidiana y profesional para aumentar su interés en esta temática.

Agradecimientos: Proyecto PID2019-105601GB-I00 (MICIN) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Bibliografía

Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Betanzos, F. G. y López, J. K. C. (2017). *Estadística aplicada en psicología y ciencias de la salud.* Madrid: Manual Moderno.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. D. A. Grows (Ed.). *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education.* Rotterdam: Sense Publisher.

Burgos, M. y Godino, J. D. (En prensa) Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática.*

Carvalho, C. (2001). *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade.* Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* New York: Springer.

Delson, A. y Mugabe, D. (2013). O conceito da mediana na perspectiva dos estudantes principiantes. *International Journal of Scientific & Technology Research, 2*(9), 202-206.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(2), 257-270.

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I. y Gagatsis, A. (2004). Concepciones de función de los estudiantes universitarios. *Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática.*

Fernandez, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142.

Gea, M. M., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 19-37.

Gea, M. M., Batanero, C., Fernández, J. A. y Arteaga, P. (2016). Interpretación de resúmenes estadísticos por futuros profesores de educación secundaria. *Journal of Research in Mathematics Education, 5*(2), 135-157.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Hoaglin, D. C., Mosteller, F. y Tukey, J. W. (1983). Understanding robust and exploratory data analysis. New York: Wiley.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). Early adolescents proportional reasoning on “rate” problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 219-233.

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C., & Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Unión, 9*(1), 187-201.

Mayén, S. y Díaz, C. (2010). Is median an easy concept? Semiotic analysis of an open-ended task. In K. Makar (Ed.), *Proceedings the Eighth International Conference on Teaching Statistics.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Disponible en: http://iase-web. org/documents/papers/icots8/ICOTS8_C265_MAYEN. Pdf.

Mayén, S., Díaz, C. y Batanero, C. (2009). Students´ semiotic conflicts in the concept of median. *Statistics Education Research Journal, 8*(2), 74-93.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Diferentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253.

Noelting, G. (1980 b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at succesive stages: Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 331-363.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 59-81.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Schuyten, G. (2001). Research skills: A closely connected triplet of research area, research methodology and statistics. En C. Batanero (Ed.), *Training researchers in the use of statistics* (pp, 227-230). Granada: IASE.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 113-138.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures*.* En R. Lesh, and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp, 127-174). New York: Academic Press.

Autores:

Carmen Batanero Bernabeu: Catedrática de Didáctica de la Matemática jubilada, Profesora Colaboradora en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Es miembro vitalicio de la International Association for Statistical Education.
E-mail: batanero@ugr.es 0000-0002-4189-7139

Silvia María Valenzuela Ruiz: Profesora ayudante doctora del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Doctora en Estadística e Investigación Operativa y Máster en Didáctica de la Matemática.
E-mail: svalenzuela@ugr.es 0000-0001-7467-8672

Nuria Begué Pedrosa: Profesora asociada del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Zaragoza. Doctora en Didáctica de la Matemática. E-mail: nbegue@unizar.es 0000-0003-1369-8711