UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 74. Agosto 2025
Páginas 01-19

Utilización de GeoGebra en la enseñanza del álgebra lineal

Adoree Alvarado Silva

Resumen	Propuesta del uso de GeoGebra como herramienta complementaria en la enseñanza del álgebra lineal, enfocándose en: sistemas de ecuaciones lineales en tres variables y transformaciones lineales en el plano cartesiano. Se incluyen ejemplos prácticos y el uso de herramientas específicas de GeoGebra para enriquecer el proceso de análisis y enseñanza-aprendizaje, basados en experiencia docente con estudiantes de primer año de la Universidad Andrés Bello. **Palabras clave**: GeoGebra, Sistemas lineales, Transformaciones lineales.
Abstract	Translation of the summary (10 lines maximum) English text of the summary, arial 10, line spacing, simple, justified, spacing above 0, spacing rear 0 **Keywords**: Between 3 and 5 keywords
Resumo	Tradução do resumo (máximo de 10 linhas) portuguez texto do resumo, arial 10, linha espaçamento, simples, justificado, espaçamento acima de 0, espaçamento 0 de volta **Palavras-chave: Entre 3 e 5 palavras-chave**

1. Introducción

Como plantea Turgut (2019), el álgebra lineal es una de las materias más desafiantes del pregrado por la diversidad de objetos matemáticos que estudia: matrices, vectores y ecuaciones lineales. Por tanto, no es suficiente enseñar únicamente definiciones, cálculos y procedimientos, es necesario que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda de estos objetos matemáticos mediante su representación geométrica.

En respuesta a esta necesidad pedagógica, y en base a la experiencia docente del curso Álgebra Lineal para estudiantes de primer año, de las carreras Ingeniería Física, Licenciatura en Física y Licenciatura en Astronomía de la Universidad Andrés Bello (Santiago de Chile), se propone la implementación del software

GeoGebra como herramienta didáctica para la visualización conceptual, con el objetivo de fortalecer la comprensión geométrica de temas específicos del curso.

Los temas por desarrollar con el uso de GeoGebra son dos: (1) Sistemas de ecuaciones lineales en tres variables y (2) Transformaciones lineales en el plano cartesiano: su descripción geométrica (contracción, expansión, rotación). Cabe destacar que estos dos tópicos se enseñan en tiempos distintos durante el semestre académico. En general, (1) se estudia al inicio del curso y (2) hacia la mitad del curso, una vez establecidos los conceptos de matrices, siguiendo la secuencia propuesta por Lay (2007) en ‘’Algebra lineal y sus aplicaciones’’.

El propósito de las actividades presentadas consiste en complementar la enseñanza tradicional del álgebra lineal mediante el análisis geométrico de ambos conceptos (1) y (2). Para ello, se proporcionan definiciones teóricas, ejemplos concretos, explicaciones detalladas sobre el uso de las herramientas de GeoGebra (Vista Algebraica, Calculadora CAS y Vista Gráfica 3D), así como enlaces directos a applets interactivos que facilitan la exploración y comprensión de estos conceptos fundamentales del álgebra lineal.

2. Marco Teórico

(1) Sistemas de ecuaciones lineales. Para comprender este concepto, base del curso Algebra Lineal, es necesario definir qué es una ecuación lineal (ver Figura 1).

Definición 1. *Una* ecuación lineal *en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (de n variables) es una ecuación que se escribe de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde b y los coeficientes *$a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales.*

Figura 1. Definición de ecuación lineal. Apunte del curso (Alvarado, 2024).

¿Qué representa geométricamente una *ecuación lineal*? Para responder esta pregunta, nos enfocaremos en describir ecuaciones lineales en dos y tres variables, con algunos ejemplos.

Una ecuación lineal en dos variables $x,\ y$ representa *una recta* en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, si la ecuación lineal es $-2x + y = 1$, se despeja una variable en función de la otra. En este caso despejamos y, quedando $y = 2x + 1$. Así, la variable y depende de x, y todos los valores que son solución de esta ecuación lineal en dos variables se representan de forma paramétrica de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} x &= x \\ y &= 2x+1 \end{aligned}\right\}$$

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal se denomina *conjunto solución*.

Observe que al quedar x como variable independiente, x es cualquier número real, por lo que se tendrán infinitos puntos como solución de la ecuación dada $-2x+y=1$. Si representamos todos los puntos de esta solución, serían los correspondientes a la recta que se muestra en la figura 2 sobre el plano $\mathbb{R}^2$.

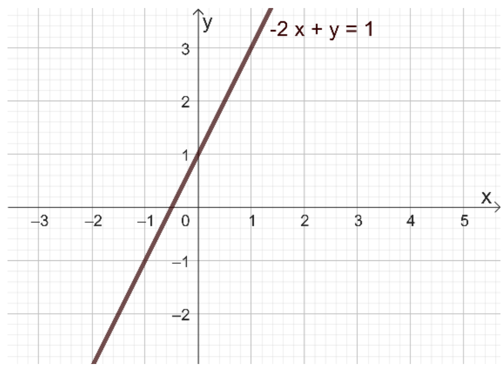

Figura 2. Representación geométrica del conjunto solución de la ecuación lineal $-2x+y=1$

Una ecuación lineal en tres variables x, y, z representa *un plano* en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, si la ecuación lineal es $x-y+z=2$, se despeja una variable en función de las otras. En este caso despejamos z, quedando $z=-x+y+2$. Así, la variable z queda dependiendo de x y de y. Todos los valores que son solución de esta ecuación lineal en tres variables se representan de forma paramétrica de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= -x+y+2 \end{aligned}\right\}$$

Observe que al quedar x e y como variables independientes, se tendrán infinitos puntos como solución de la ecuación $x-y+z=2$. Si representamos todos los puntos de esta solución, serían los correspondientes al plano que se muestra en la figura 3 sobre $\mathbb{R}^3$.

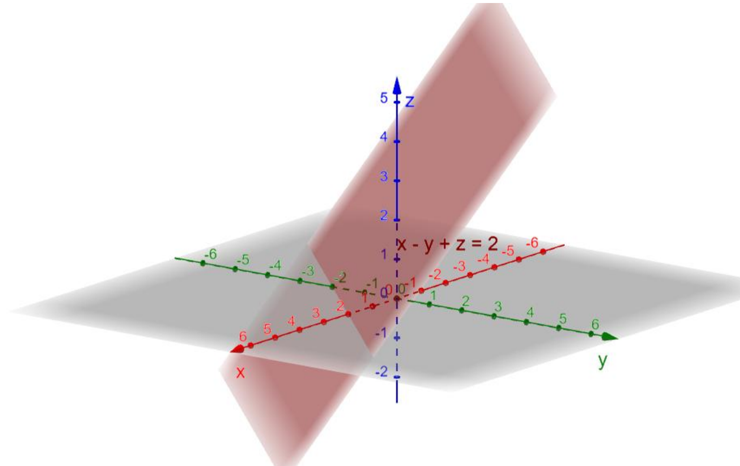

Figura 3. Representación geométrica del conjunto solución de la ecuación lineal $x-y+z=2$

Una vez trabajado el concepto de ecuación lineal, se define una colección de una o más ecuaciones lineales que involucran las mismas variables. Esta colección tiene el nombre de **sistemas de ecuaciones lineales** (Lay, D., 2007, p.3). La definición formal se tiene en figura 4.

Definición 2. *Un* sistema de m ecuaciones lineales en n variables *es un conjunto de m ecuaciones, donde cada ecuación es lineal en las mismas n variables:*

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

con a_{ij} y b_i son números reales, con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Figura 4. Definición de sistema de ecuaciones lineales. Apunte del curso (Alvarado, 2024).

Algunos ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales son:

a) $\left.\begin{array}{r} 5x+3y= \ \ 14 \\ 2x-y=10 \end{array}\right\}$ (2 ecuaciones lineales en 2 variables)

b) $x-2y+x=1\}$ (1 ecuación lineal en 3 variables)

c) $\left.\begin{array}{r} -x+4y= \ \ 2 \\ x+y+z=4 \end{array}\right\}$ (2 ecuaciones lineales en 3 variables)

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es buscar los valores de las variables involucradas que satisfagan todas las ecuaciones del sistema. Para ello, en el curso se explican algunos métodos, como por ejemplo el Método de eliminación de Gauss. También, es importante comprender que buscar la solución a un sistema de ecuaciones lineales es buscar el/los puntos donde las gráficas de las ecuaciones lineales se intersectan, por lo que un sistema de ecuaciones lineales puede:

1. No tener solución, o
2. Tener exactamente una solución, o
3. Tener una cantidad infinita de soluciones.

En este artículo se explica el concepto geométrico de los sistemas de ecuaciones lineales en 3 variables con el uso de GeoGebra, con el objetivo de que los estudiantes logren comprender qué objetos geométricos están involucrados en cada sistema de ecuaciones y qué objeto geométrico representa la solución de cada sistema.

(2) Transformaciones lineales en el plano.

A continuación, se define el concepto de transformación como función:

> Una transformación (o función o mapeo) T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una regla que asigna a cada vector x en $\mathbb{R}^n$ un vector $T(x)$ en $\mathbb{R}^m$. El conjunto $\mathbb{R}^n$ se llama **dominio** de T, y $\mathbb{R}^m$ se llama **codominio** de T. La notación $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ indica que el dominio de T es $\mathbb{R}^n$ y que el codominio de T es $\mathbb{R}^m$. Para x en $\mathbb{R}^n$, el vector $T(x)$ en $\mathbb{R}^m$ se denomina **imagen de $\boldsymbol{x}$** (bajo la acción de T). El conjunto de todas las imágenes $T(x)$ es llamado **rango de $\boldsymbol{T}$**. (Lay, D., 2007, p.73)

Siguiendo la misma línea del autor Lay, D. (2007), diremos que una transformación T es **lineal** si:

1) $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$, para toda $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ en el dominio de T.
2) $T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u})$ para toda $\boldsymbol{u}$ y todos los escalares c.

En el siguiente Teorema (figura 5), se indica que toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es en realidad una *transformación matricial* $x \to Ax$.

Teorema 1. *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces existe una única matriz A tal que*

$$T(x) = Ax \text{ para toda } x \text{ en } \mathbb{R}^n$$

Figura 5. Teorema: Matriz representante A de una transformación lineal. Apunte del curso (Alvarado, 2024).

En general, en un curso de Algebra Lineal, se inicia estudiando transformaciones lineales en el plano, es decir, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde $T(x) = Ax$, con A una matriz de 2×2. Geométricamente T transforma un vector x en $\mathbb{R}^2$, en otro vector $T(x) = Ax$ en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, se define $T(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x$, vemos algunas transformaciones de vectores en $\mathbb{R}^2$:

1) $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

2) $T\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

3) $T\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para introducir el concepto de transformaciones lineales con GeoGebra, se sugiere revisar las tareas propuestas por Turgut (2017) cuyo objetivo matemático de la propuesta es formular las reglas de una transformación lineal: $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ y $T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u})$, y demostrar tales resultados en términos de representaciones matriciales sobre el plano cartesiano.

Complementando las ideas de Turgut (2017), en este artículo se propone comprender geométricamente qué ocurre con los vectores x en $\mathbb{R}^2$ cuando se aplica una transformación matricial $T(x) = Ax$, donde $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y A es una matriz de 2×2.

3. Metodología

A continuación, se describe la aplicación de las clases preparadas previamente, para comprender los conceptos de (1) Sistemas de ecuaciones lineales en tres variables y (2) Transformaciones lineales en el plano cartesiano: su descripción geométrica (contracción, expansión, rotación).

3.1. Sistemas de ecuaciones lineales en tres variables

Primero, se enseña el concepto matemático y geométrico de ecuación lineal, identificando el número de variables de una ecuación lineal y representar su solución en representación paramétrica. Luego, se define un sistema de ecuaciones lineales en dos, tres, y n variables. Se recuerda las distintas soluciones y métodos aprendidos en etapa escolar, respecto a sistemas de ecuaciones en dos variables, para extender la idea a sistemas de ecuaciones lineales en tres variables. Se enseña el Método de Gauss para resolver sistemas lineales y las soluciones se escriben en forma paramétrica, identificando qué representa geométricamente la solución, cuando existe.

Se recomienda primero analizar los tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones en dos variables, con el análisis de intersección de rectas en el plano $\mathbb{R}^2$ y luego explicar los tipos de soluciones en sistemas de ecuaciones en tres variables. Para este último caso usaremos GeoGebra incluyendo tres vistas: Vista Algebraica, Cálculo Simbólico (CAS) y Vista Gráfica 3D, como se muestra en Figura 6.

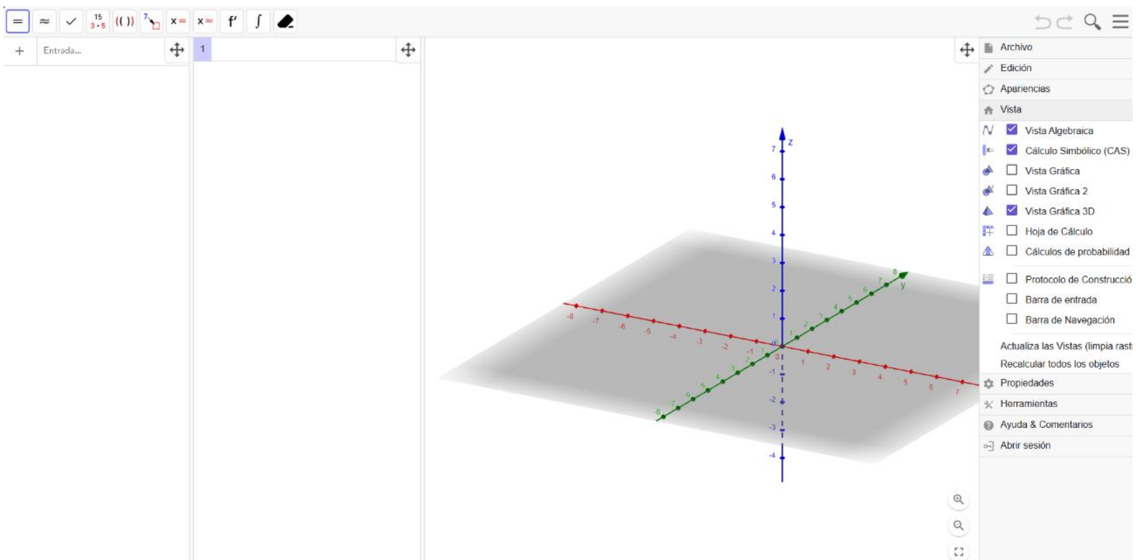

Figura 6. Vistas a utilizar de GeoGebra.

Luego, escribir las ecuaciones del sistema a trabajar. Como primer ejemplo de ejercicio, resolveremos el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= \ \ 9 \\ -x + 3y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Ejemplo 1. Sistema de 2 ecuaciones lineales en 3 variables a resolver con GeoGebra.

Se escriben las ecuaciones del sistema lineal en Cálculo Simbólico (CAS), considerando que la segunda ecuación tiene las mismas 3 variables que la primera ecuación, solo que el coeficiente en z es cero (ver figura 7)

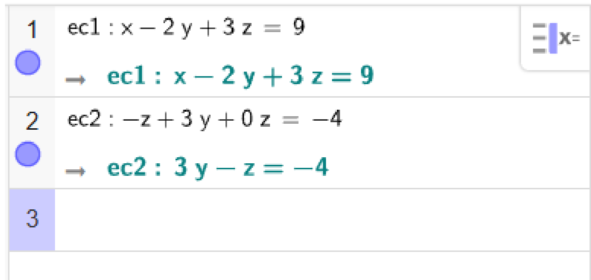

Figura 7. Escribir ambas ecuaciones del sistema lineal en CAS.

A una de las ecuaciones le cambiamos el color (para diferenciar los planos) y seleccionamos ambas para que se observe la gráfica de ambas en la vista Gráfica 3D (ver figura 8).

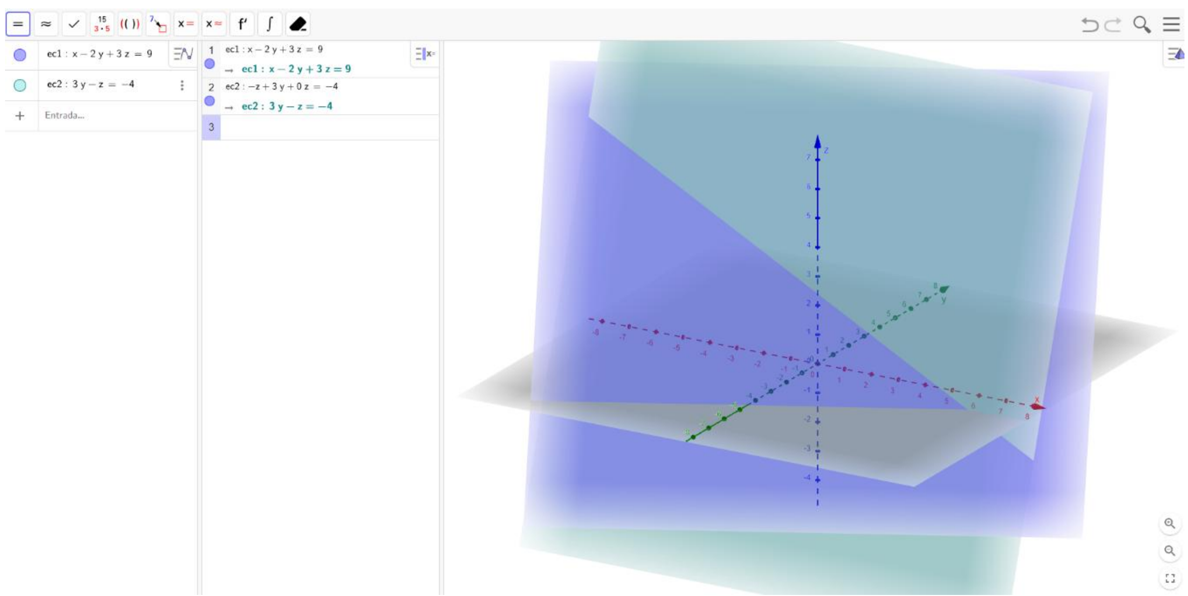

Figura 8. Representación geométrica de ecuaciones lineales en 3 variables.

Antes de visualizar explícitamente la solución del sistema se sugiere analizar junto con los estudiantes las siguientes preguntas: ¿Las ecuaciones (planos) se intersectan?, ¿Qué representa la intersección de las ecuaciones?, ¿Cómo definirías la solución del sistema lineal dado?

Finalmente, para buscar la solución del sistema del ejemplo 1, se seleccionan ambas ecuaciones desde CAS y se selecciona ‘’Resolver’’ (ver figura 9).

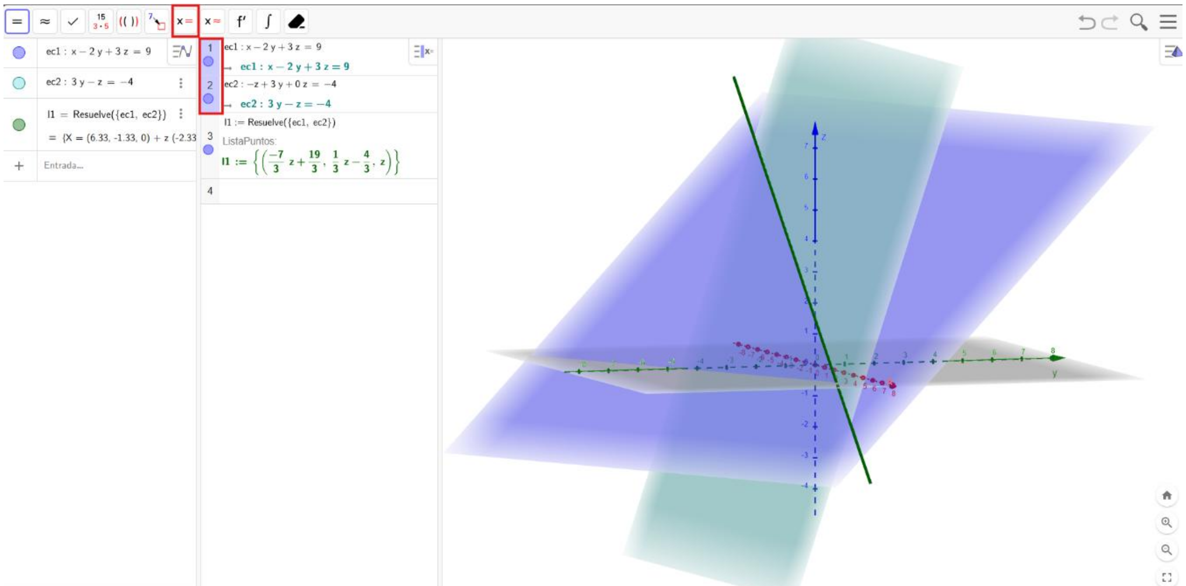

Figura 9. Resolver el sistema de ecuaciones de ejemplo 1 en CAS GeoGebra.

Con ello, se observa que ambas ecuaciones del sistema $\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=9 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\}$ se intersectan en una recta en $\mathbb{R}^3$., cuya representación es dada en Figura 10:

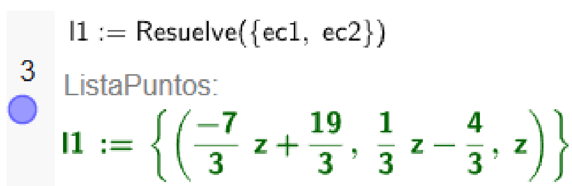

Figura 10. Solución del ejemplo 1 en CAS GeoGebra.

Se observa en la figura 10 que la solución del sistema está escrita de forma paramétrica, donde z es la variable independiente.

De la misma forma, se resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+5z=17 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 2. Sistema de 3 ecuaciones lineales en 3 variables a resolver con GeoGebra.

Antes de resolver el sistema con GeoGebra se invita a visualizar cuál sería la solución del sistema solo analizando las gráficas de las ecuaciones (ver figura 11).

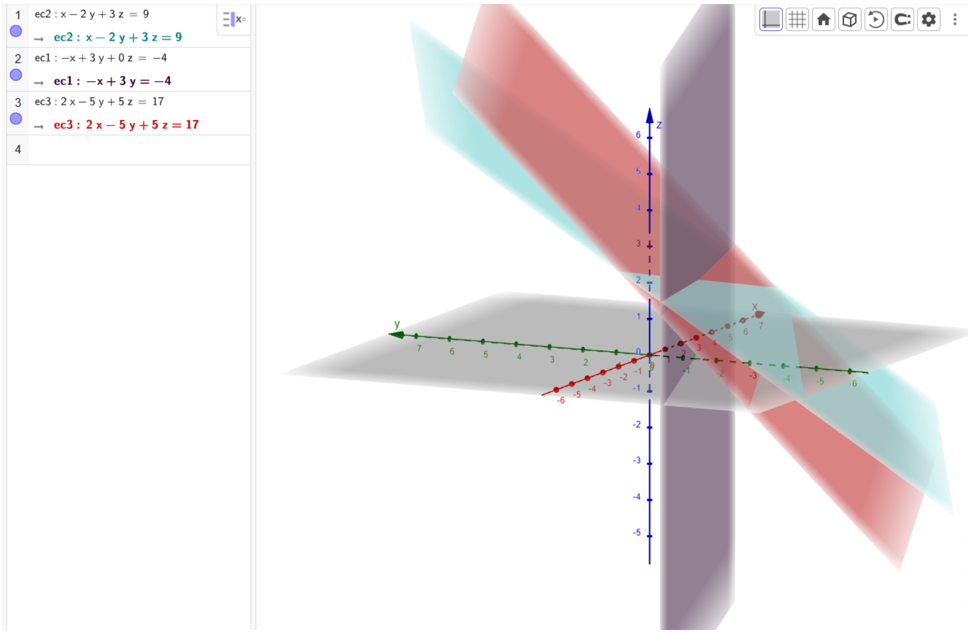

Figura 11. Planos del sistema de ecuaciones de ejemplo 2.

Se sugiere volver a analizar las mismas preguntas para el ejemplo 2: ¿Las ecuaciones (planos) se intersectan?, ¿Qué representa la intersección de las ecuaciones?, ¿Cómo definirías la solución del sistema lineal dado?

Posteriormente realizar la intersección de los 3 planos en GeoGebra (Sistema01 - GeoGebra) obteniendo que la intersección en este caso es el punto $(1, -1, 2)$, ver figura 12.

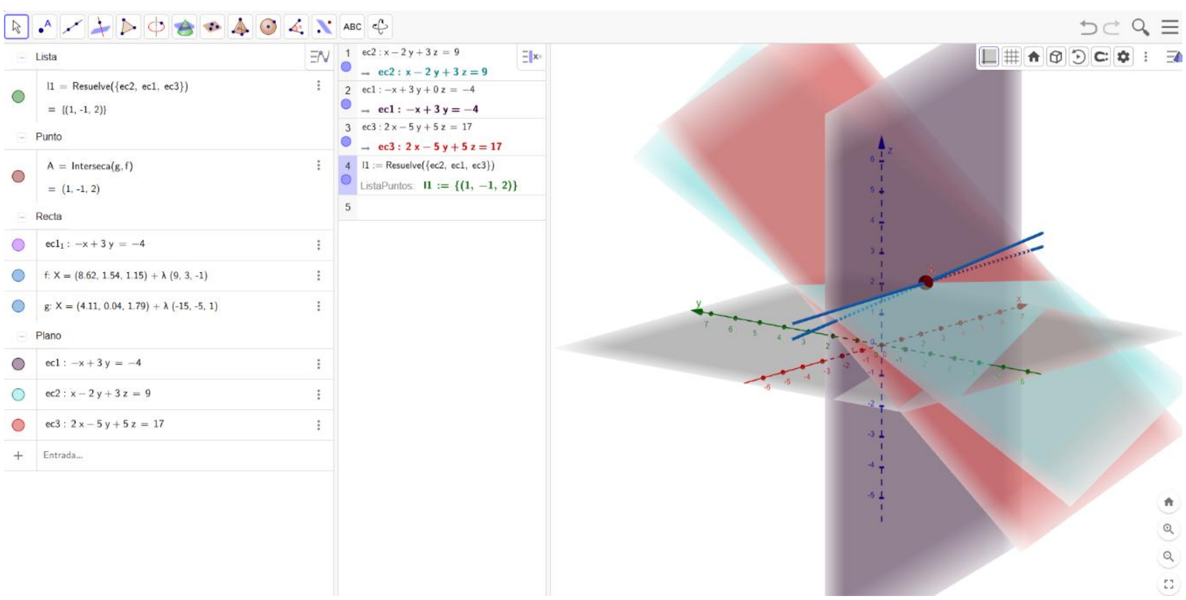

Figura 12. Intersección de planos del sistema de ecuaciones de ejemplo 2.

Se dejan propuestos al lector los ejemplos 3 y 4, con sus respectivos enlaces de visualización GeoGebra:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+z=1 \\ 2x-y-2z=2 \\ x+2y-3z=-1 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 3. Sistema de 3 ecuaciones lineales en 3 variables a resolver con GeoGebra (Sistema02-nuevo - GeoGebra).

$$\left.\begin{array}{r} y-z=0 \\ x-3z=-1 \\ -x+3y=1 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 4. Sistema de 3 ecuaciones lineales en 3 variables a resolver con GeoGebra (Sistema03-nuevo - GeoGebra).

3.2. Transformaciones lineales en el plano cartesiano

Dado cualquier vector x en $\mathbb{R}^2$ se busca analizar su imagen bajo la transformación $T(x)=Ax$. Para ello, primero aplicamos la transformación a un solo vector en $\mathbb{R}^2$, luego analizamos cómo esta matriz transforma a todos los vectores del plano $\mathbb{R}^2$ geométricamente, en términos de expandir, contraer, rotar, reflejar el plano. Para ello, se propone utilizar matrices puntuales que ayuden a comprender estos conceptos geométricos.

Para describir transformaciones del plano, se propone a los estudiantes resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio: Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, tal que para todo x en $\mathbb{R}^2$, la transformación lineal T está definida por:

$$T(x)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Utilizando esta transformación lineal, responder:

a) ¿Dónde manda la transformación a los vectores $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

b) ¿Cuál es la descripción geométrica de la transformación aplicada al plano $\mathbb{R}^2$?

Ejemplo 5. Apunte del curso (Alvarado, 2024)

Se resuelve la pregunta a) del ejemplo 5 con el uso de GeoGebra y comando ‘’AplicaMatriz()’’. Primero, se trabaja con Vista Algebraica y Vista Gráfica, como se muestra en figura 13:

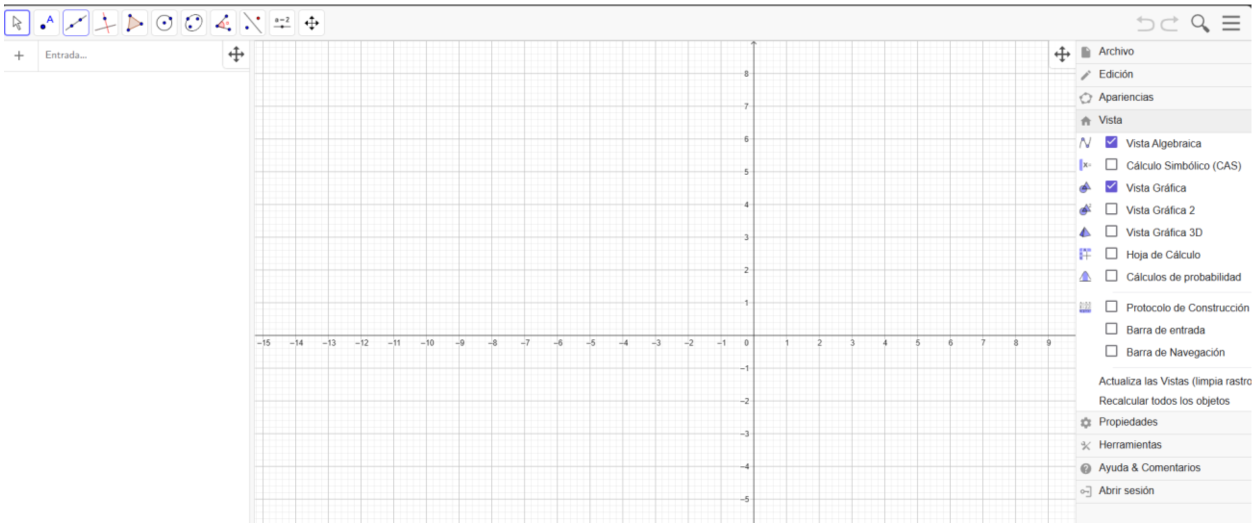

Figura 13. Vistas a utilizar de GeoGebra.

Luego en Vista Algebraica se define la matriz a trabajar (ver figura 14).

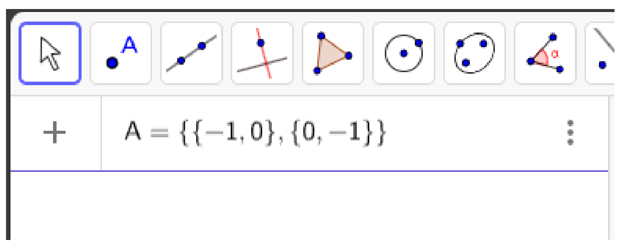

Figura 14. Escribir matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en GeoGebra.

Luego, se grafican los vectores $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con ayuda del comando ‘’Vector(Punto)’’ (ver figura 15).

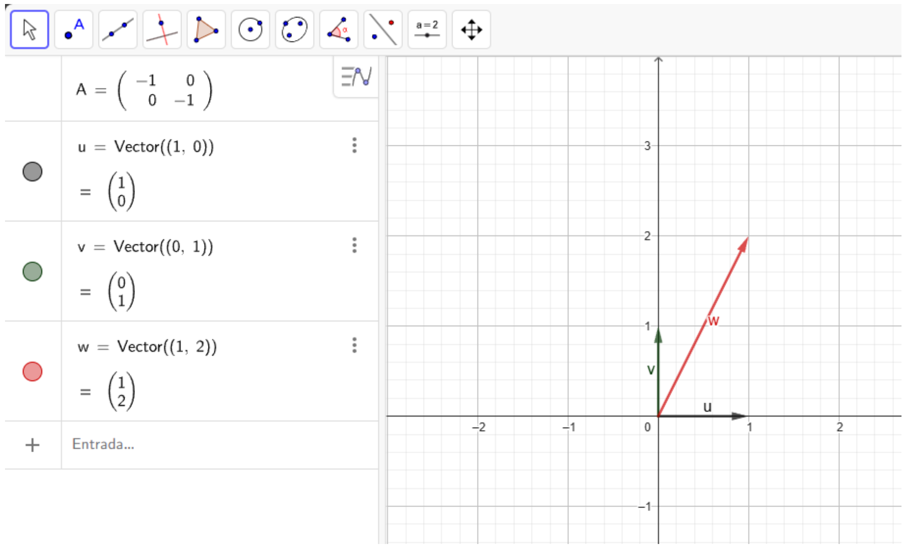

Figura 15. Vectores $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en GeoGebra.

Finalmente, aplicamos la matriz a los vectores con el comando ''AplicaMatriz(Matriz, Objeto)'' (ver figura 16) obteniendo los vectores $u' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $w' = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

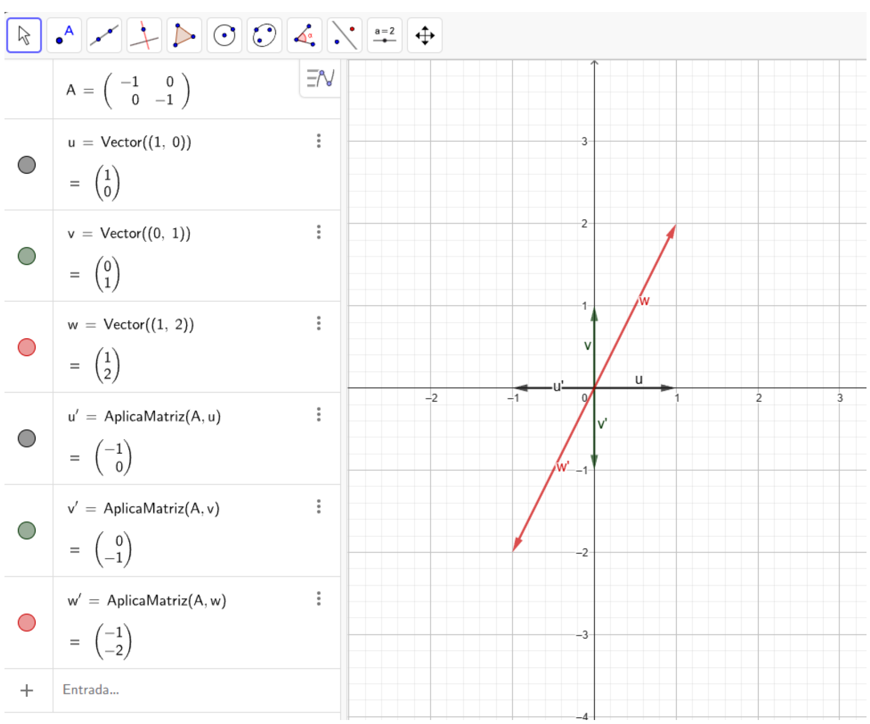

Figura 16. Aplicar matriz a vectores en GeoGebra.

Antes de continuar, se sugiere al docente preguntar: ¿cómo se describe la transformación aplicada a los vectores u, v, w?

Luego, para responder a la pregunta b) del ejemplo 5: ¿Cuál es la *descripción geométrica* de la transformación aplicada al plano $\mathbb{R}^2$? Se sugiere utilizar el GeoGebra Transformacion-plano - GeoGebra. Cambiando la matriz por la indicada en este primer ejemplo y seleccionar la casilla ''Triángulo'' para visualizar cómo la matriz transforma un objeto sobre el plano $\mathbb{R}^2$ (ver figura 17).

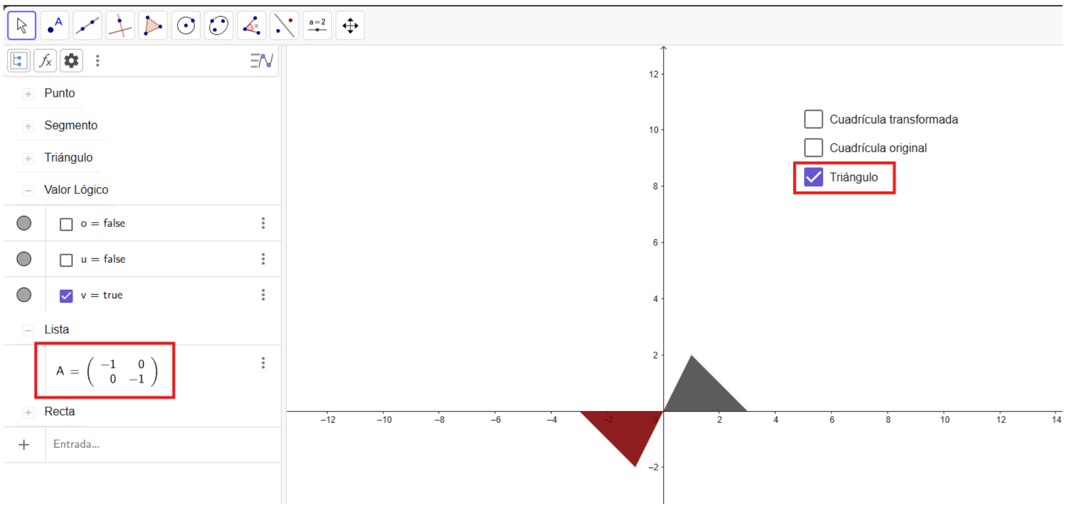

Figura 17. Aplicar matriz a un objeto sobre el plano en GeoGebra.

Se espera que el docente guíe a los estudiantes a la descripción de esta transformación, la cual es: Si la matriz representante de la transformación es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, su descripción sería una reflexión respecto al origen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o también, una rotación en el plano en 180°.

A continuación, se propone utilizar el mismo GeoGebra: Transformacion-plano - GeoGebra para analizar la transformación del plano para las siguientes matrices:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Para analizar las transformaciones del plano propuestas, se sugiere utilizar el GeoGebra con los siguientes pasos, los cuales se mostrarán aplicando la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ como ejemplo. Los demás resultados se dejan para el lector.

1) Escribir la matriz a analizar en Vista Algebraica, editando la matriz A (figura 18).

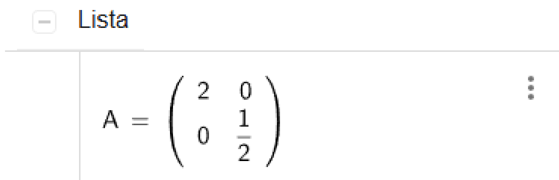

Figura 18. Editar matriz a aplicar en GeoGebra.

2) Mostrar “Cuadrícula original” (figura 19), la cual representaría la cuadrícula del plano cartesiano formada por las combinaciones lineales de los vectores canónicos (1,0) y (0,1).

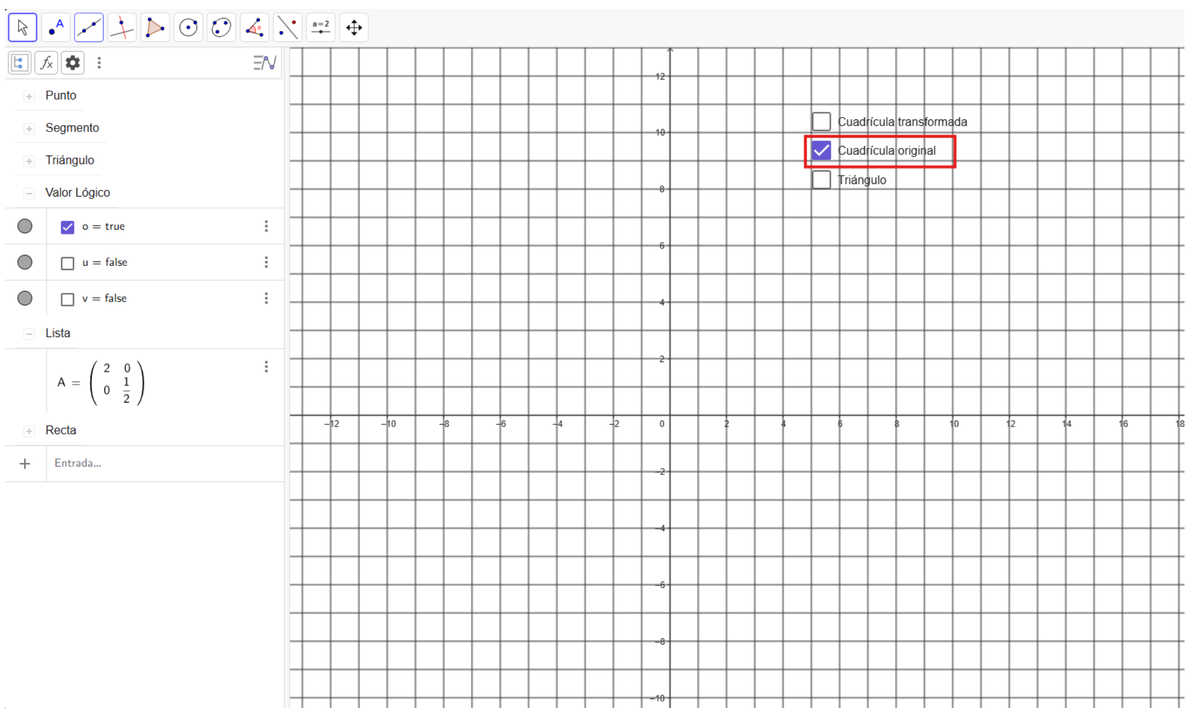

Figura 19. Mostrar cuadrícula original.

3) Mostrar la “Cuadrícula transformada” (figura 20), la cual representaría el **resultado de aplicar la matriz** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ **a la cuadrícula original**.

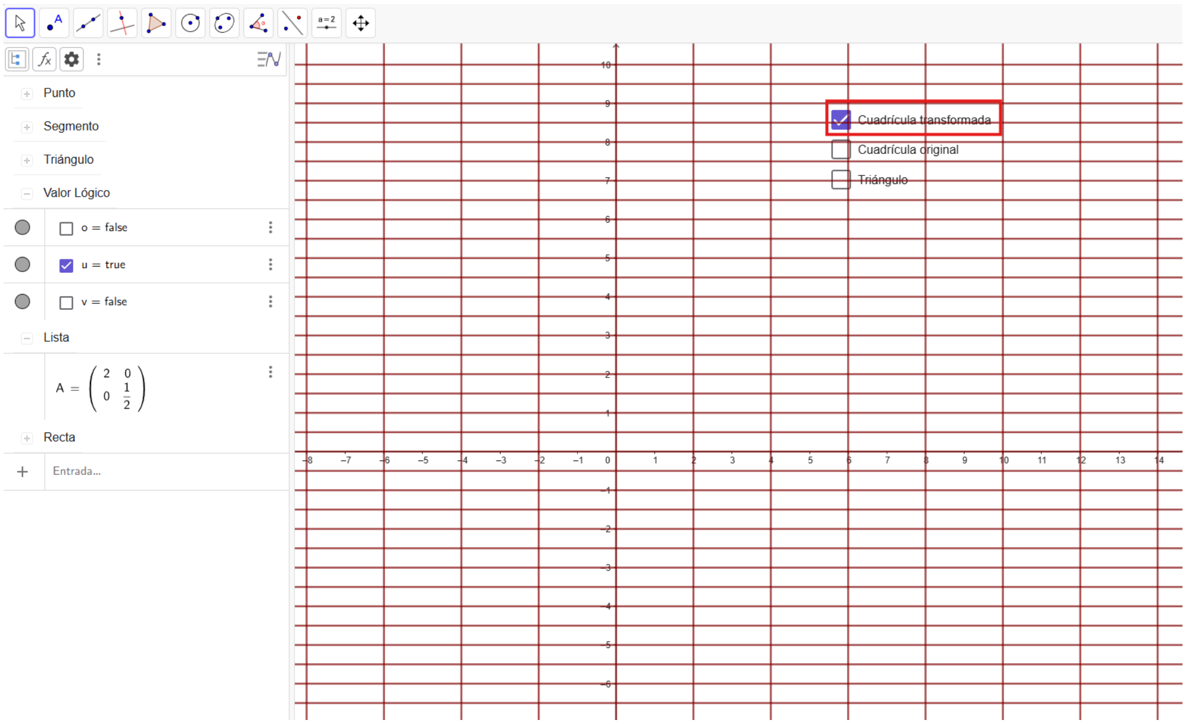

Figura 20. Mostrar cuadrícula transformada.

4) Mostrar el “Triángulo” (figura 21), tal que el triángulo plomo representa el original y el triángulo rojo representa el transformado por la matriz A.

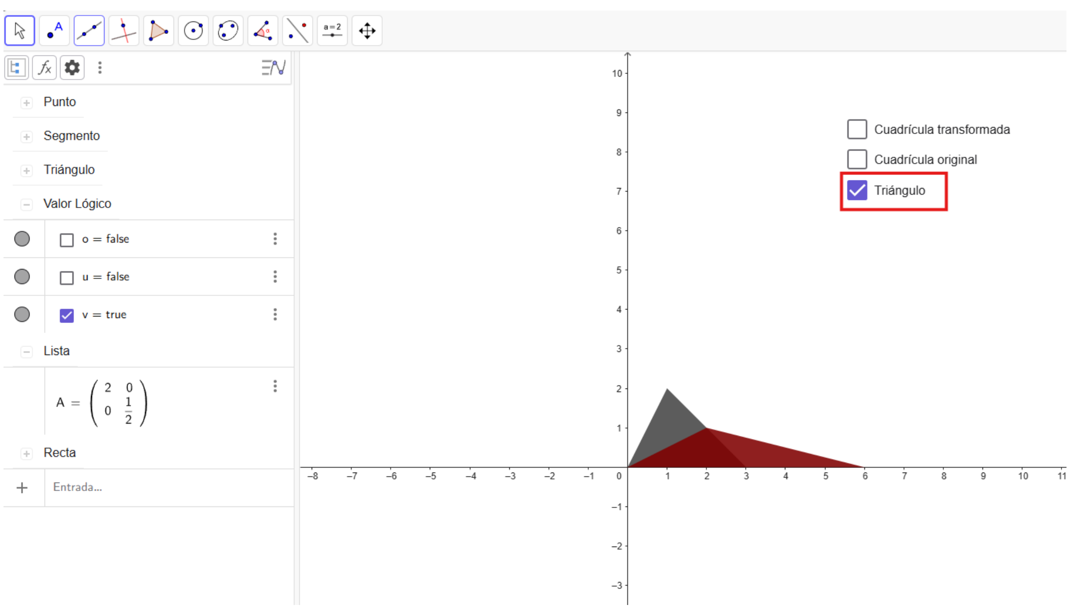

Figura 21. Mostrar Triángulo.

5) Describir cada transformación, utilizando conceptos de expansión, contracción, reflexión, etc.

   En este ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, se observa que esta transformación expande al doble en el eje x y contrae a la mitad en el eje y.

Finalmente, para analizar geométricamente las matrices de rotación, se propone utilizar el siguiente GeoGebra: [Transformacion-plano-Rotacion - GeoGebra](). Al mover directamente el deslizador cambiando el ángulo de rotación, se observa la matriz de rotación según este ángulo y también la representación geométrica sobre la ''Cuadrícula original'' y el ''Triángulo'' (ver figura 22).

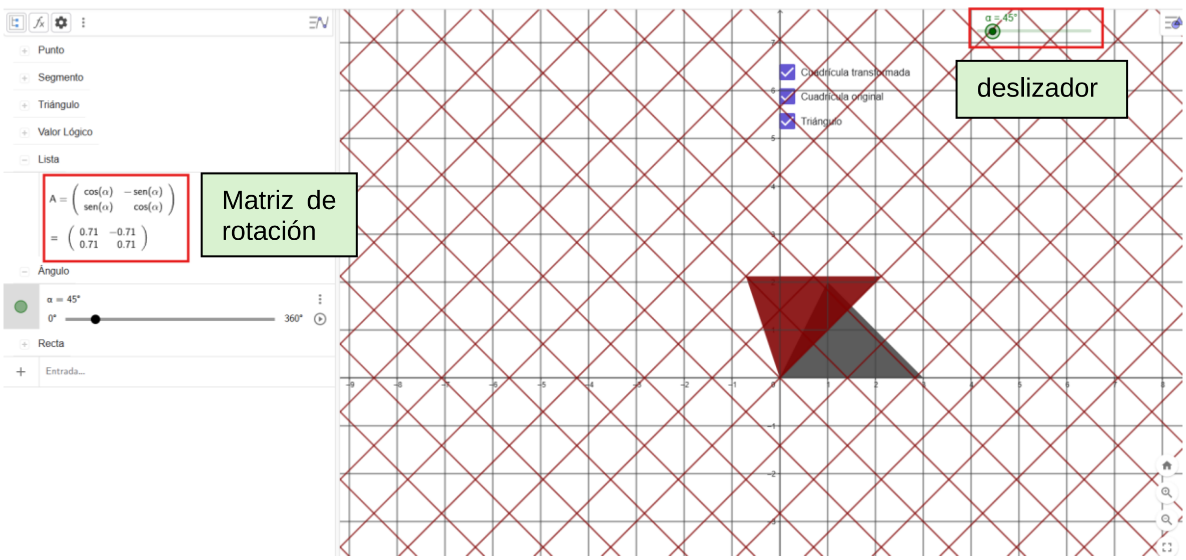

Figura 22. Matriz de rotación sobre el plano.

4. Conclusión

Las actividades propuestas en este artículo buscan complementar las clases tradicionales de álgebra lineal mediante el uso de GeoGebra como herramienta de visualización interactiva para dos temas específicos: (1) sistemas de ecuaciones lineales en tres variables y (2) transformaciones lineales en el plano cartesiano.

Tradicionalmente, se estudia la resolución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando métodos algebraicos como eliminación de Gauss, pero con las actividades propuestas aquí se espera que el estudiante comprenda qué objetos geométricos se están intersectando al resolver un sistema lineal, y qué objeto geométrico representa la solución del sistema lineal.

La exploración de transformaciones lineales en el plano cartesiano con GeoGebra permite que los estudiantes visualicen de manera directa cómo las matrices actúan como operadores geométricos, transformando el espacio a través de operaciones de expansión, contracción, rotación y reflexión. Esta aproximación visual facilita la comprensión de conceptos que tradicionalmente resultan abstractos cuando se abordan solamente desde el álgebra.

Al igual que propone Turgut (2017, 2019), la capacidad de conectar las representaciones algebraica, numérica y geométrica constituye un aspecto fundamental para el desarrollo de una comprensión profunda de los conceptos del álgebra lineal. GeoGebra facilita esta integración al permitir la visualización simultánea y la manipulación interactiva de diferentes representaciones.

Bibliografía

Alvarado, A. (2024) Apuntes del curso Algebra Lineal. Este apunte se basa en el libro de Lay, D. (2007).

Lay, D. C. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* Pearson Educación.

Turgut, M. (2017). *Students' reasoning on linear transformations in a DGS: A semiotic perspective. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), Proceedings of the 10th congress of European society for research in mathematics education* (pp.2652–2659). Dublin: Institute of Education, Dublin City University, Ireland, and ERME.

Turgut, M. (2019). *Sense-making regarding matrix representation of geometric transformations in $\mathbb{R}^2$: a semiotic mediation perspective in a dynamic geometry environment*. *ZDM*, *51*, 1199-1214. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01032-0

Alvarado Silva, Adoree. Docente y Coordinadora académica de Universidad Andrés Bello. Chile.