

El alquiler de una bicicleta y la representación gráfica de una función de valores enteros

Uldarico Malaspina

Resumen	El problema que es motivo de reflexiones en este artículo, proviene de una situación real de alquiler de bicicletas, observada en un parque, y del pedido que se hace, en un taller con profesores de secundaria, de crear un problema a partir de tal situación. No se ponen datos específicos al describir la situación, como una invitación a hacerlo y a encaminarse a crear y resolver problemas de modelización matemática. Se destaca lo importante que es, didáctica y matemáticamente, obtener la representación gráfica de una función a partir de su regla de correspondencia. <i>Palabras clave:</i> gráfico de una función de valores enteros; modelización matemática; creación y resolución de problemas; educación secundaria.
Abstract	The problem discussed in this article originates from a real bicycle rental situation observed in a park, and from the request made, in a workshop with secondary school teachers, to pose a problem from such a situation. No specific data are given when describing the situation, as an invitation to do so and to move towards posing and solving mathematical modeling problems. Emphasis is placed on the didactic and mathematical importance of obtaining a function's graphical representation based on its correspondence rule. Keywords: graph of an integer-valued function; mathematical modeling; problem posing and problem solving; secondary education.
Resumo	O problema que constitui objeto de reflexão neste artigo tem origem numa situação real de aluguer de bicicletas, observada num parque, e num pedido feito durante um workshop com professores do ensino secundário para que criassem um problema baseado nessa situação. Não são fornecidos dados específicos na descrição da situação, como um convite a fazê-lo e a avançar para a criação e resolução de problemas de modelação matemática. Destaca-se a importância didática e matemática de obter a representação gráfica de uma função a partir da sua regra de correspondência. <i>Palavras-chave:</i> gráfico de uma função de valores inteiros; modelação matemática; criação e resolução de problemas; ensino secundário.

Problema

En el parque “Los Héroes”, de Ventanilla, se alquila bicicletas para pasear. Se debe pagar 3 soles, como monto fijo por el derecho a alquilar, más 5 soles por cada hora o fracción de hora que se use la bicicleta. Si Julián alquila una bicicleta y la devuelve después de x horas, ¿cuánto debe pagar?

El problema es una versión refinada, grupalmente, del problema que formuló un grupo de profesores de secundaria en un taller sobre creación de problemas. La primera tarea fue crear un problema a partir de una situación dada, como se muestra en la Figura 1, que es parte de la ficha de trabajo colaborativo que se distribuyó.

Situación

En un parque se alquila bicicletas para pasear. Se paga una cantidad fija por el alquiler, más una cantidad por cada hora o fracción de hora de uso de la bicicleta.

TRABAJO COLABORATIVO

1. Partiendo de la situación descrita, crear un problema de matemáticas que lo propondrían a sus estudiantes. Especificar el grado.

Escribir el enunciado del problema creado. Especificar el grado de secundaria 1º Secundario

En el parque de Ventanilla “Los Héroes” se alquila bicicletas para pasear. Se paga 3 como alquiler fijo, más 5 cada hora de uso de la bicicleta o fracción de hora. ¿Cuánto pagaría Julián por 3 horas de alquiler? Encuentre su expresión matemática de la situación.

Figura 1. Problema creado por un grupo de profesores, en la ficha trabajada.

Cabe mencionar que los profesores participantes no habían recibido información sobre estrategias ni fases en los procesos de creación de problemas de matemáticas. La idea era hacer vivir directamente a los profesores la experiencia de crear problemas partiendo de una situación real y que es posible hacerlo con decisión, creatividad y mediante el intercambio de ideas entre colegas comprometidos con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Notar que al describir la situación no se dan datos específicos. Esto es intencional, en el marco del estímulo a la creación de problemas de modelización matemática, que básicamente son interrogantes de la vida real, provenientes del ámbito extra-matemático (Borromeo, 2018), en los cuales no se da explícitamente toda la información, sino que hay que crearla con criterios realistas y – si es necesario – haciendo algunos supuestos adecuados. En la ficha de trabajo se pidió también a los participantes resolver el problema creado y eso mostramos en la Figura 2:

2. Resolver el problema creado

Escribir una solución del problema creado.

tiempo (h)	Pago S/.
0	$3 + 0 = 3$
1	$3 + 5(1) = 8$
2	$3 + 5(2) = 13$
3	$3 + 5(3) = 18$
⋮	
n	$3 + 5(n) = 3 + 5n$

Rpta: Por 3 horas Julián paga S/ 18

La expresión matemática es $3 + 5n$

Figura 2. Una propuesta de solución del problema creado

La solución es correcta, pues, considerando las 3 horas de alquiler de la bicicleta se concluye que se pagará 18 soles; y la expresión matemática corresponde a un número entero n de horas de alquiler, como se percibe que han obtenido, a partir de la tabla que muestran en la Figura 2. Sin embargo, en la solución no se está teniendo en cuenta que el número de horas de alquiler de la bicicleta no necesariamente es un número entero y en ese caso interviene la información dada en la situación y recogida en el problema: el pago, además del pago fijo, es “por hora o fracción de hora”, lo cual debe tomarse muy en cuenta, en caso que el número de horas de alquiler no sea un número entero.

Para resolver el problema

En el caso concreto del problema creado por los profesores, se paga, además de los 3 soles por el derecho de alquiler, 5 soles por hora o fracción. Así, si el alquiler es por media hora, se paga $(3 + 5)$ soles, o sea 8 soles, pues la fracción de hora cuenta como si fuera una hora. También se pagaría $(3 + 5)$ soles, si el alquiler fuera por 20 minutos o por 50 minutos. Análogamente, si el alquiler fuera por 1 hora y 10 minutos, se pagaría $(3 + 2 \times 5)$ soles, o sea 13 soles, pues los 10 minutos (esa fracción de hora) se cuenta como si fuera una hora y en consecuencia se debe pagar por 2 horas de alquiler. Esto vale hasta 1 hora con 60 minutos y en ese instante hay un salto para considerar una hora más por cualquier tiempo adicional a 1 hora, menor o igual que 60 minutos. Esto se puede ver mejor en un gráfico, considerando horas en el eje de abscisas y soles en el eje de ordenadas, como se muestra en la Figura 3, hasta por 4 horas de alquiler.

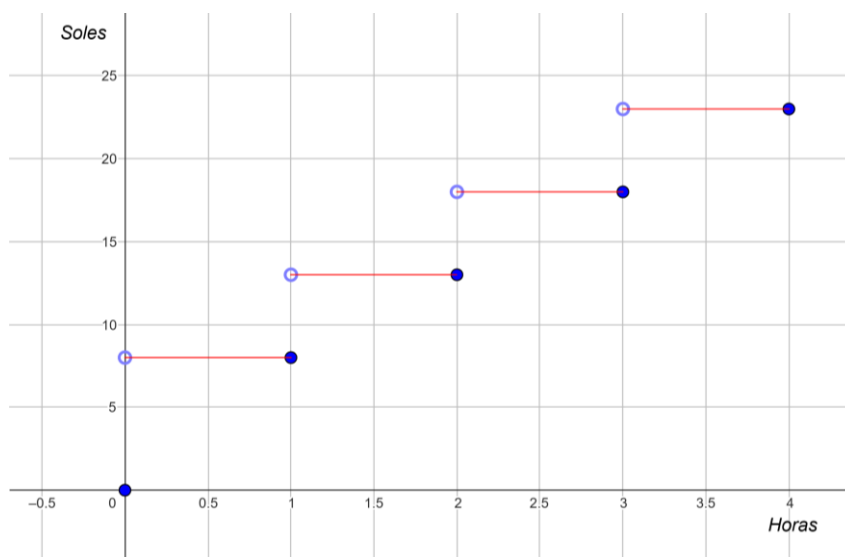


Figura 3. Representación gráfica del pago por x horas de alquiler de una bicicleta, para $0 \leq x \leq 4$.

El gráfico es de una función escalonada, con valores enteros, que nos recuerda a una función conocida como la “función mayor entero”, pero no se trata de esta función, sino de la presencia de otra, llamada “función techo”. El gráfico mostrado en la Figura 3 es el que corresponde a la función

$$f(x) = 3 + 5 \text{ techo}(x), \text{ para } 0 \leq x \leq 4.$$

En el apéndice de este artículo se da mayores detalles sobre la función techo.

Comentarios y reflexiones

La experiencia desarrollada muestra que, ante la situación descrita, se puede crear un problema asignando datos pertinentes; sin embargo, la solución del problema específico va más allá de una mirada “simplificadora”, al considerar solo casos de números enteros, lo cual no necesariamente ocurriría en la realidad, pues el alquiler de una bicicleta podría ser por menos de una hora, por una hora y 35 minutos, etc.

Lo interesante es que el pago correspondiente a x horas de alquiler de una bicicleta se puede representar muy bien haciendo un gráfico (Figura 3), sin que necesariamente se conozca la expresión formal de la función y esto es algo que ocurre con muchas situaciones de la realidad. Ya lo habíamos visto en un artículo anterior, al crear un problema e iniciarse en la modelización matemática, a partir del goteo de agua por un grifo averiado (Malaspina, 2022). Paradójicamente, en los estudios formales, suele darse demasiada importancia a las expresiones algebraicas de las funciones y hacer los gráficos a partir de tales expresiones algebraicas, lo cual – en muchos casos – hace perder la riqueza del pensamiento funcional (Frey et al., 2022), en el cual el énfasis debe estar en la relación entre la variable independiente y la variable dependiente. Estudiar funciones desde la educación básica es sumamente importante, pero sin reducir ese estudio a aspectos

algebraicos. Obtener la representación gráfica de una función a partir de una situación real, es muy importante didáctica y matemáticamente y es tener un primer nivel de modelización matemática y un recurso con el cual se pueden hacer transiciones de ida y vuelta entre la realidad y las matemáticas (Borromeo, 2018), observando, explorando, imaginando, conjeturando y encontrando patrones.

En relación con la situación descrita y el problema propuesto, tener una representación gráfica de la “función pago” por el alquiler de una bicicleta, según las condiciones establecidas (Figura 3), es tener un modelo gráfico de la situación, que permite visualizar los pagos que se pueden hacer en la realidad, según los datos que se asignan y puede ser un punto de partida para hacerse nuevas preguntas ante la situación descrita, para crear nuevos problemas (Malaspina, 2018) y para hacer diversos análisis, cambiando los datos y viendo sus consecuencias en los gráficos correspondientes. Podría pensarse en una representación general de la situación, considerando el pago por x horas de alquiler si se considera un pago fijo inicial de p soles y un pago de q soles por hora o fracción de hora por el uso de la bicicleta, lo cual daría una idea más cercana a un “modelo matemático”. Tal representación puede hacerse gráficamente y también algebraicamente, usando la función techo.

Con estas reflexiones concluyo *El Rincón de Problemas* de este número de *UNIÓN* y, como en los números anteriores, invito a los lectores a participar en *El Rincón Intercreativo*, de este número.

A continuación, dejo algunas preguntas que podrían ser usadas para escribirme algo que se publicaría en *El Rincón Intercreativo* del próximo número:

- i) ¿Qué aprendizaje considera usted que más se refuerza, al resolver el problema de este artículo?
- ii) ¿Qué problema(s) crearía usted para que, al resolverlo(s), sus estudiantes puedan comprender mejor y resolver el problema de este artículo?
- iii) ¿Qué relación encuentra entre la función $g(n) = 3 + 5n$ dada en la Figura 2 y la función cuyo gráfico se muestra en la Figura 3?
- iv) ¿Cómo se modificará el gráfico mostrado en la Figura 3 si se cambian los precios para el alquiler de una bicicleta?
- v) ¿Qué experiencia interesante con estudiantes podría contarnos, relacionada con la resolución o la creación de un problema en el que se use el gráfico de una función, sin conocer su representación algebraica?

Agradezco los comentarios y propuestas que me hicieron llegar, relacionados con el problema del número anterior de *UNIÓN* y los invito a leerlos en este número. También reitero mi exhortación amigable a que me hagan llegar sus comentarios,

propuestas o experiencias, a partir de reflexiones de carácter didáctico o matemático, motivados por la resolución del problema de este artículo. Nos dará mucho gusto publicar y comentar lo que me escriban, en el próximo número de *UNIÓN*, como lo estoy haciendo en este número, con lo que me han enviado. Algunas pistas para crear problemas, pueden encontrarlas en diversos artículos, que últimamente se están publicando más intensivamente (en inglés son artículos sobre “problem posing”); en particular, en Malaspina (2018).

Bibliografía

- Borromeo, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer International Publishing.
- Frey, K., Sproesser, U., Veldhuis, M. (2022). What is functional thinking? Theoretical considerations and first results of an international interview study. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, hal-03744607.
- Malaspina U. (2018). ¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 14(52).
<https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/362>
- Malaspina, U. (2022). Estimulando la modelización matemática mediante la creación de problemas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18(64). <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/661>

Apéndice

La función techo

El dominio de la función techo es todo $\mathbf{R}$ (los números reales); su rango es $\mathbf{Z}$ (los números enteros) y su ley de correspondencia es la siguiente: *a cada número real x le hace corresponder el menor número entero mayor o igual que x* . Usando notación funcional, la imagen del número real x según la función techo es el número entero $f(x) = \text{techo}(x) = \text{el menor número entero mayor o igual que } x$. También suele usarse unos corchetes cuyos tramos horizontales son solo en la parte superior:

$$f(x) = \text{techo}(x) = [x]$$

Veamos algunos casos:

$$\text{techo}(0,2) = 1; \quad \text{techo}(0,8) = 1; \quad \text{techo}(1,8) = 2 \quad \text{techo}(5,4) = 6$$

Podemos advertir que la función techo de un número entero siempre será ese mismo número entero.

Hay que tener cuidado con la imagen de un número negativo no entero, según la función techo; así,

$$\text{techo}(-0,2) = 0; \quad \text{techo}(-0,8) = 0; \quad \text{techo}(-1,7) = -1$$

Un gráfico de la función techo, considerando como dominio el intervalo $] -3; 2]$ es el que se muestra en la siguiente figura:

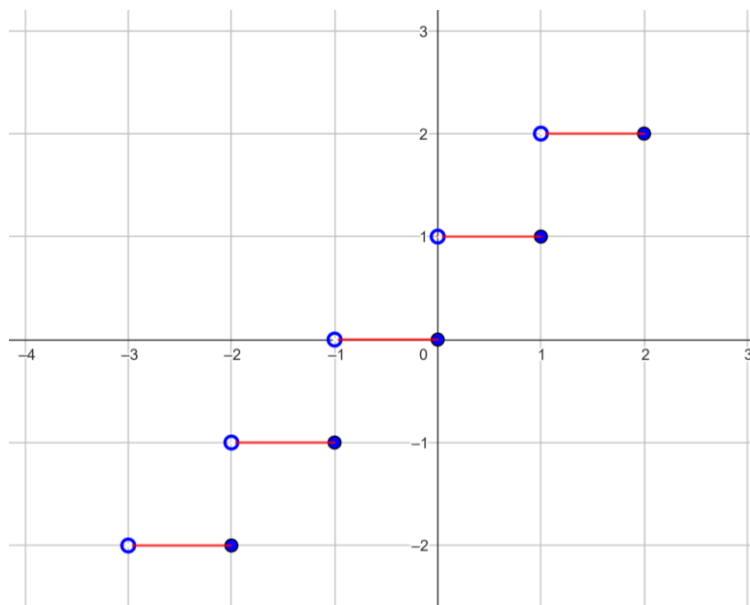


Gráfico de la función $f(x) = \text{techo}(x)$, para $-3 < x \leq 2$.