

Una propuesta geométrico-recursiva para introducir el estudio de series numéricas en el aula

A geometric-recursive proposal for introducing the study of numerical series in the classroom

Juan A. Aledo, Juan C. Cortés, María E. Flores y Jose P. Llano

Fecha de recepción: 18-12-25

Fecha de aceptación: 11-04-26

Resumen	<p>Este trabajo introduce el razonamiento recurrente en la suma de series numéricas mediante construcciones geométricas con una interpretación gráfica sencilla. Se establece una conexión intuitiva entre series geométricas y telescópicas, lo que permite desarrollar un método general geométrico-recursivo para su suma. Los ejemplos propuestos admiten variantes que fomentan la creatividad individual y el trabajo en grupo. El enfoque combina intuición y formalización matemática, por lo que es aplicable tanto en niveles preuniversitarios como en cursos iniciales de universidad.</p> <p>Palabras clave: Recursividad; construcción geométrica; series numéricas; intuición gráfica; formalización matemática.</p>
Abstract	<p>This work introduces recurrent reasoning in the sum of numerical series through geometric constructions with a simple graphical interpretation. An intuitive connection is established between geometric and telescoping series, allowing for the generalization of a geometric-recursive summation method. The proposed examples allow for variations that encourage individual creativity and group work. The approach combines intuition with mathematical formalization, making it suitable for both pre-university levels and introductory university courses.</p> <p>Keywords: Recursiveness; geometric construction; numerical series; graphical intuition; mathematical formalization.</p>

1. Introducción

Los procesos recursivos se revelan como una estructura inherente en muchas de las situaciones que encontramos a nuestro alrededor. Pensemos, por ejemplo, en una *matrioshka*, comúnmente llamada muñeca rusa, que esconde una réplica a pequeña escala de sí misma, que a su vez esconde otra, y otra más. O en relatos que se cuentan dentro de otros relatos, como los que Sherezade narra para salvar su vida en *Las mil y una noches*. O en cómo un aprendiz de un idioma consulta el diccionario: busca una palabra cuya definición lo lleva a otra, y luego a otra, hasta alcanzar un término comprensible que le permite entender los anteriores.

En un proceso recursivo, cada término o estado se define a partir de uno o más términos o estados anteriores, junto con una o más condiciones iniciales. Matemáticamente, un proceso recursivo de primer orden se puede definir a partir de una sucesión $\{x_n\}$ en la que:

1. Se especifica la semilla o primer término x_0 .
2. Se proporciona una ley g que define cualquier término en función del anterior

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La definición anterior se puede extender a recurrencias de órdenes superiores a uno. Por ejemplo, conocidas dos semillas, x_0 y x_1 , las recurrencias de orden dos se pueden describir por expresiones de la forma

$$x_{n+2} = g(x_n, x_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Los razonamientos matemáticos que involucran procesos recursivos distan de ser sistemáticos, y requieren de un enfoque *ad hoc*, que a menudo combina distintas herramientas, como construcciones geométricas, desarrollos algebraicos, razonamientos inductivos o algoritmia. Por ello, el enfoque recursivo fomenta la intuición y el pensamiento crítico, y su éxito suele depender de un buen entrenamiento y de buenas dosis de creatividad y motivación. Estas características muestran el impacto positivo que el uso del razonamiento recursivo puede tener en alumnos Educación Secundaria (12-16 años), Bachillerato (16-18 años) y primeros cursos de Universidad. Sin embargo, en muchas asignaturas del currículo español, la recursividad se trata de manera tangencial. Nosotros creemos que es importante que el razonamiento recursivo se trabaje como un contenido específico dentro del aprendizaje matemático, ya que permite a los estudiantes desarrollar habilidades de generalización, patrón y pensamiento estructurado. Esta misma idea ha sido apoyada por otros autores en trabajos previos, centrados en la introducción de la recursividad en diferentes niveles educativos y contextos matemáticos (Lannin, Barker y Townsend, 2006; Sandefur y Manaster, 2022). No deben confundirse recursividad e inducción. Mientras la primera describe una forma de definir o construir un objeto a partir de pasos anteriores, la segunda hace referencia al método que permite demostrar la validez de una propiedad matemática para todos los números naturales a partir de un caso base.

En la era de la Inteligencia Artificial, es razonable que las clases de matemáticas incluyan actividades que desarrollen habilidades vinculadas al pensamiento algorítmico. Desaprovechar los contextos que ofrece el currículo del sistema educativo español de Secundaria, Bachillerato y los primeros años universitarios es una

oportunidad perdida. A pesar de ello, el tratamiento de las recurrencias en estos niveles sigue centrado casi exclusivamente en sucesiones aritméticas y geométricas, con un enfoque algebraico orientado a la deducción de fórmulas, cálculo de límites y ejercicios rutinarios.

Este trabajo tiene como objetivo presentar escenarios específicos en los que, mediante construcciones geométricas diseñadas *ad hoc*, se promueva el razonamiento matemático basado en recurrencias, en el marco del Análisis Matemático. La adaptabilidad de estas construcciones a diversos contextos se evidenciará a lo largo del texto. En el enfoque propuesto, cada estudiante puede desarrollar variantes geométricas a partir de una base común establecida por el docente, lo que favorece inicialmente la creatividad individual y, en una segunda etapa, el intercambio y análisis colectivo de las distintas propuestas.

Finalmente, se demuestran algunos resultados teóricos sobre la convergencia de ciertas series numéricas que permiten justificar de forma rigurosa los argumentos intuitivos utilizados desde el principio. El rigor aporta validez y estructura, y es fundamental para un aprendizaje matemático sólido. Así, combinar intuición y rigor en el proceso de enseñanza-aprendizaje enriquece la experiencia y favorece una comprensión más profunda de los conceptos, como ya señalan numerosos estudios de didáctica (Lockhart, 2009; D'Alessandro y Stevens, 2004; Davis y Hersh, 1998; Fischbein, 1987; Malaspina-Jurado, 2009; Peña-Páez y Mariño, 2020).

Si bien el enfoque propuesto se orienta principalmente a los niveles preuniversitarios, también resulta pertinente en cursos iniciales de Cálculo o Análisis Matemático. En el ámbito preuniversitario, es especialmente valioso incorporar actividades vinculadas a los distintos bloques temáticos, de modo que el estudiantado perciba la recursividad como una herramienta versátil y aplicable en contextos diversos. En los primeros cursos universitarios, este enfoque favorece la integración entre la intuición y el uso riguroso de resultados matemáticos del programa. Asimismo, los procesos recursivos promueven el uso del ordenador como instrumento para desarrollar competencias en programación y diseño de algoritmos, con proyección en todos los niveles educativos.

Proponemos un enfoque geométrico sugerente y formalmente sustentado para estudiar algunas series numéricas convergentes y calcular sus sumas —lo cual, como es sabido, es excepcional—. A través de construcciones geométricas, definimos procesos recursivos intuitivos que generan series infinitas conocidas, cuyas sumas se obtienen combinando razonamiento recursivo e intuición visual. A continuación, justificamos formalmente estas intuiciones. Este tipo de enfoque ya ha sido usado utilizado en trabajos previos para el cálculo de límites y sumas de series geométricas (Aledo, y Cortés, 2001; Alsina, y Nelsen, 2011; Cortés y Aledo, 2001).

2. Una mirada geométrica a la recursividad para la suma de series numéricas

En esta sección se analizarán distintas variantes de una construcción geométrica en el plano que da lugar a procesos recursivos que permiten obtener la suma de series numéricas convergentes. Primero se presentará el procedimiento geométrico de forma general, y luego se explicará cómo este admite diferentes formulaciones, tanto en su estructura como en la dimensión sobre la que se trabaja —ya sea en términos de longitudes o de áreas— para fundamentar la deducción de la suma de algunos tipos de series numéricas. De hecho, el proceso admite tantas variaciones como *arquitectos*

que lo diseñen, por lo que, desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje, su puesta en práctica en el aula es muy enriquecedora.

Partamos de una recta general $y = kx$ que pasa por el origen de coordenadas (posteriormente veremos que esta hipótesis se puede relajar) y es creciente, es decir, con $k > 0$. Tomamos un valor $x_0 > 0$ sobre el eje de abscisas y $m < 0$. El valor x_0 desempeña el rol de la semilla del proceso iterativo que posteriormente se detalla.

Definimos una sucesión $\{x_i\}$ sobre el eje de abscisas mediante el proceso recursivo que se muestra en la Figura 1.

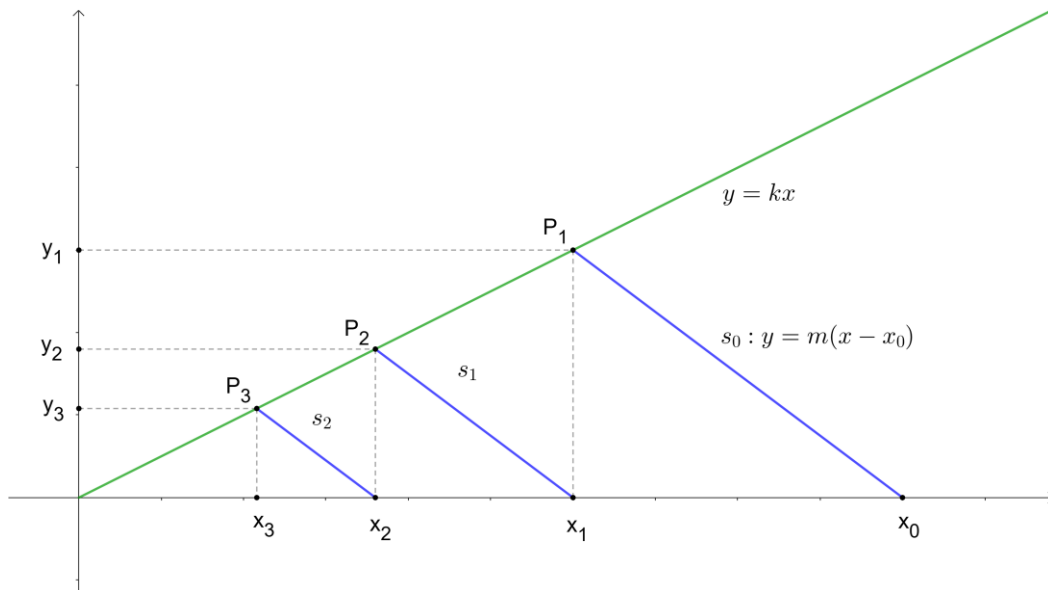


Figura 1. Descripción geométrica del proceso iterativo base.

Formalmente:

- Trazamos la recta $s_0: y = m \cdot (x - x_0)$, que pasa por x_0 y tiene pendiente $m < 0$. Esta recta interseca a la recta $y = kx$ en el punto $P_1 = (x_1, y_1)$. Así, $k \cdot x_1 = y_1 = m \cdot (x_1 - x_0)$.
- Para $i = 1, 2, \dots$, obtenemos el valor x_{i+1} a partir de x_i . Esto es, trazamos la recta $s_i: y = m(x - x_i)$, que pasa por x_i y tiene la misma pendiente m . Esta recta interseca a la recta $y = kx$ en el punto $P_i = (x_{i+1}, y_{i+1})$. Así, $k \cdot x_{i+1} = y_{i+1} = m \cdot (x_{i+1} - x_i)$. De lo anterior, obtenemos que

$$kx_{i+1} - m \cdot x_{i+1} = -m \cdot x_i. \quad (1)$$

La expresión (1) establece una recurrencia sobre los términos de la sucesión $\{x_i\}$ definida sobre el eje de abscisas. Considerando esta sucesión de términos recurrentes, definimos la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}),$$

que es una serie telescópica, ya que sus sumas parciales poseen un número fijo de términos tras su cancelación. En efecto, cada término x_{i+1} que aparece negativo en un sumando aparece positivo en el siguiente. Así, en las sumas parciales los términos intermedios se cancelan:

$$(x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n+1}) = x_0 - x_{n+1}.$$

Por ello, la serie queda determinada únicamente por el primer término y el término final de cada suma parcial. Por la intuición geométrica del proceso constructivo, ilustrado gráficamente en la Figura 1, es evidente que la suma de la serie anterior es finita e igual a x_0 , pues corresponde a la suma de las longitudes de los segmentos definidos por los pares x_i y x_{i+1} , $i = 0, 1, 2, \dots$, sobre el eje de abscisas. Mediante (1), obtendremos una ley de recurrencia que nos permitirá transformar la serie telescópica anterior —u otras series similares cuya suma pueda deducirse fácilmente por la construcción geométrica— en una serie conocida, cuya suma se calculará de manera intuitiva. En todas estas construcciones, justificaremos formalmente la intuición que proporciona el proceso geométrico recursivo descrito. De este modo, completaremos el proceso de aprendizaje desde la intuición a la formalización [6-8].

2.1 Primer escenario

Pensando en la puesta en práctica en el aula de las ideas que se exponen en este trabajo, empezaremos considerando el sencillo caso en el que $y = x$ (es decir, $k = 1$) y la pendiente $m = -1$ para las rectas s_i , $i = 0, 1, 2, \dots$. Siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, definimos la sucesión $\{x_i\}$ de puntos sobre el eje de abscisas, tal y como se muestra en la Figura 2.

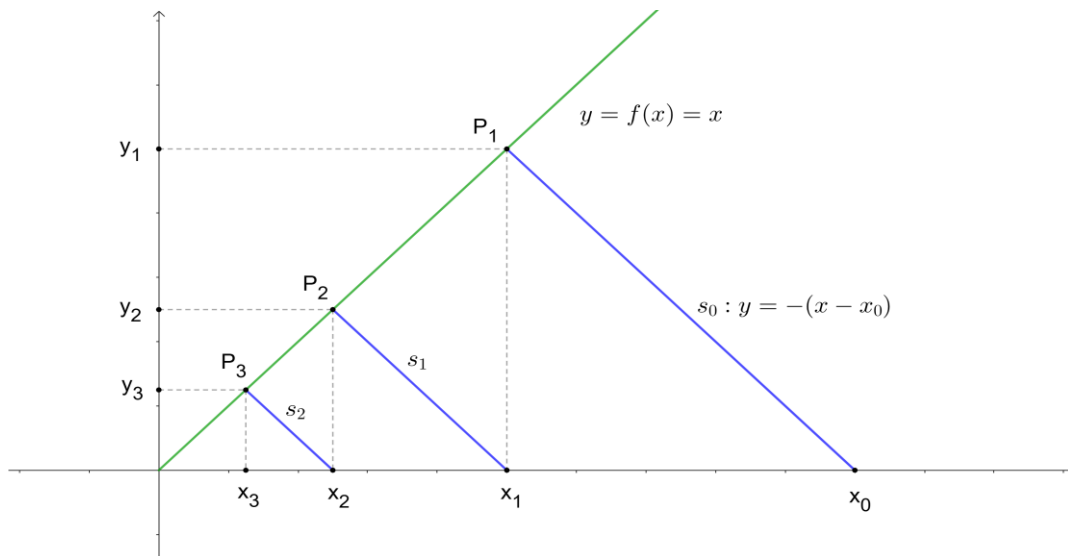


Figura 2 Caso particular que $y = x$ y $m = -1$.

De la construcción anterior, tenemos que $y_{i+1} = x_{i+1}$ y, sustituyendo en (1),

$$x_{i+1} + x_{i+1} = x_i,$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$, de donde obtenemos, mediante un razonamiento recursivo, que

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \cdot x_i = \cdots = \frac{1}{2^i} \cdot x_1 = \frac{1}{2^{i+1}} \cdot x_0. \quad (2)$$

Así, la sucesión $\{x_i\}$ es una progresión geométrica de razón $r = \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{1}{2} < 1$. De esta manera,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x_i - \frac{1}{2} \cdot x_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot x_i = x_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = x_0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Por la Figura 2, es fácil ver que la suma del miembro izquierdo es x_0 . Esto permite obtener mediante un razonamiento geométrico basado en la suma de la serie telescópica inicial, la conocida suma de la serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

En efecto, se trata de una serie geométrica porque cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón $r = \frac{1}{2}$. Así, la serie toma el valor que se sigue de la conocida fórmula para sumar estas series

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{r}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

2.1.1 Sumando infinitas áreas

El razonamiento anterior para obtener la suma de la serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ se ha basado en la suma (telescópica) de las longitudes $x_i - x_{i+1}$ de los segmentos de extremos x_i y x_{i+1} localizados en el eje de abscisas. A continuación, presentaremos otro enfoque, generado sobre la misma construcción geométrica, donde la serie numérica que se obtiene se deduce a partir de un razonamiento usando las áreas de determinadas figuras. Para ello, consideramos la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i,$$

siendo A_i el área del recinto delimitado por la recta $y = x$, el eje de abscisas, y las rectas s_i y s_{i+1} , $i = 0, 1, 2, \dots$, tal y como se muestra en la Figura 3.

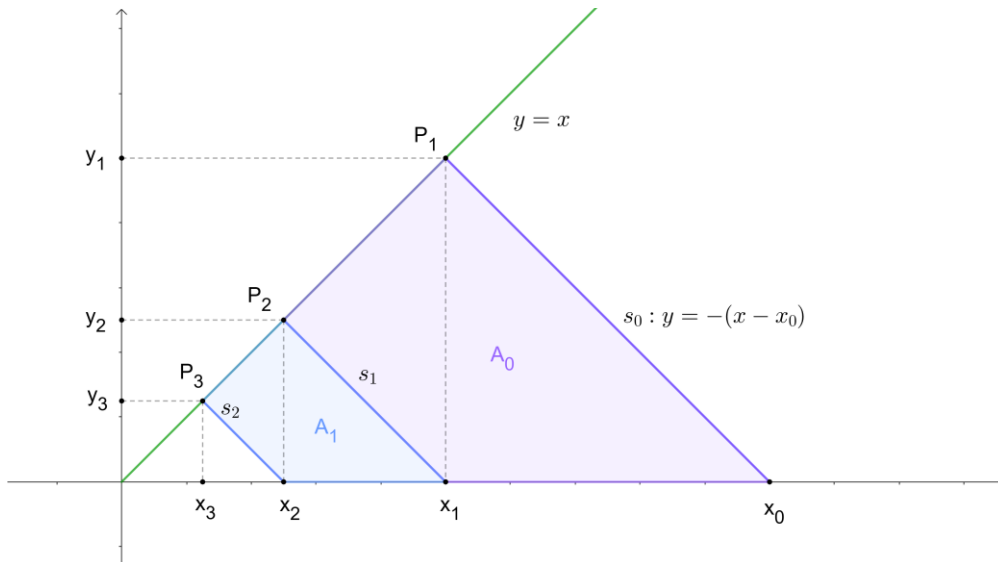


Figura 3 Proceso iterativo para calcular la suma de una serie a partir de áreas.

Nuevamente, desde una perspectiva geométrica, es fácil ver que la suma de dicha serie es finita y corresponde al área total, A_T , del triángulo definido por la recta $y = x$, el eje de abscisas y la recta s_0 . Teniendo en cuenta que dicho triángulo tiene base x_0 y altura $y_1 = x_1 = x_0/2$, resulta

$$A_T = \frac{x_0 \cdot x_1}{2} = \frac{x_0^2}{4}.$$

Por otro lado, como se muestra en la Figura 4, cada recinto con área A_i corresponde a un trapecio que puede descomponerse en tres triángulos de igual área B_i , puesto que las rectas $s_i, i = 0,1,2, \dots$, e $y = x$ son perpendiculares.

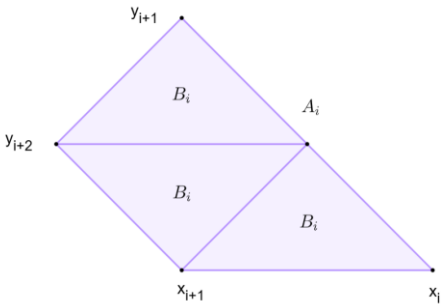


Figura 4 Trapecio de área A_i y su descomposición en tres triángulos de igual área B_i .

Usando que $y_{i+2} = x_{i+2} = x_i/4$, se sigue inmediatamente que

$$B_i = \frac{(x_i - x_{i+1}) \cdot x_i/4}{2} = \frac{(x_i - x_i/2) \cdot x_i/4}{2} = \frac{1}{16} \cdot x_i^2.$$

El área total del trapecio es entonces

$$A_i = 3 \cdot B_i = \frac{3}{16} \cdot x_i^2 = \frac{3}{16} \cdot x_0^2 \cdot \frac{1}{2^{2i}} = \frac{3}{16} \cdot x_0^2 \cdot \frac{1}{4^i}.$$

Así, tenemos que $\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{1}{4} < 1$. Esto es, la sucesión $\{A_i\}$ es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$. De la igualdad anterior resulta

$$\frac{1}{4} \cdot x_0^2 = A_T = \sum_{i=0}^{\infty} A_i = \frac{3}{16} \cdot x_0^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{3}{16} \cdot x_0^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i},$$

de donde se obtiene la suma de la serie geométrica de razón $r = 1/4$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{4}{3}.$$

De nuevo, este resultado coincide, como no puede ser de otra manera, con el que se obtiene de la fórmula para el cálculo de la suma de una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{4} < 1$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{r}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

2.1.2 El argumento directo de Thales frente a la recursividad

Hasta ahora hemos obtenido la suma de dos series geométricas distintas mediante razonamientos basados en procesos recursivos infinitos. Ahora presentaremos otro enfoque que permite obtener la suma de una serie mediante un razonamiento basado en la aplicación del Teorema de Thales. Creemos que complementar el trabajo en el aula con este enfoque es muy enriquecedor desde el punto de vista formativo.

Volvamos de nuevo a la construcción de la Figura 2. Recordemos que adoptaremos la notación $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots$, y denotaremos por \overline{AB} la longitud de un segmento de extremos A y B .

Trabajaremos con los triángulos semejantes T_1 y T_2 de vértices, respectivamente, $\{O = (0,0), V_1 = (x_0, 0), P_1 = (x_1, y_1)\}$ y $\{O = (0,0), V_2 = (x_2, 0), P_2 = (x_2, y_2)\}$, tal y como se muestra en la Figura 5.

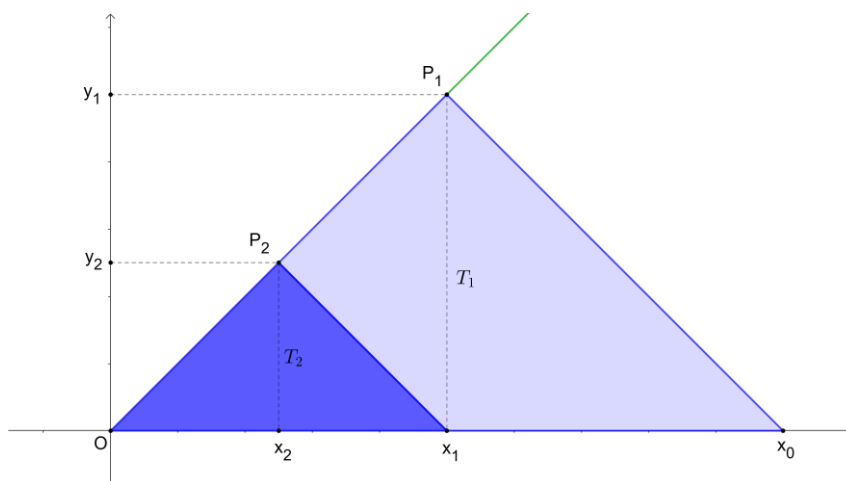


Figura 5 Triángulos semejantes T_1 y T_2 .

Aplicando el Teorema de Thales a estos triángulos, obtenemos

$$\frac{\overline{OV_1}}{\overline{OV_2}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}.$$

Así,

$$2 = \frac{x_0}{x_1} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}}}{\sum_{i=2}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}}},$$

de donde $2 \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}}$, es decir, $2 \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}} = \overline{P_1 P_2} + \sum_{i=2}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}}$, y en consecuencia $\sum_{i=2}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}} = \overline{P_1 P_2}$. De las expresiones de los puntos x_i e y_i , ya conocidas, resulta

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_0}{4} - \frac{x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{4} - \frac{x_0}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x_0^2}{16} + \frac{x_0^2}{16}} = \frac{\sqrt{2} \cdot x_0}{4}.$$

De todo lo anterior,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}} = \overline{P_1 P_2} + \sum_{i=2}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}} = 2 \cdot \overline{P_1 P_2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot x_0}{4} = \frac{\sqrt{2} \cdot x_0}{2}. \quad (3)$$

Por otra parte, observemos que

$$\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sqrt{\frac{x_i^2}{4} + \frac{x_i^2}{4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot x_i}{2}. \quad (4)$$

Por (4) y la expresión de los x_i obtenida en (2), se sigue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \frac{\sqrt{2} \cdot x_0}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$

que junto a (3) se traduce en la igualdad

$$\frac{\sqrt{2} \cdot x_0}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}} = \frac{\sqrt{2} \cdot x_0}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Simplificando, obtenemos de nuevo la suma geométrica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

3. Rectas de pendiente arbitraria

Consideramos ahora el caso general mostrado en la Figura 1, en el que tomamos la recta $y = k \cdot x$ con $k > 0$, y una pendiente $m < 0$. Despejando en (1), obtenemos

$$x_{i+1} = \frac{m}{m-k} \cdot x_i = \dots = \left(\frac{m}{m-k}\right)^i \cdot x_1 = \left(\frac{m}{m-k}\right)^{i+1} \cdot x_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

En consecuencia, la sucesión $\{x_i\}$ es una progresión geométrica de razón $r = \frac{m}{m-k} < 1$, pues se tiene que $m < 0$ y $k > 0$.

Como antes, la longitud del segmento de extremos 0 y x_0 sobre el eje de abscisas puede expresarse como la suma infinita de las longitudes de los segmentos determinados por los pares x_i y x_{i+1} , $i = 0, 1, 2, \dots$; es decir, como la suma telescópica

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{m-k} \right)^i \cdot x_0 - \left(\frac{m}{m-k} \right)^{i+1} \cdot x_0 \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{m}{m-k} \right) \right] \cdot x_0 \cdot \left(\frac{m}{m-k} \right)^i = \left(\frac{k}{k-m} \right) \cdot x_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{m}{m-k} \right)^i. \end{aligned}$$

Cancelando el término x_0 en la expresión anterior y despejando, obtenemos la suma de la serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{m}{m-k} \right)^i = \frac{1}{\left(\frac{k}{k-m} \right)} = \frac{k-m}{k} = \frac{1}{1 - \frac{m}{m-k}}.$$

Como se indica en el último paso, obviamente, este cálculo coincide con el obtenido al utilizar la fórmula clásica para la suma de una serie geométrica de razón $|r| < 1$. Así, hemos calculado la suma de una serie geométrica de razón $|r| < 1$ a través de la suma gráfica de una serie telescópica.

Mediante argumentos similares, podemos extender la suma infinita de las áreas de la sección anterior a este escenario más general. Nótese que en este caso no podemos descomponer los trapecios de área A_i en tres triángulos iguales. No obstante, una descomposición como la mostrada en la Figura 6 permite calcular el área A_i del trapecio como suma de las áreas de un paralelogramo de área C_i y un triángulo de área B_i . En este sentido, resulta interesante incidir en que situaciones más complejas requieren estrategias de resolución más elaboradas, lo que debe resultar estimulante para los estudiantes. Dejamos como ejercicio al lector desarrollar los cálculos en este contexto más general.

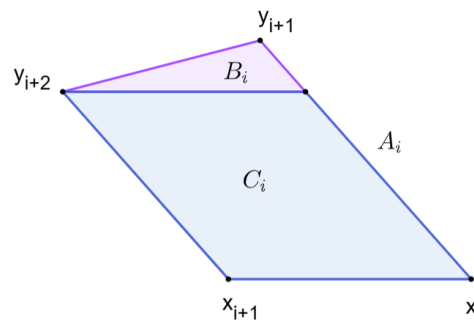


Figura 6 Descomposición del trapecio en un paralelogramo de área C_i y un triángulo de área B_i .

De manera similar, podemos utilizar el Teorema de Thales para obtener la suma de los segmentos de extremos y_i e y_{i+1} localizados sobre la recta $y = k \cdot x$.

3.1 Incorporando trigonometría

En las variantes anteriores, hemos considerado que el término x_i , $i = 1, 2, \dots$ de la sucesión $\{x_i\}$ se obtiene proyectando el término y_i sobre el eje de abscisas. Podemos construir nuevas variantes suponiendo que cada término x_i se obtiene mediante el proceso que mostramos en la Figura 7.

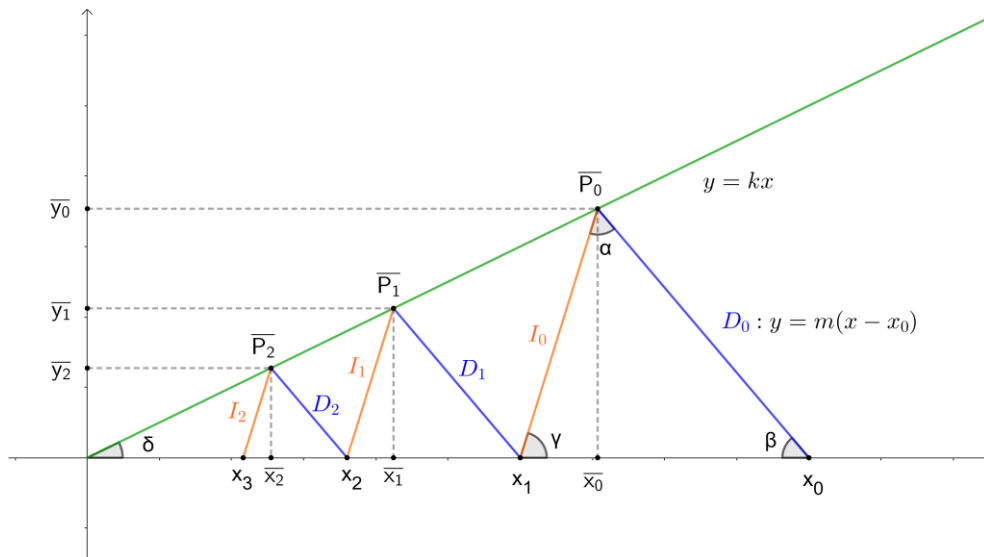


Figura 7 Proceso iterativo para calcular la suma de una serie utilizando ángulos.

Como puede observarse, partimos de nuevo de un valor $x_0 > 0$ sobre el eje de abscisas, un *ángulo de rebote* α , un valor $m < 0$ (pendiente de las rectas D_i) y la recta $y = k \cdot x$ con pendiente $k > 0$. Nótese que el ángulo α debe ser tal que el punto x_{i+1} quede a la izquierda, en el eje de abscisas, del punto \bar{x}_i . Veamos qué condición debe cumplir α para que esto ocurra.

Denotemos por β al ángulo interior que forman el eje de abscisas con cada recta $D_i, i = 0, 1, 2, \dots$, y consideremos el triángulo rectángulo mostrado en la Figura 8.

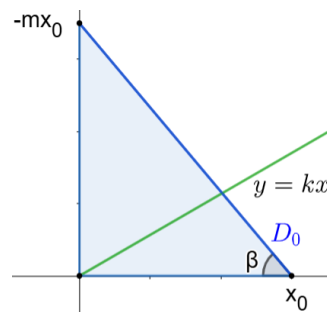


Figura 8 En azul, triángulo rectángulo formado por la recta D_0 y los ejes de coordenadas.

De ahí,

$$\tan(\beta) = \frac{-m \cdot x_0}{x_0} = -m \rightarrow \beta = \arctan(-m) = -\arctan(m),$$

ya que la función arcotangente es impar. A la vista de la construcción de la Figura 7, α debe cumplir $\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} + \arctan(m)$.

En primer lugar, calculamos $\bar{P}_0 = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, el punto de corte de las rectas $y = k \cdot x$ y $D_0: m \cdot (x - x_0)$. De la igualdad $kx = m(x - x_0)$ obtenemos que $\bar{x}_0 = \frac{m}{m-k} \cdot x_0$ e $\bar{y}_0 = \frac{km}{m-k} \cdot x_0$. Utilizando la ecuación punto-pendiente de una recta, podemos determinar que la recta I_0 viene dada por la expresión

$$I_0: y - \frac{k \cdot m}{m - k} \cdot x_0 = \tan(\gamma) \left(x - \frac{m}{m - k} \cdot x_0 \right).$$

Para relacionar la expresión de x_1 con el término x_0 , simplemente tenemos que considerar que la recta I_0 pasa por el punto $(x_1, 0)$, por lo que

$$-\frac{k \cdot m}{m - k} \cdot x_0 = \tan(\gamma) \left(x_1 - \frac{m}{m - k} \cdot x_0 \right).$$

Por tanto, despejando x_1 obtenemos que

$$x_1 = \left(\frac{m}{m - k} \right) \cdot x_0 - \left(\frac{k}{\tan(\gamma)} \right) \cdot \frac{m}{m - k} \cdot x_0 = \left(1 - \frac{k}{\tan(\gamma)} \right) \cdot \frac{m}{m - k} \cdot x_0.$$

En general, para $i = 0, 1, \dots$, por un argumento inductivo se sigue que

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \left(1 - \frac{k}{\tan(\gamma)} \right) \cdot \frac{m}{m - k} \cdot x_i = \left[\left(1 - \frac{k}{\tan(\gamma)} \right) \cdot \frac{m}{m - k} \right]^2 \cdot x_{i-1} = \dots \\ &= \left[\left(1 - \frac{k}{\tan(\gamma)} \right) \cdot \frac{m}{m - k} \right]^{i+1} \cdot x_0. \end{aligned}$$

Es decir, la sucesión $\{x_i\}$ es geométrica de razón $r = \frac{x_{i+1}}{x_i} = \left(1 - \frac{k}{\tan(\gamma)} \right) \cdot \frac{m}{m - k}$. Probamos a continuación que, de hecho, dicha razón es positiva y menor que 1. Veamos primero que $r > 0$. Tenemos que $\frac{m}{m - k} > 0$, ya que $m < 0$ y $k > 0$. Por lo tanto,

$$r = \left(1 - \frac{k}{\tan(\gamma)} \right) \cdot \frac{m}{m - k} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{k}{\tan(\gamma)}.$$

Dado que $\gamma \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, tenemos que $\tan(\gamma) > 0$. En consecuencia, la desigualdad anterior se verifica si, y solo si,

$$\tan(\gamma) > k = \tan(\delta) \Leftrightarrow \gamma > \delta,$$

lo que es cierto por construcción, dado que de otra manera no podríamos construir los triángulos de la sucesión. Por lo tanto, $r > 0$.

Veamos ahora que $r < 1$. Puesto que $k = \tan(\delta)$ y $m = -\tan(\beta)$, tenemos que

$$\begin{aligned} r &= \left(1 - \frac{k}{\tan(\gamma)} \right) \cdot \frac{m}{m - k} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\tan(\gamma) - \tan(\delta)}{\tan(\gamma)} \right) \cdot \frac{m}{m - k} < 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\tan(\gamma) - \tan(\delta)}{\tan(\gamma)} < \frac{m - k}{m} &\Leftrightarrow \frac{\tan(\gamma) - \tan(\delta)}{\tan(\gamma)} < \frac{-\tan(\beta) - \tan(\delta)}{-\tan(\beta)}. \end{aligned}$$

Por tanto $r < 1$ si, y solo si,

$$1 - \frac{\tan(\delta)}{\tan(\gamma)} < 1 + \frac{\tan(\delta)}{\tan(\beta)} \Leftrightarrow -\frac{\tan(\delta)}{\tan(\gamma)} < \frac{\tan(\delta)}{\tan(\beta)}.$$

Como $\beta, \gamma \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, sus tangentes son positivas, y, por tanto, lo anterior ocurre si, y solo si,

$$-\tan(\beta) < \tan(\gamma),$$

que es cierto por ser ambas tangentes positivas. En consecuencia, la razón es positiva y menor que 1. A continuación, y usando trigonometría básica, vamos a expresar la razón en términos de los datos iniciales m , k y α . Como $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, podemos escribir

$$\tan(\gamma) = \tan(\pi - (\alpha + \beta)) = -\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)},$$

y usando además que $\beta = \arctan(-m)$, tenemos que

$$\tan(\gamma) = -\frac{\tan(\alpha) - m}{1 - \tan(\alpha) \cdot (-m)} = \frac{m - \tan(\alpha)}{1 + m \cdot \tan(\alpha)}.$$

De esta manera, r puede reescribirse como

$$r = \left(1 - \frac{k}{\tan(\gamma)}\right) \cdot \frac{m}{m - k} = \left(1 - \frac{k \cdot [1 + m \cdot \tan(\alpha)]}{m - \tan(\alpha)}\right) \cdot \frac{m}{m - k},$$

con $k > 0, m < 0$ y $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2} + \arctan(m), \pi\right]$. Finalmente, como en los escenarios anteriores, obtenemos la suma de la serie geométrica de razón r a partir de la suma (intuitiva y geométrica) de una serie telescópica:

$$x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} (r^i x_0 - r^{i+1} x_0) = (1 - r)x_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} r^i,$$

es decir,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{k \cdot [1 + m \cdot \tan(\alpha)]}{m - \tan(\alpha)}\right)^i \left(\frac{m}{m - k}\right)^i = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{k \cdot [1 + m \cdot \tan(\alpha)]}{m - \tan(\alpha)}\right) \cdot \frac{m}{m - k}}.$$

Como antes, podemos extender la suma infinita de las áreas de la sección anterior, así como el razonamiento de Thales, a este contexto más general en el que introducimos ángulos.

4 Una variante mediante circunferencias

En la construcción de la Figura 1, hemos considerado rectas $s_i, i = 0, 1, 2, \dots$ para generar los puntos de corte y_i con la recta $y = k \cdot x, i = 1, 2, \dots$. Introducimos ahora una nueva variante en la que las rectas s_i son sustituidas por arcos C_i de circunferencias con distinto radio, que ilustramos en la Figura 9.

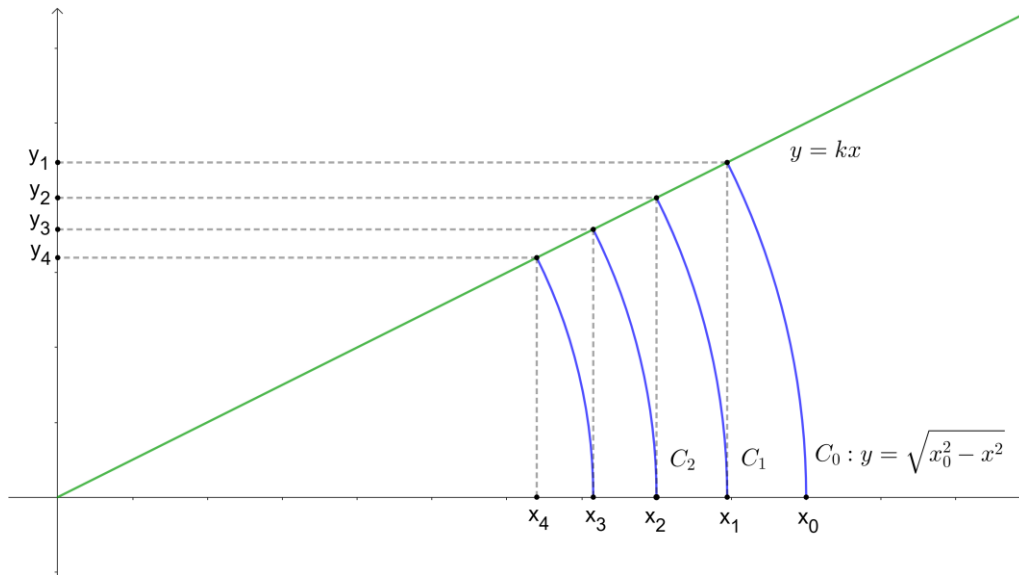


Figura 9 Proceso iterativo utilizando circunferencias para calcular la suma de una serie.

En ella, definimos la sucesión $\{x_i\}$ sobre el eje de abscisas a partir del siguiente proceso recurrente:

- Trazamos la recta $y = k \cdot x$ que pasa por el origen de coordenadas con pendiente $k > 0$.
- Tomamos $x_0 > 0$ y trazamos la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio x_0 . Esta circunferencia corta a la recta $y = k \cdot x$ en el punto de coordenadas (x_1, y_1) , siendo $y_1 = k \cdot x_1$.
- Para calcular x_{i+1} a partir de x_i , con $i = 0, 1, \dots$, trazamos la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio x_i . Esta circunferencia corta a la recta $y = k \cdot x$ en el punto de coordenadas (x_{i+1}, y_{i+1}) , siendo $y_{i+1} = k \cdot x_{i+1}$.

Por la construcción anterior, es claro que $x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 = x_i^2$, y usando también que $y_{i+1} = k \cdot x_{i+1}$ obtenemos que $x_{i+1}^2 + k^2 \cdot x_{i+1}^2 = x_i^2$. Dividiendo todos los términos de la expresión anterior entre x_i^2 resulta $\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^2 = \frac{1}{1+k^2}$, de donde $\frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \in (0,1)$. Como el cociente anterior es una constante positiva menor que 1, porque $k > 0$, podemos concluir que la sucesión $\{x_i\}$ es geométrica de razón $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$. Además, del cociente anterior obtenemos el término general de la sucesión $\{x_i\}$,

$$x_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot x_i = \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 \cdot x_{i-1} = \dots = \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^{i+1} \cdot x_0.$$

Por otra parte, como en las construcciones anteriores, la intuición del proceso geométrico infinito descrito arriba nos dice que la suma de las longitudes $x_i - x_{i+1}$ de los segmentos de extremos x_i y x_{i+1} , $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$, es una suma telescópica cuyo valor es x_0 . El término general de dicha serie, $z_i = x_i - x_{i+1}$, resulta

$$z_i = x_i - x_{i+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^i \cdot x_0 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^{i+1} \cdot x_0 = \frac{(\sqrt{1+k^2})^{i+1} - (\sqrt{1+k^2})^i}{(\sqrt{1+k^2})^{2i+1}} \cdot x_0.$$

Así expresada,

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{1+k^2})^{i+1} - (\sqrt{1+k^2})^i}{(\sqrt{1+k^2})^{2i+1}} \cdot x_0$$

no parece nada fácil de calcular –si bien, es como suele aparecer en un curso de Cálculo para plantear el estudio de series telescópicas– y, sin embargo, la intuición geométrica nos dice que su suma es x_0 . Pero, además, la serie telescópica anterior se puede expresar en términos de la serie geométrica de razón $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ mediante una sencilla manipulación

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}) = x_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right)^i - \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right)^{i+1} \right] = x_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right)^i.$$

A partir de esta igualdad podemos, como en los casos anteriores, obtener la suma de la serie geométrica a partir de la suma (intuitiva) de la serie telescópica. Finalmente, podemos justificar analíticamente la intuición que nos ha permitido sumar la serie telescópica usando de nuevo la fórmula para la suma de una serie geométrica de razón r , $|r| < 1$. En nuestro caso,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

En efecto,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}) = x_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right)^i = x_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}} = x_0.$$

5. De la intuición al rigor, y del rigor a la computación

En todas las variantes anteriores, hemos considerado una recta $y = k \cdot x$ para generar la sucesión de términos $\{x_i\}$ sobre el eje de abscisas. Planteamos ahora la siguiente situación más general que mostramos en la Figura 10.

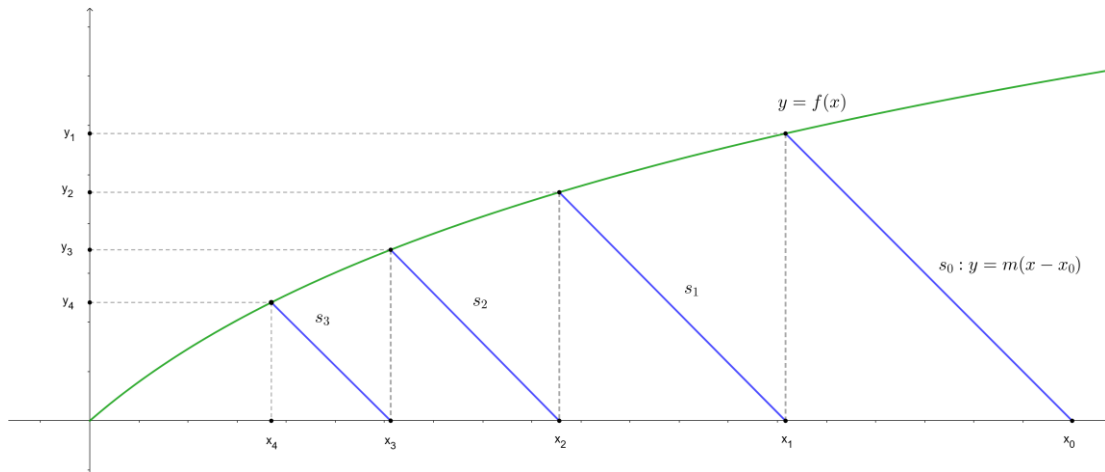


Figura 10 Descripción geométrica del proceso iterativo con una función general $y = f(x)$.

Así, partimos de una función general $y = f(x)$ derivable creciente que pasa por el origen de coordenadas, es decir, cumpliendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) > 0$. Tomamos un valor $x_0 > 0$ sobre el eje de abscisas y $m < 0$. Se define entonces una sucesión $\{x_i\}$ sobre el eje de abscisas mediante el siguiente proceso recurrente:

- Se traza la recta $y = m \cdot (x - x_0)$, que pasa por x_0 y tiene pendiente m , que corta a la función $y = f(x)$ en el punto (x_1, y_1) , es decir, $y_1 = f(x_1)$.
- Para $i > 1$, obtenemos el valor x_{i+1} a partir de x_i del siguiente modo: se traza la recta $y = m \cdot (x - x_i)$, que pasa por x_i y tiene pendiente m , que corta a la función $y = f(x)$ en el punto (x_{i+1}, y_{i+1}) , es decir, $y_{i+1} = f(x_{i+1})$.

De la construcción anterior se sigue que

$$f(x_{i+1}) - m \cdot x_{i+1} = -m \cdot x_i. \quad (6)$$

Justifiquemos ahora de manera rigurosa algunos resultados que hemos venido asumiendo, de forma intuitiva, a lo largo de este trabajo.

En primer lugar, hemos aceptado intuitivamente (por la construcción geométrica) que la sucesión $\{x_i\}$ tiene límite y su valor es 0. La existencia de dicho límite puede probarse viendo que la sucesión es monótona decreciente y acotada inferiormente. En efecto, usando la recurrencia (6) y que $m < 0$ y $f > 0$ en un intervalo abierto conteniendo a los x_i , es claro que $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{m} \cdot f(x_{i+1}) < 0$. Esto prueba que $\{x_i\}$ es monótona decreciente. Por otra parte, como f es derivable y creciente, existe f^{-1} , la cual es también una función creciente. En consecuencia, como $f(x_i) > 0$ y $0 \in \text{dom}(f)$, se sigue que $x_i > f^{-1}(0)$ para $i > 0$. Tenemos entonces, a partir de (6) y del hecho de que $\{x_i\}$ es monótona decreciente, que $x_i = x_{i+1} - \frac{1}{m} \cdot f(x_{i+1}) > x_{i+1} > f^{-1}(0)$, es decir, $f^{-1}(0)$ es una cota inferior de $\{x_i\}$. Una vez justificado que $\{x_i\}$ tiene límite, denotemos a éste por $L = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$. Para calcularlo, obsérvese que como por hipótesis la función f es derivable, ésta es continua. Entonces, tomando límites en (6), se obtiene

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{i+1}) - m \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1}\right) - m \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = -m \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} x_i,$$

de donde $f(L) - m \cdot L = -m \cdot L$ y en consecuencia $f(L) = 0$. Es decir, el límite es una raíz de la función f que define la recurrencia. Finalmente, como $f(x)$ es (estrictamente) creciente y cumple que $f(0) = 0$, se sigue que $L = 0$. De todo ello se concluye que la serie telescópica también converge, y la suma es

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}) = x_0 - L = x_0,$$

como se intuía por la construcción recursiva-geométrica.

Obsérvese que este resultado general, se puede particularizar al caso considerado en los escenarios anteriores donde $f(x) = k \cdot x$, que es creciente, derivable, y pasa por el origen de coordenadas (es decir, su único cero es $L = 0$). En este punto, es interesante observar que, aunque en los ejemplos anteriores y en el desarrollo teórico anterior hemos asumido que $f(0) = 0$, los argumentos siguen siendo válidos si no pedimos a la función creciente $f(x)$ que corte al eje de abscisas en $x = 0$, sino que pueda tener otro punto de corte $L \neq 0$ (cero de $f(x)$). Por ejemplo, si se consideramos la función $f(x) = k_1 \cdot x + k_2$, $k_1, k_2 > 0$, es muy sencillo comprobar siguiendo los mismos argumentos expuestos anteriormente que la sucesión de abscisas construidas mediante la recurrencia (6) converge al límite $L = -\frac{k_2}{k_1}$, que corresponde al cero de dicha función.

Desde el punto de vista teórico, uno de los aspectos más interesantes del enfoque geométrico-recursive anterior es que no solo permite sumar series geométricas (de razón $0 < r < 1$, debido a la construcción geométrica) a partir de una suma telescópica —hecho que en sí mismo nos parece de interés pedagógico porque ambos tipos de series se suelen presentar en el aula de forma desconectada—, sino que, a partir de la relación (6), podemos sumar series de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} -\frac{f(x_{i+1})}{m}, \quad (7)$$

donde $m < 0$ y f cumple las condiciones impuestas anteriormente, es decir, $f(0) = 0$ y $f' > 0$, incluso en el caso en que la forma de f pueda hacer inviable obtener de forma explícita, a partir de la recurrencia (6), el término general $\{x_i\}$ —como afortunadamente se ha podido hacer en los ejemplos anteriores donde $\{x_i\}$ era una sucesión geométrica—. Por lo general, esto sucederá cuando f sea no lineal. Sin embargo, gracias a la relación (7) y a que hemos probado teóricamente que el valor de la suma telescópica es x_0 , podemos calcular de forma *exacta* la serie $\sum_{i=0}^{\infty} -\frac{f(x_{i+1})}{m}$, lo cual puede ser ciertamente complicado.

Además, a partir de (7) y del resultado ya probado de que existe $L = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, puede inferirse que $f(L) = 0$. En efecto, al converger la serie telescópica $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$ —algo que también se ha probado ya rigurosamente— se deduce la convergencia de la serie $\sum_{i=0}^{\infty} -\frac{f(x_{i+1})}{m}$. En consecuencia, por la condición necesaria de convergencia, su término general debe tender a cero, es decir

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} -\frac{f(x_{i+1})}{m} = -\frac{1}{m} \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{i+1}) = -\frac{1}{m} \cdot f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1}\right) = -\frac{1}{m} \cdot f(L),$$

y por tanto, $f(L) = 0$, como queríamos probar.

En la Figura 11 se muestra el código en Mathematica® para el caso de la función $f(x) = e^x - 1$, que cumple las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(x) = e^x > 0$, y tomando $m = -2$ y $x_0 = 2$. Nótese que no es posible obtener de forma explícita una expresión general para los términos x_i , aunque estos sí pueden ser calculados recursivamente. Así, en la Figura 11 se muestran gráficamente los $n = 10$ primeros términos de la sucesión $\{x_i\}$ y su suma, 1.97982, que se aproxima a la suma exacta, 2. De la gráfica de la derecha se intuye además que el cero de $f(x) = e^x - 1$, es decir $x = 0$, coincide con el límite de la sucesión $\{x_i\}$.

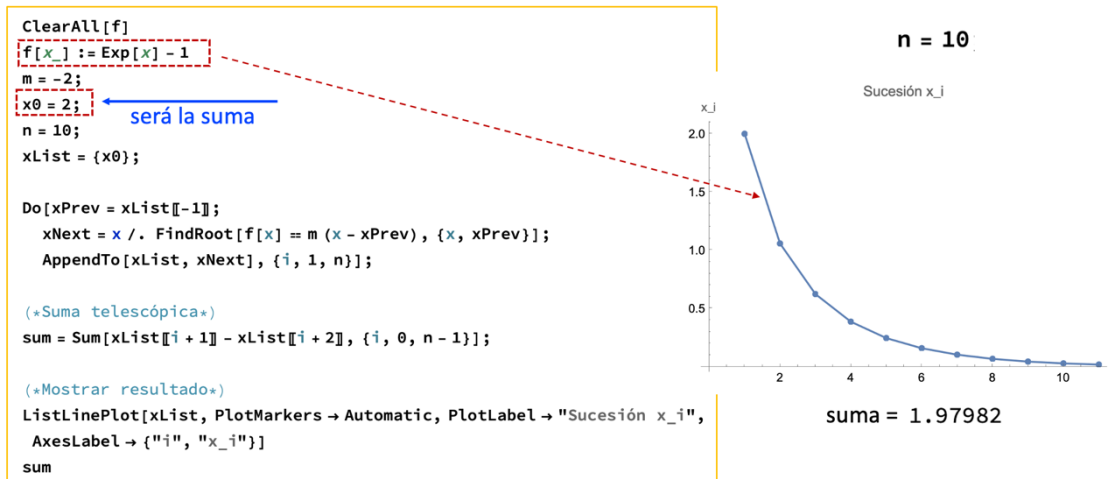


Figura 11 Aproximación de la suma de la serie (7) para $f(x) = e^x - 1$, $m = -2$ y $x_0 = 2$, usando $n = 10$ términos. Código en Mathematica®.

Finalizamos el trabajo mostrando que la convergencia de la serie numérica dada en (7), y de término general $-\frac{f(x_{i+1})}{m}$, la cual se ha obtenido a partir de la recurrencia general (6) que caracteriza el proceso geométrico sobre el que hemos basado nuestra propuesta, puede conectarse con contenidos teóricos más avanzados. Esta extensión puede vincularse con contenidos teóricos más avanzados que, si bien exceden el currículo de educación secundaria, pueden desarrollarse en primeros cursos universitarios. Específicamente, podemos ver que la convergencia de dicha puede caracterizarse aplicando el conocido criterio integral de MacLaurin (Vorobiov, 1994). Recuérdese que este resultado establece que dada una función $g(x)$ positiva, continua y decreciente en el intervalo $[0, \infty[$, entonces la serie de términos $u_i = g(i)$, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$, es convergente si, y solo si, la integral impropia $\int_0^{\infty} g(x)dx$ es convergente.

Vamos a aplicar este resultado al caso particular, abordado en la Sección 2.2, en que la sucesión de abscisas $\{x_i\}$ toma la forma $x_i = a^i$, siendo $a = \frac{m}{m-k} \in]0, 1[$ y $f(x) = k \cdot x$, con $k > 0$ y $m < 0$. Si tomamos $u_i := x_i - x_{i+1}$ y $g(x) = -\frac{k \cdot a^{x+1} \cdot x_0}{m}$, es fácil comprobar que $g(x)$ es positiva, continua y decreciente en el intervalo $[0, \infty[$, y además, por (6),

$$g(i) = -\frac{k \cdot a^{i+1} \cdot x_0}{m} = -\frac{f(x_{i+1})}{m} = u_i.$$

Por todo lo anterior, la serie geométrica de término general $u_i = x_i - x_{i+1} = a^i \cdot (1 - a) > 0$ es convergente si, y solo si, lo es la integral impropia

$$\int_0^{\infty} g(x) dx = \int_0^{\infty} -\frac{k \cdot a^{x+1} \cdot x_0}{m} dx = -\frac{k \cdot a \cdot x_0}{m} \int_0^{\infty} a^x dx < \infty.$$

Como es bien conocido, esta integral es en efecto convergente, pues $a \in [0,1]$.

El ejemplo anterior, además de conectar los aspectos más intuitivos del desarrollo geométrico-recursive previo con los resultados teóricos, subraya que los criterios que normalmente se estudian en un primer curso de Cálculo en la universidad sirven para probar la convergencia de algunas series, pero no para calcular de forma exacta su suma, lo cual sí se ha conseguido a través del enfoque geométrico propuesto.

6 Conclusiones

Los procesos recursivos ofrecen una vía potente para desarrollar el pensamiento crítico y la intuición. Sin embargo, su tratamiento educativo suele ser limitado y centrado en casos muy particulares, incluso en niveles universitarios.

En este trabajo presentamos distintas construcciones geométricas versátiles, diseñadas para introducir procesos recursivos aplicables a la suma de diversas series, incluyendo las geométricas. Dichas construcciones ofrecen a los estudiantes la oportunidad de desarrollar variantes propias, promoviendo tanto la creatividad individual como la discusión colectiva en un entorno colaborativo que potencia el aprendizaje.

Además, demostramos algunos resultados teóricos que permiten conectar la intuición con el rigor matemático, algo que tiene especial interés en el estudio de series numéricas a nivel universitario. Sin embargo, la formalización de los resultados no se hace desde el principio, si no a través de un proceso previo que involucra la intuición geométrica y la propia creatividad de cada estudiante.

Por último, al explorar distintas variantes de las construcciones geométricas propuestas, surgen situaciones complejas que resultan difíciles de abordar de forma explícita. En estos casos, el uso de herramientas computacionales se vuelve especialmente útil, y su eficacia se sustenta en la intuición generada por las propias construcciones.

Referencias bibliográficas

- J. A. Aledo, J. C. Cortés (2001): *Suma geométrica de series numéricas*. Revista de Didáctica de las Matemáticas Uno 27, 105-114.
- C. Alsina, R. B. Nelsen (2011): *Charming Proofs. A Journey into Elegant Mathematics*. Nelsen Lewis & Clark College, Washington, D.C.
- J. C. Cortés, J. A. Aledo (2001): *Cálculo geométrico del límite de sucesiones trigonométricas*. Suma 34, 53-58.

- W. D'Alessandro, I. Stevens (2024): *Mature intuition and mathematical understanding*. The Journal of Mathematical Behavior 76, 101203. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101203>.
- P. J. Davis, R. Hersh (1988): *Experiencia Matemática*. Editorial Labor/MEC, Madrid.
- E. Fischbein (1987): *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Mathematics Educational Library, Dordrecht.
- J. K. Lannin, D. D. Barker, B. E. Townsend (2006): *Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?*. The Journal of Mathematical Behavior 25(4), 299-317. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.004>.
- P. Lockhart (2009): *A Mathematician's Lament: How School Cheats Us Out of Our Most Fascinating and Imaginative Art Form*. Bellevue Literary Press, New York.
- U. Malaspina-Jurado (2009): *La intuición matemática y sus componentes*. Matematicalia: Revista Digital de Divulgación Matemática de la Real Sociedad Matemática Española 5(3).
- L. Peña-Páez, O. Y. Mariño (2020): *La importancia de la intuición matemática en los procesos de enseñanza*. Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología 7(1), 51–59.
- J. Sandefur, A. B. Manaster (2022): *Encouraging research on recursive thinking through the lens of a model of the spread of contagious diseases*. ZDM-Mathematics Education 54, 895-907. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01354-6>.
- N. N. Vorobiov (1994): *Teoría de las Series. Parte I*. Rubiños-1860 S.A., Madrid.

Juan Ángel Aledo Sánchez (Albacete, 1974).

Licenciado en Matemáticas y Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Murcia. Catedrático de Universidad en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Castilla-La Mancha, ha desarrollado su carrera investigadora en temas como la Geometría Diferencial, el Aprendizaje Automático, la Matemática Discreta, y la Didáctica de las Matemáticas, habiendo publicado más de un centenar de artículos.

Juan Carlos Cortés López (Valencia, 1969).

Licenciado en Matemáticas y Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universitat Politècnica de València (UPV). Catedrático de Universidad en el Departamento de Matemática Aplicada de la UPV, ha publicado más de 250 artículos en temas como las funciones especiales matriciales, las ecuaciones diferenciales con incertidumbre, la modelización matemática y la Didáctica de las Matemáticas.

María Elena Flores Fernández (La Roda, 1984).

Licenciada en Matemáticas por la Universitat de València y Profesora Asociada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Castilla-La Mancha. Actualmente, desarrolla su tesis doctoral en Didáctica de las Matemáticas.

Jose Pablo Llano Gómez (Albacete, 1999).

Graduado en Matemáticas por la Universitat de València y Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Castilla-La Mancha. Su carrera investigadora se ha centrado en temas como los sistemas dinámicos discretos y las redes complejas.

Datos de identificación de los autores:

Juan Ángel Aledo Sánchez; juanangel.aledo@uclm.es; <https://orcid.org/0000-0003-1786-8087>; España.

Juan Carlos Cortés López; jccortes@mat.upv.es; <https://orcid.org/0000-0002-6528-2155>; España.

María Elena Flores Fernández; elena.flores@uclm.es; <https://orcid.org/0009-0007-8426-8061>; España.

Jose Pablo Llano Gómez; josepablo.llano@uclm.es; <https://orcid.org/0009-0006-1115-6037>; España.