UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 74. Agosto 2025
Páginas 01-06

EL RINCÓN INTERCREATIVO. NÚMERO 74

O CANTO INTERCRIATIVO. NÚMERO 74

The INTERCREATIVE CORNER. NUMBER 74

Uldarico Malaspina; Renzo Sandoval; Fernando Alva; Gustavo Landa y Guillermo Reyes

Comentarios al problema del número anterior.

El problema del número anterior fue:

> *En el parque “Los Héroes”, de Ventanilla, se alquila bicicletas para pasear. Se debe pagar 3 soles, como monto fijo por el derecho a alquilar, más 5 soles por cada hora o fracción de hora que se use la bicicleta. Si Julián alquila una bicicleta y la devuelve después de x horas, ¿cuánto debe pagar?*

El problema se originó al pedir a un grupo de profesores de secundaria, que creen un problema considerando la siguiente situación, observada:

En un parque se alquila bicicletas para pasear. Se paga una cantidad fija por el alquiler, más una cantidad por cada hora o fracción de hora de uso de la bicicleta.

Comentarios de Renzo Sandoval Quispe

He tenido la oportunidad de conversar este artículo con algunos colegas dedicados tanto a la enseñanza secundaria como a la formación docente. Las opiniones han sido muy favorables, destacando la riqueza didáctica del enfoque planteado y la pertinencia de utilizar situaciones reales como punto de partida para introducir conceptos matemáticos complejos, como la función techo o funciones escalonadas.

En particular, varios colegas coincidieron en que la propuesta permite transitar de manera natural desde un contexto cotidiano —el alquiler de una bicicleta— hacia la abstracción matemática, respetando el principio de significatividad en el aprendizaje. Se valoró también el uso del gráfico como herramienta para visualizar el comportamiento de la función sin necesidad de conocer a priori su expresión algebraica, lo que favorece la comprensión intuitiva de la relación entre las variables involucradas.

Por otro lado, he tenido la oportunidad de explorar esta situación con estudiantes de secundaria en el marco de una secuencia didáctica centrada en modelación matemática. La experiencia fue sumamente enriquecedora. Los estudiantes, al principio, tendían a asumir que el tiempo debía expresarse en números enteros, pero al introducir casos como "1 hora y 10 minutos" o "50 minutos", comenzaron a problematizar la idea de fracción de hora y a reconocer que cualquier fracción, por mínima que fuera, implicaba el pago completo de una hora adicional. Esta tensión entre lo continuo del tiempo y lo discreto del costo se convirtió en una excelente oportunidad para introducir formalmente la función techo.

Lo más interesante fue observar cómo los estudiantes, sin conocer el nombre formal de esta función, lograban construir el gráfico a partir de casos concretos, generando representaciones escalonadas con saltos que reflejan fielmente el comportamiento del sistema de pago descrito. Esta situación puso de manifiesto, una vez más, que el pensamiento funcional puede y debe desarrollarse antes de formalizar la noción algebraica, permitiendo que los estudiantes exploren, conjeturen y validen ideas a partir de datos, gráficos y contextos reales.

En síntesis, considero que el artículo plantea una propuesta potente desde el punto de vista didáctico, que favorece el desarrollo del pensamiento algebraico y funcional desde una perspectiva contextualizada, y que permite abrir un abanico de posibilidades para la creación de nuevos problemas y situaciones de aprendizaje. Además, promueve una visión de las matemáticas como herramienta para interpretar y actuar en la realidad, más allá del mero ejercicio de procedimientos abstractos.

Comentarios de Fernando Alva Montañez

El artículo es un valioso aporte al campo de la enseñanza de las matemáticas, puesto que parte de la reflexión de una situación de la vida cotidiana, el alquiler de una bicicleta, y la convierte en un recurso para la modelización matemática.

La elección de esta situación resulta idónea, ya que lleva a la formalización una situación real, mostrando que las matemáticas no son un conjunto de reglas abstractas, sino un lenguaje poderoso para interpretar y comprender el mundo.
Desde el punto de vista didáctico, resalta la importancia de crear y resolver problemas a partir de situaciones reales, incluso cuando no se entregan todos los datos explícitos. Ello fomenta en el docente y en el estudiante el uso de la creatividad, la toma de decisiones y la capacidad de formular supuestos razonables.

El análisis que hace el autor sobre el paso de considerar únicamente valores enteros hacia la necesidad de trabajar con funciones escalonadas y la función techo es especialmente relevante, puesto que en la práctica escolar se tiende con frecuencia a simplificar los problemas, reduciéndolos a casos enteros y perdiendo la riqueza que ofrecen las variables. En cambio, aquí se muestra cómo las matemáticas amplían su alcance mediante representaciones gráficas y algebraicas más fieles a la situación planteada.

La contribución principal radica en mostrarnos que la enseñanza de las matemáticas vinculada a la realidad nos brinda caminos para la creación, la exploración y el pensamiento crítico.

Cabe mencionar que debe hacerse un pequeño ajuste en la función f, que es correcta para todos los puntos del intervalo]0; 4], pero no para x = 0, que se muestra en el gráfico (Figura 3). Bastaría considerar x = 0 como un caso aparte.

A continuación, unas respuestas breves a 4 de las preguntas que deja el Dr. Malaspina:

i) ¿Qué aprendizaje considera usted que más se refuerza, al resolver el problema de este artículo?

> Se refuerza el aprendizaje por indagación (Jhon Dewey)

ii) ¿Qué problema(s) crearía usted para que, al resolverlo(s), sus estudiantes puedan comprender mejor y resolver el problema de este artículo?

> Juan desea pintar la sala de su casa. Si sabe que un balde de pintura alcanza para cubrir una superficie de treinta metros cuadrados, ¿cuántos baldes de pintura debe comprar para realizar dicha actividad?

iii) ¿Qué relación encuentra entre la función g(n) = 3 + 5n dada en la Figura 2 y la función cuyo gráfico se muestra en la Figura 3?

> La función g(n) resulta de restringir f(x) para valores enteros positivos de x

iv) ¿Cómo se modificará el gráfico mostrado en la Figura 3 si se cambian los precios para el alquiler de una bicicleta?

> El cambio de los precios de alquiler de una bicicleta generaría movimientos verticales de la gráfica con respecto al eje de ordenadas (si el precio aumenta el gráfico "sube" y si el precio disminuye el gráfico "baja")

Comentarios de Gustavo Landa Chávez

El problema del alquiler de una bicicleta, con una tarifa fija más un cobro por cada hora o fracción de hora, ofrece una oportunidad valiosa para fortalecer el pensamiento abstracto y la inducción matemática. A partir de una situación cotidiana, los estudiantes son guiados a obtener una expresión general que relaciona el tiempo de uso con el costo total, utilizando la función techo. Esta actividad no solo permite modelar con precisión un sistema tarifario real, sino que también impulsa la capacidad de generalizar patrones, formular funciones por tramos, y desarrollar una visión crítica sobre cómo las matemáticas describen —y regulan— aspectos comunes de la vida diaria.

Para facilitar el entendimiento, es clave asegurar que el estudiante asimile plenamente el contexto del problema. Es común, especialmente en estudiantes más reflexivos o con alto rendimiento, que pierdan interés si encuentran incongruencias aparentes. Por ejemplo, podrían cuestionar por qué se cobra una tarifa fija de 3 soles incluso si no se usa la bicicleta, ya que 3+5n=0 cuando n=0; o por qué no se paga solamente 5 soles por una hora de paseo. Para evitar confusión y mantener la motivación, conviene reformular el problema, indicando que los 3 soles representan el costo de ingreso al parque Los Héroes, y no directamente al uso de la bicicleta.

Además, puede proponerse el siguiente problema complementario:

Conjetura de tarifa óptima inversa

> Dada una cantidad de dinero T, la cantidad máxima de tiempo que se puede alquilar una bicicleta sin exceder esa cantidad es:

$$x = \left\lfloor \frac{T-3}{5} \right\rfloor$$

Esta formulación invierte el problema original, introduce la idea de función inversa aproximada, y permite trabajar la función piso, completando así el aprendizaje.

Análisis funcional del modelo de tarifa y su representación por partes

La función mostrada en la Figura 2, de la forma $g(n) = 3 + 5n$, se evalúa en valores enteros no negativos mediante un enfoque inductivo para construir una expresión general. En cambio, la función representada en la Figura 3 modela directamente el problema del alquiler de bicicleta sin restringirse a valores enteros, y se evalúa en el intervalo continuo $0 \leq x \leq 4$. Aunque a primera vista parece que la función es $f(x) = 3 + 5\lceil x \rceil$, esto no es del todo correcto, ya que el valor $f(0) = 0$ no coincide con esa fórmula. La expresión adecuada es:

$$h(x) = \begin{cases} 3 + 5\lceil x \rceil \; si \; 0 < x \leq 4 \\ 0 \quad si \; x = 0 \end{cases}$$

Este ajuste en el modelo funcional resalta la importancia del análisis fino del contexto en la construcción de funciones a trozos, permitiendo al estudiante afinar su pensamiento abstracto, lógico y gráfico en la representación de situaciones reales.

¿Cómo cambiaría el gráfico si se modifican los precios?

Es una pregunta interesante que plantea el autor.

Si se incrementa la tarifa fija, el gráfico completo se desplazará verticalmente hacia arriba; si se reduce, el desplazamiento será hacia abajo. Este cambio no altera la forma escalonada de la función, y el desplazamiento vertical será exactamente igual al valor en que varíe dicha tarifa.

En cambio, al modificar el costo por hora o fracción de hora, se afecta la altura de los escalones: una tarifa mayor genera una mayor separación vertical entre tramos, mientras que una menor provoca escalones más bajos. Es decir, se modifica la pendiente discreta del crecimiento por intervalos.

Cabe resaltar que el único valor invariante de la función $h(x)$, definida previamente, es $h(0) = 0$, el cual permanece constante sin importar los ajustes en la tarifa fija o en el costo variable por tiempo de alquiler.

Una experiencia con funciones cuadráticas: la gráfica que enseñó sin fórmulas:

En una clase de álgebra, mostré a mis estudiantes una parábola sin dar su ecuación. Solo les dije que representaba la altura de un objeto en el tiempo. Pronto imaginaron escenarios: un cohete, una pelota... hasta que una estudiante sugirió: *"¿Y si es una clavadista olímpica?"*

Desde ese momento, comenzaron a analizar el gráfico con profundidad: estimaron tiempos, alturas, propusieron cambios, incluso dedujeron una ecuación cuadrática a partir de tres puntos del gráfico, sin haberla visto antes.

La clave fue no mostrar la fórmula. Al privarlos de ella, les di espacio para observar, interpretar y modelar. El gráfico se convirtió en un detonador de pensamiento abstracto, conexión con el mundo real y discusión matemática genuina.

<u>Nota de U. Malaspina</u>: Agradezco las observaciones de Fernando Alva y de Gustavo Landa, relacionadas con un pequeño ajuste, pertinente, a la expresión formal de la función correspondiente al gráfico que se muestra en la Figura 3.

Comentarios de Guillermo Reyes Parra

La propuesta de Modelización Matemática que presenta el Dr. Uldarico Malaspina, quien en alrededor de 50 años se ha desempeñado como docente, investigador y autoridad en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), constituye una iniciativa muy seria, creativa e innovadora, marcando un rumbo necesario en la evolución de estrategias de la enseñanza aprendizaje en el área de matemáticas en el nivel de Educación Básica Regular, ante el desarrollo y el empleo de nuevas tecnologías, en particular de la Inteligencia Artificial.

El aprendizaje más relevante significativo es contribuir a presentar a los estudiantes una situación real cotidiana que contribuya a la comprensión del comportamiento funcional, más allá de las formalizaciones. Esto tiene un valor pedagógico muy importante, pues promueve la conexión entre el pensamiento matemático y la realidad circundante.

Una realidad identificable por los estudiantes, determinando relaciones entre variables y llegando a una función escalonada (la función techo) que no es típica en Educación Básica Regular Nivel Secundaria.

Se fomenta la competencia de modelización matemática, entendida como una práctica compleja, la habilidad para interpretar una situación del mundo real, identificar variables relevantes, formular su relación matemática, y usar representaciones diversas —numérica, algebraica y gráfica— para comprender el fenómeno. El tránsito desde una situación del mundo real hacia su representación matemática exige una serie de decisiones epistemológicas: ¿qué aspectos del fenómeno se consideran relevantes?, ¿cuáles se descartan?, ¿qué tipo de relación matemática se considera adecuada para su formalización? Estas decisiones no son triviales, y requieren tanto una comprensión profunda del fenómeno como del aparato formal disponible para representarlo.

La propuesta que presenta el Dr. Malaspina supera una exigencia didáctica inaplazable, traza un nuevo horizonte epistemológico de la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica Regular del Nivel Secundaria. Al situarse en el centro del proceso educativo, la modelización matemática permitirá al estudiante vincular estructuras formales con experiencias contextualizadas, favoreciendo, de este modo, un aprendizaje profundo, auténtico y significativo.

Ante el desafío que supone la irrupción de la Inteligencia Artificial en los entornos educativos, se ofrece un andamiaje metodológico que promueve el pensamiento crítico, la autonomía cognitiva y el entendimiento profundo de las relaciones funcionales en situaciones reales. De este modo, la matemática potencia una capacidad de lectura, interpretación y transformación de la realidad y deja de ser una abstracción descontextualizada para los estudiantes en formación del Nivel Secundaria.

A modo de conclusión, la propuesta planteada no sólo favorece la competencia matemática, sino que también cultiva una postura intelectual activa ante el conocimiento. En este sentido, el aula se convierte en un espacio de indagación, reflexión y construcción colectiva: la matemática es lenguaje, forma de pensamiento y práctica social.

Anexo

El Rincón Intercreativo, como su nombre lo sugiere, nace con el propósito de hacer más explícito nuestro deseo de interactuar con los lectores, y que esa interacción sea también creativa, en el sentido de comunicarnos ideas, propuestas, reflexiones, etc., a partir del problema o de la situación expuestos en el artículo de *El Rincón de Problemas*, correspondiente a cada número de esta revista. Tales comunicaciones pueden ser:

a) Comentarios y sugerencias. (Puntos de vista que complementan lo dicho en el artículo, o que manifiestan concordancias o discrepancias. Todos son bienvenidos.)
b) La creación de un nuevo problema. (Me envían el texto de tal problema y, preferentemente, una solución o líneas generales para resolverlo.)
c) El desarrollo de actividades con estudiantes o con colegas. (Me envían una breve narración de la actividad–que podría ser un juego –y, preferentemente, algunos comentarios de lo realizado.)
d) Respuesta(s) a alguna(s) de la(s) pregunta(s) que se formula(n), específicamente, en *este* número.

Lo que envíen, también puede ser algo relacionado con un problema o situación expuestos en números anteriores de *UNIÓN*. Ciertamente, les agradeceremos mencionar el número del caso. Más aún, si tienen alguna experiencia con estudiantes o con colegas, relacionadas con creación de problemas nos gustará que se animen a hacernos llegar sus relatos.

Para intercrear sobre el problema de este número.

A continuación, copio las preguntas relacionadas con el problema y la solución expuesta en el artículo "**De una casa a un edificio: oportunidad para hacer supuestos, modelizar y estimar**" en *El Rincón de Problemas* de este número. Recordemos que el problema es:

> *Una familia vivía en una casa amplia en una zona urbana de Lima. Vendieron su casa a una empresa constructora y ahora construirán en ese terreno un edificio de departamentos. Estimar el incremento del consumo de agua que ocurrirá cuando todos los departamentos estén ocupados.*

Por cierto, la comunicación no necesariamente debe ser sobre alguna de las siguientes cuestiones; las escribo solo para considerar algunas posibilidades:

i) Para resolver el problema propuesto ¿usted haría los mismos supuestos que hicieron los profesores de la experiencia expuesta? Explique.

ii) ¿Qué otros supuestos consideraría usted para hacer una estimación, como lo requiere el problema de este artículo?

iii) ¿Qué problema(s) crearía usted, para sus estudiantes, similar(es) al tratado en este artículo?

iv) ¿Considera usted que trabajar este tipo de problemas aporta a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la realidad actual? ¿Por qué?

Agradeceremos que los lectores nos envíen sus comunicaciones, a más tardar el 31/10/2025.

Deben ser enviadas en un mensaje por correo electrónico a umj.union@gmail.com Si prefieren, pueden enviar un documento breve, como archivo adjunto, usando Word, Arial 12 y página de tamaño A4.

¡Esperamos y agradecemos anticipadamente sus comunicaciones intercreativas!

Uldarico Malaspina,
Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP); Director Fundador del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en la PUCP (IREM-PUCP);Director Fundador de la revista Pro-Mathematica del Departamento de Ciencias de la PUCP; Presidente de la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana; Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú; Premiado por el Estado Peruano con las Palmas Magisteriales en el grado de Amauta (el más alto); Profesor Honorario de la Universidad Nacional de Tumbes; Doctor Honoris Causa por la Universidad Nacional de Huancavelica. umalasp@pucp.edu.pe

Renzo Sandoval Quispe
Docente especializado en Matemática y Física con sólida formación en educación secundaria y con posgrados en gestión curricular e innovación del aprendizaje. Cuenta con más de seis años de experiencia en instituciones públicas y privadas, liderando procesos de enseñanza, tutoría y formación digital y promoviendo el uso de herramientas tecnológicas en el aula.
Su enfoque pedagógico integra neurodiversidad, pensamiento metacognitivo y diseño universal del aprendizaje, fomentando entornos inclusivos y afectivos. Correo-e: renzo.sandoval.18@gmail.com

Fernando Alejandro Alva Montañez,
Bachiller en matemática por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, con gran vocación por la docencia. Actualmente curso el último ciclo en la maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú y estoy realizando mi tesis en la línea de la creación y resolución de problemas. Tengo 6 años de experiencia como docente de matemática en educación básica, con énfasis en los cursos de álgebra, trigonometría y razonamiento matemático.
Correo-e: alvafernando23@gmail.com

Gonzalo Landa Chávez
Bachiller en Ingeniería Mecánica por la Universidad Nacional de Ingeniería, con especial interés por la docencia y la investigación en matemáticas, la innovación tecnológica y el desarrollo sostenible.
Experiencia en el desarrollo de ingeniería conceptual, básica y de detalle, así como en la formulación de soluciones para problemas de resonancia en equipos mineros. Participación en dos oportunidades en la Feria de Proyectos de la Accreditation Board for Engineering and Technology (ABET).
Empleo de softwares especializados de ingeniería en diseño asistido por computadora y simulación por elementos finitos.
Correo-e: gonzalo.landa.c@uni.pe

Guillermo Reyes Parra
Profesor con amplia experiencia en educación secundaria y superior