ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 60. Diciembre 2020
Páginas 196-211

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Significado Global de la Integral Articulando su Complejidad Epistémica

Enrique Mateus-Nieves, Wilfaver Hernández Montañez

Fecha de recepción: 27/06/2020
Fecha de aceptación: 30/11/2020

Resumen	Presentamos resultados de investigación sobre el significado global para el objeto matemático integral que se construye con estudiantes universitarios, que toman la asignatura Calculo integral, articulando los significados que la conforman. Teóricamente se usó el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, desde un estudio de caso a tres profesores que enseñan Cálculo Integral a estos estudiantes. Se resalta la importancia de lograr una articulación de sentidos desde la reconstrucción y análisis de tres configuraciones epistémicas globales propuestas en Mateus-Nieves (2020b), para la integral y que conforman el significado global de referencia pretendido en el currículo de esta asignatura, contrastado con el trabajo declarado por los profesores. **Palabras clave**: Complejidad epistémica; Integral; Significados: global – intermedio– puntual.
Abstract	We present research results on the global meaning for the integral mathematical object that is built with university students, who take the subject Integral Calculus, articulating the meanings that make it up. Theoretically, the Ontosemiotic Approach to Cognition and Mathematical Instruction was used, from a case study to three professors who teach Integral Calculus to these students. The importance to achieving an articulation of meanings is highlighted from the reconstruction and analysis of three global epistemic configuration proposed in Mateus-Nieves (2020b), for the integral and that make up the global meaning of reference intended in the curriculum of this subject, contrasted with the work declared by teachers. **Keywords**: Epistemic complexity; Integral; Global meaning -intermediate-punctual.
Resumo	Apresentamos resultados de pesquisa sobre o significado global para o objeto matemático integral que se constrói com estudantes universitários, que cursam a disciplina Cálculo Integral, articulando seus significados. Teoricamente, foi utilizada a Abordagem Ontosemiótica da Cognição e Instrução Matemática, a partir de um estudo de caso para três professores que ensinam Cálculo Integral a esses estudantes. Destaca-se a importância de se conseguir uma articulação de significados a partir da reconstrução e análise de três configurações epistêmicas globais propostas em Mateus-Nieves (2020b), para a integral e que compõem o significado global de referência pretendido no currículo dessa disciplina, contrastado com o trabalho declarado pelos professores. **Palavras-chave:** Complexidade epistêmica; Integrante; Significados: global - intermediário - pontual

1. Introducción

Se exponen algunos resultados de una investigación en desarrollo en la línea Pensamiento Matemático Avanzado y Análisis matemático de la Facultad de Educación de una universidad no estatal de la ciudad de Bogotá, Colombia. Es un trabajo didáctico sistemático que analiza un proceso de instrucción que desarrollan tres profesores que enseñan Cálculo Integral a estudiantes universitarios de tercer semestre que cursan diferentes carreras (Finanzas, Ingeniería Catastral, y Administración). El trabajo es de corte cualitativo, basado en un estudio de caso, enfocado en un contexto educativo particular. El objetivo fue analizar la relación entre el significado global de referencia del objeto integral planteado en el currículo, los libros de texto programados en la bibliografía y los significados declarados por los profesores, con el ánimo de determinar si existe algún tipo de articulación y en caso de haberla, cómo se establece. Como marco teórico se utilizó el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática; la metodología de observación utilizada para la descripción de sesiones de clase, permitió desarrollar tres categorías de análisis: 1) relaciones entre la integral como objeto matemático, 2) la función integral como objeto a enseñar y 3) la función integral como objeto enseñado, sin descuidar el entorno local y global como aspecto cultural y social en el que se propone, los usos que se dan a la integral y el lenguaje que se emplea al momento de enseñarla.

Este manuscrito consta de 6 apartados: introducción, antecedentes, marco teórico, metodología, resultados y algunas conclusiones que pueden servir a aquellos profesores interesados en mejorar su práctica docente en el aula, con el ánimo de lograr estudiantes competentes matemáticamente.

2. Antecedentes

Se espera que la articulación de la complejidad epistémica de un objeto matemático, para este caso la integral, permita al estudiante el desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático avanzado, dado que en Mateus-Nieves (2020a, p. 64) “la progresiva matematización, implica la necesidad de abstraer, definir, analizar y formalizar”. Entre los procesos cognitivos de componente psicológica, además de abstraer, podemos destacar los de representar conceptualizar, inducir y visualizar, así como los de desarrollo de competencias laborales, declarando un significado global de referencia para dicho objeto. En Mateus-Nieves (2016) se plantea que dicho significado ha de entenderse desde la aplicación de la triada de configuraciones epistémicas: puntual, intermedia y global ejecutadas desde el proceso de instrucción. Cabe recordar que el significado global de referencia de un objeto matemático ha sido construido a través de la historia de la humanidad, la noción de ese objeto se ha materializado hasta llegar a la forma en la que se conoce y divulga actualmente (Godino, Font, Wilhelmi, y Castro 2007).

Para el desarrollo de esta investigación se consideraron los avances expuestos en Mateus-Nieves (2015, 2016, 2020b, 2020c), donde se establece una reconstrucción histórico-epistemológica del objeto matemático integral. En Mateus-Nieves 2020b se expone la emergencia de tres configuraciones epistémicas globales que permiten comprender la importancia de articularlas durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje para la integral, con el ánimo que el profesor dé una progresiva importancia a los procesos de: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir, visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar, propios de los cursos superiores. Procesos todos ellos que tienen una componente psicológica que, al ser considerados por el profesor, permiten al estudiante alcanzar un significado global del objeto enseñado. Los resultados de este trabajo dejan entrever herramientas para el docente, que le permiten brindar un significado global de referencia muy cercano al propuesto para la integral en el currículo, conduciendo al estudiante a desarrollar habilidades que le permitan diferenciar el tipo de integral a trabajar y en qué contexto se aplica.

Boyer (1988) muestra que, en el desarrollo histórico del cálculo, primero emergió el proceso de integración luego lo hizo el proceso de derivación, posterior a éstos el de límite y por último el de función. En Didáctica de la Matemática encontramos que, primero se enseña como objeto matemático, desde el rigor del lenguaje matemático, funciones, luego límites, derivadas y por último integrales. En este sentido se presentan obstáculos epistemológicos y didácticos (Radford, 1997); conflictos semióticos (Godino *et al*., (2007), que no permiten que dicha articulación pretendida se dé en forma satisfactoria, de ahí que el interés de esta propuesta sea evidenciar que la articulación de la complejidad epistémica de un objeto matemático, permite identificar los distintos significados que podríamos llamar “secundarios” desde situaciones puntuales que permitan construir significados puntuales, para desde allí, llegar a posiciones intermedias, que permitan construir significados intermedios; elementos que al articularse llegan a emerger un significado “global” para dicho objeto, (en nuestro caso: la integral).

Seguir el camino epistemológico de la integral desde estas posiciones (configuraciones epistémicas), permite presentar otras posibles epistemologías de la función integral, que favorecen los procesos de enseñanza y de aprendizaje de éste, porque la epistemología usual del objeto puro no necesariamente responde a las necesidades e implicaciones de las relaciones entre el objeto a enseñar, el objeto enseñado, la cultura, los contextos de uso y demás relaciones que subyacen a su enseñanza. De ahí que, se optó por asumir el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e instrucción Matemática (de ahora en adelante EOS), como marco teórico para este trabajo dado que permite el estudio de la articulación que aquí se propone desde el constructo teórico “configuración epistémica”.

3. Marco teórico

Font, Godino y Gallardo (2013) de acuerdo con el punto de vista pragmatista, proponen que para analizar un texto matemático y, en general, la actividad matemática, sea profesional o escolar, es necesario contemplar como mínimo los siguientes elementos: 1) notaciones, representaciones (lenguaje), 2) situaciones problema, 3) definiciones, 4) procedimientos, técnicas. 5) proposiciones, propiedades, teoremas, y 6) argumentos. Estos seis tipos de elementos se articulan formando configuraciones epistémicas y se pueden entender como un contexto intra matemático. Se trata de una herramienta que puede ser útil para describir la complejidad de los objetos matemáticos y de las prácticas de las cuales emergen. En el EOS, la introducción de la dualidad unitaria-sistémica permite reformular la visión “ingenua” de que “hay un mismo objeto matemático con distintas representaciones”. Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las que el objeto matemático no aparece directamente, lo que si aparece para la integral son: representaciones, diferentes definiciones, proposiciones, propiedades, procedimientos, técnicas y argumentos que se aplican. Dicho de otra manera, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas para el estudio de la integral, algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes.

Desde esta perspectiva, un criterio de idoneidad de una trayectoria didáctica de enseñanza para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas sea un conjunto lo más representativo posible del sistema de prácticas que son el significado del objeto. Dicho en términos de contextos, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos intra-matemáticos variada que les permita construir una muestra representativa de los diferentes sentidos del objeto, (asignación de primeros significados «objetos primarios» y el proceso de evolución de estos «objetos secundarios»). Por otra parte, una vez seleccionada una muestra representativa de contextos intra-matemáticos (puntuales), hay que seleccionar los contextos extra matemáticos (intermedios) que permiten hacer emerger las configuraciones epistémicas en las que se concretan dichos contextos matemáticos (globales).

3.1. Configuraciones epistémicas de referencia

En Mateus-Nieves (2020b) encontramos tres configuraciones epistémicas globales para la integral: GEC1, *Integral´s origins*; GEC2 *The integration operation as support of nascent Integral Calculus*; GEC3, *Foundation of the Integral calculus*. De allí es posible interpretar que las tres juntas conforman un significado global de referencia para la integral, permitiendo diferenciar cuándo y en qué contexto se trabaja con una integral definida, indefinida o impropia.

Al mirar cuidadosamente en la GEC1 encontramos un significado global también “de referencia” para la integral, esta vez como operador matemático, que puede ser interpretada como una configuración epistémica intermedia del gran significado global para la integral, pues constituye una parte de esta. Si afinamos la lupa que nos provee el EOS, esta configuración epistémica también puede ser interpretada como una configuración epistémica puntual, dado que centra su atención en la operación integración, elementos que nos permiten observar la doble perspectiva, unitaria y sistémica de la integral. En la GEC2 encontramos que la operación integración alcanza un estatus superior, cuando Jacques Bernoulli sugirió a Leibniz el nombre «integral», lo que significó una ruptura epistémica[1] en la evolución y manejo de la integración, llegando a ser “un hecho epistemológicamente significativo, puesto que,

[1] Esta ruptura implicó un cambio de paradigma y no volver a pensar como se pensaba la integral antes. En términos de Bachelard (1983) esta ruptura epistemológica rompió con el pasado de una disciplina científica e inauguró una nueva forma de pensar que imposibilita el retorno a estructuras del saber anterior

.

con la incorporación de un nombre para designar una operación específica, se está identificando una noción que amerita un tratamiento especial" (Bobadilla 2012, p. 38). La integral dejó de ser sólo un operador, una herramienta (unitario), para resolver el problema general del cálculo de cuadraturas, convirtiéndose en un nuevo concepto con sus propios problemas y métodos (sistémico), lo que nos permite identificar ahora, otro significado que podríamos llamar "emergente" que puede interpretarse como "intermedio", ya no para el operador integral, sino para el naciente cálculo integral (unitario). La interpretación sistémica y unitaria en la GEC2, también es viable, pues su articulación con la anterior dota de un significado más amplio del que ya poseía la integral (sistémico), este significado puede verse como otro "global emergente" más amplio que el presentado en la GEC1. De igual forma sucede con la GEC3, aquí encontramos un significado global, más amplio que los dos anteriores para la integral, dado que se formaliza y desarrolla el concepto, llegando a distinguir integrales definidas, indefinidas e impropias (sistémico), donde cada una de ellas representa una configuración epistémica intermedia (sistémico), que al mirar en detalle, cada una de ellas, a la vez se convierte en puntual (unitario), dependiendo del tratamiento y del tipo de integral que la situación problema requiera para ser solucionada.

Si continuamos afinando la lupa de observación que nos provee el EOS, encontramos que, en cada una de las tres configuraciones epistémicas mencionadas, hay una configuración epistémica global que puede ser descompuesta en intermedias y puntuales. En Mateus-Nieves (2016) se plantea que dichas configuraciones pueden ser descritas según los siguientes elementos de significado: *Configuración epistémica global* (CEG): entendida como la red de objetos institucionales que se ponen en juego en una actividad matemática, teniendo en cuenta las relaciones que puedan ser establecidas por dichos elementos. *Configuración epistémica intermedia* (CEI): cada una de las sub-configuraciones que componen la configuración epistémica global (Los problemas globalmente identificados pueden ser descompuestos en problemas intermedios lo que implica en nuevos procedimientos, propiedades, argumentos, conceptos y lenguajes). *Configuración epistémica puntual* (CEP): entendida como las sub-configuraciones de la configuración epistémica intermedia (Un problema intermedio puede ser descompuesto en problemas puntuales que a su vez dan lugar a una nueva configuración).

Dichas configuraciones pueden ser reagrupadas o descompuestas según el interés y finalidades de cada investigación y pueden quedarse expresadas de manera implícita, o bien describiendo las redes de objetos y su progresiva reconstrucción alrededor de entidades de naturaleza conceptual o proporcional. De ahí que sea necesario avanzar en la tipificación de las configuraciones y su articulación a lo largo del proceso de instrucción, tratando de identificar los distintos elementos de significado que las componen para cada período establecido, situación que permite al estudiante una comprensión real del objeto «integral» facilitando su comprensión y uso en contextos tanto intra como extra-matemáticos. Aquí, entendemos el significado de un objeto matemático como el sistema de prácticas que se puede parcelar en diferentes clases de prácticas puntuales específicas, que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido, que también puede ser puntual o intermedio.

Para el análisis de los significados se tuvo en cuenta dos ejes fundamentales: el plasmado en la malla curricular y el declarado por los profesores observados. Con referencia al primero, se consideró desde dos miradas: el *significado referencial*[2] para la integral plasmado en el currículo, soportado en los libros de texto guía. El s*ignificado pretendido*, entendido como un proceso de análisis e interpretación de lo establecido en el programa de estudio y en los textos. Para los segundos se consideró lo expuesto en Godino *et al.,* (2007) quienes proponen respecto de los significados personales los siguientes tipos: *Global*: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático. *Declarado*: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional. *Logrado*: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen; para este informe nos detendremos a analizar únicamente el segundo.

4. Metodología

Se usó una metodología basada en un estudio de caso, de tipo descriptivo, a tres profesores (P1, P2, P3), que enseñan cálculo integral a tres grupos de diferentes facultades de una universidad no estatal. El objetivo era analizar la relación entre el significado global de referencia del objeto integral planteado en el currículo y los significados declarados por los profesores con el ánimo de determinar si existe algún tipo de articulación y en caso de haberla, cómo se establece. Iniciamos identificando el significado referencial de la integral plasmado en el currículo, soportado en los libros de texto guía versus el significado pretendido (datos sistematizados en la rejilla 1). Para ello, se revisó y trianguló la información manifestada en la malla curricular de cada programa y los libros de texto propuestos en la bibliografía del curso, cabe aclarar que la facultad de Ingeniería promueve el uso de 3 textos propios de la educación superior y que son reconocidos institucionalmente como idóneos tanto a nivel nacional como internacional, enfatizando en el libro L1. Por su parte, Finanzas y Administración nombran los mismos 3 textos en su bibliografía curricular, pero enfatizan en dos de ellos, (L2 y L3), cuyas características están centradas en aspectos propios de la administración y economía. En la tabla 1, sesión de resultados, presentamos una síntesis de la rejilla 1.

Para identificar los significados personales declarados por los profesores, se diseñó y aplicó al inicio del curso, una entrevista semiestructurada, en aras de conocer su posición respecto al significado global que tenían para la integral. También se observó y grabó en video las sesiones de clase durante todo el semestre académico, con el ánimo de identificar los significados declarado y logrado durante el desarrollo de las clases. Se trianguló la información de la entrevista versus lo observado en las

[2] Significado referencial de la integral, entendido como un sistema de prácticas operativas y discursivas centradas en un empleo unitario: conocer qué es la integral, cómo se opera, cómo se usa para resolver situaciones problema de carácter intra y extra-matemático.

clases, con el ánimo de identificar los tres significados planteados, y desde allí, establecer si existía algún tipo de articulación y en caso de haberla, cómo se dio. Estos datos se registraron en la rejilla 2. En la tabla 2, sesión de resultados, presentamos una síntesis de esta rejilla.

Lo que se muestra en este informe, son los resultados de contrastar las rejillas 1 y 2 con las configuraciones epistémicas establecidas en Mateus-Nieves (2020b) para el significado global de referencia del objeto “integral”. Cabe aclarar que, durante el análisis del currículo establecido en cada facultad y de los textos contemplados en la bibliografía del curso, se utilizaron los aportes expuestos en (Ramos, 2005; Pino-Fan, Castro, Godino, y Font, 2013, y Parra, 2015). En este apartado, se recurre a un tipo de investigación cualitativa, que “esencialmente desarrolla procesos en términos descriptivos e interpreta acciones, lenguajes, hechos funcionalmente relevantes y los sitúa en una correlación con el más amplio contexto social” (Martínez, 2001, p.11). Una vez sistematizados e interpretados los instrumentos de recolección de información, se estableció si existía algún tipo de relaciones entre el significado global de referencia pretendido en el currículo, los libros de texto y el declarado por los profesores. Posteriormente se determinó la posible articulación.

5. Resultados

Por cuestión de espacio, presentamos en la Tabla 1 una síntesis de la rejilla 1.

<table>
<tr><th colspan="3">Significado global de referencia detectado en la malla curricular</th><th>Significado declarado en los libros de texto</th></tr>
<tr><td colspan="3">- Saberes teóricos y prácticos vistos desde dos ambientes: disciplinar y pedagógico-didáctico. (Teorías, procesos, métodos, problemas).
- Articula áreas de conocimiento propias de las disciplinas propias de cada facultad.</td><td rowspan="3">Libro 1, (uso exclusivo en Ing.). Presenta formalmente:
Antiderivadas, usando definiciones, teoremas y demostraciones.
Propone ejercicios y problemas de carácter intra y extra-matemático.
Establece integrales indefinidas como antiderivadas.
Integrales definidas como un límite de una suma de Riemann y el teorema fundamental del cálculo.
Incorpora técnicas para integrar.
Muestra aplicaciones de la integración desde: área entre curvas, volúmenes, trabajo, valor promedio de una función, longitudes de arco, área de una superficie de revolución, desde aplicaciones a la física y la ingeniería.
Las integrales impropias como una extensión de las definidas sobre intervalos no acotados o con discontinuidades intermedias sobre intervalos acostados, que pueden clasificarse como de primera y segunda especie.</td></tr>
<tr><td>Finanzas</td><td>Ing. Catastral</td><td>Administración</td></tr>
<tr><td>I semestre: pre-cálculo.

II semestre: Cálculo diferencial.</td><td>I semestre: Cálculo diferencial.

II semestre: Cálculo integral.</td><td>I semestre: Fundamentos de matemáticas, (pre-cálculo).

II semestre: Matemáticas 1, (Cálculo diferencial).</td></tr>
<tr><td>III semestre: Cálculo integral</td><td>III semestre:</td><td>III semestre: Matemáticas</td><td>Libro 2. Presenta desde situaciones intra-matemáticas particulares:
Antiderivadas como una herramienta para estimar costos con precisión, desde el uso de funciones marginales.</td></tr>
</table>

IV semestre: Ecuaciones diferenciales	Cálculo multivariado. IV semestre: Matemáticas especiales	2, (Cálculo Integral)	Integrales indefinidas, usando definiciones, que no son demostradas, pero si aplicadas para solucionar ejercicios relacionados con costos e ingresos marginales. Integrales definidas como el límite común de sumas superiores e inferiores sobre un intervalo $[a, b]$ y que se escriben como $\int_a^b f(x)dx$ Aplicaciones para la integral desde el cálculo del excedente de los consumidores y productores. Integrales impropias como áreas de regiones no acotadas.
			Libro 3. Presenta ejercicios de carácter netamente intra-matemático aplicando definiciones a manera de axiomas: Antiderivadas como el proceso para determinar una función cuando conocemos su derivada. No establece diferencias entre integrales indefinidas y definidas. Las presenta como entes matemáticos independientes y desconexos. Las integrales impropias las presenta como herramientas útiles para calcular integrales sobre intervalos no acotados.

Tabla 1. Síntesis rejilla 1

De la rejilla 1, obtuvimos un modelo global curricular institucional, que nos permitió identificar el significado global de referencia para la integral, desde la articulación de lo propuesto en la malla curricular de cada facultad en la línea de los cálculos *(Figura 1)*.

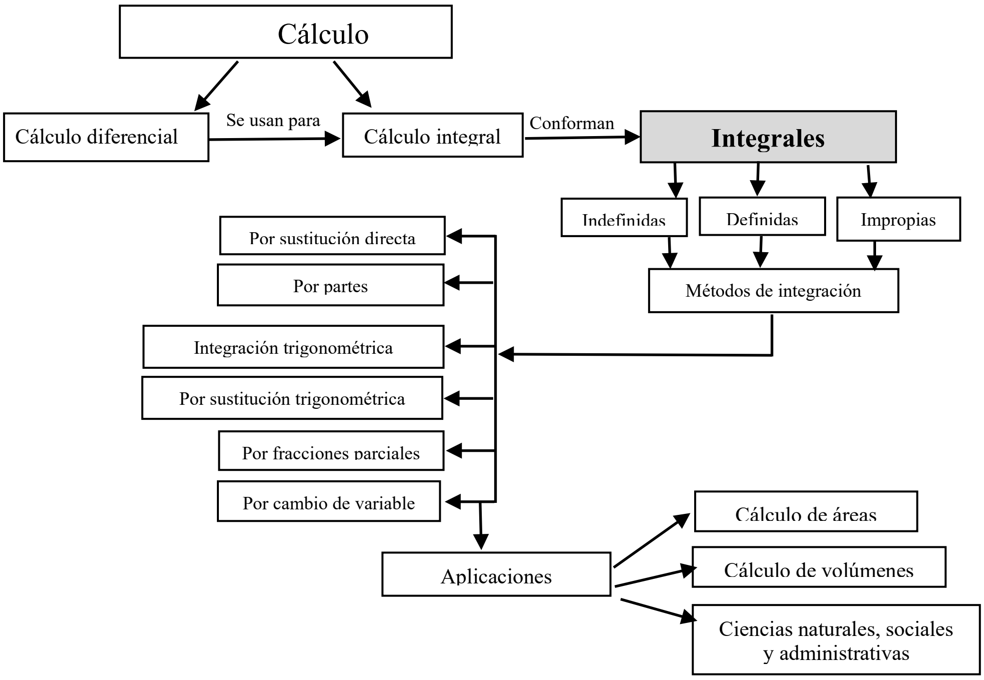

Figura 1. Aspecto del contenido curricular institucional
Fuente: Elaboración propia

De la *Figura 1*, inferimos que el significado global de referencia para la integral pretendido en el currículo está relacionado con la integral como un proceso de acumulación (sistémico), compuesto por integrales indefinidas, definidas e impropias (puntuales). Pero no se evidencia una articulación que permita identificar las relaciones establecidas entre la integral como objeto matemático, la función integral como objeto a enseñar y la función integral como objeto enseñado (diferenciado cuándo se trabaja de forma unitaria y cuándo de forma sistémica). No se evidencia cuáles usos se da a éstas y qué tipo de lenguaje se emplea. Tampoco se observa cómo trasferir de una de ellas a la otra a través de una CEI, que permita al estudiante mirar el objeto "integral" como un ente matemático que ha evolucionado, que está compuesto por diferentes configuraciones epistémicas puntuales (unitario), y que a su vez ha trascendido a una configuración epistémica global (sistémico), donde la articulación entre estos es lo que genera ese significado global de referencia pretendido. Aquí se hace necesario revisar y ajustar la estructura curricular identificada en la Figura 1, de manera que permita al profesor y al estudiante lograr esa articulación de significados (referencial global institucional con el significado institucional pretendido)

Mientras el currículo vs los libros de texto enfatiza variedad de situaciones problema de carácter tanto intra como extra matemático extendidos a varias ciencias, se observó que los tres profesores declararon favorecer las situaciones problema de corte intra matemático (puntuales), centrando su atención únicamente en los problemas propuestos relacionados con las matemáticas financieras (CEP), donde los estudiantes deberían calcular el excedente de los consumidores, productores, la curva de Lorentz (para estudiar las distribuciones de ingreso) y la función de densidad, entre otras. No se privilegian las situaciones problema (intermedias), relacionadas con otras ciencias como la física, la ingeniería (flujo de fluidos, fuerza y presión hidrostática, momentos y centros de masa) a pesar de que uno de los cursos era para ingeniería; o la biología (estudio de mutaciones de genes), entre otros.

Tanto el currículo como los libros de texto privilegia el uso de lenguaje técnico matemático institucionalizado (transición de una configuración epistémica puntual a una intermedia para llegar a una global). Aquí en los tres profesores observados, se encontró un uso de lenguaje con términos matemáticos no reconocidos institucionalmente, por ejemplo "*el que está sumando pasa a restar*", que sería el equivalente a la propiedad: $ax + b = c,$ con $a, b, c \in \mathbb{R},$ entonces $ax + b - b = c - b,$ o expresiones como "*el de arriba*" para referirse al numerador y "*el de abajo*" para referirse al denominador de una expresión algebraica fraccionaria. Lo que llamó fuertemente la atención fue el profesor P2, en él se observó un descuido de la vigilancia epistemológica del saber que enseña, además de usar términos como los referidos al inicio de este párrafo, cuando presentaba significados puntuales para la integral como operador, utilizó términos coloquiales para referirse a definiciones y propiedades que validan su actuar, pero que no fueron nunca justificados ni argumentados. Tal es el caso, cuando construía la integral definida usando el teorema fundamental del cálculo (TFC), configuración epistémica intermedia, planteó que: $\int f(x)' = f(x)$ porque "*la segunda parte del TFC le permite inferir que la coma puesta sobre el paréntesis que cubre a x "anula" la integral*". Hechos que permiten inferir la presencia de obstáculos de tipo epistemológico y didáctico que no fueron contemplados, ni superados durante el desarrollo de las clases. De ahí que, los estudiantes del profesor P2, seguramente tendrán conflictos semióticos que no les permitirán alcanzar la articulación de significados pretendida.

Con relación a los significados personales declarados por los profesores mostramos, por cuestión de espacio, en la Tabla 2 una síntesis de la rejilla 2.

	Entrevista semiestructurada ***Significado global para la integral, (Pretendido)***	
Prof. 1	Identifica el Cálculo Integral como una herramienta de las matemáticas superiores. Manifiesta un significado global de referencia para la integral como un ente matemático, algo sistémico, conformado por la articulación de los significados de integral definida, indefinida e impropia, «unitarios-puntuales», pero adolece de significados intermedios, como la extensión de la integral definida en impropias «sistémico». Reconoce y aplica los métodos de integración y algunas aplicaciones de la integral propias de las matemáticas financieras. Desconoce: significados puntuales «unitarios», la relación entre ellos que desencadenan significados intermedios y global «sistémico» para la integral. Su formación de base es: Lic. en Matemáticas con maestría.	
Prof. 2	Identifica el Cálculo Integral como una rama de las matemáticas, pero no identifica el objeto matemático "integral" como un elemento unitario y sistémico. Identifica, maneja y usa algoritmos que involucran el uso de integrales sin manifestar contextualización puntual, intermedia y global de la misma. Su formación de base es: Ing. Civil con especialización.	
Prof. 3	Identifica el Cálculo Integral como una herramienta de las matemáticas superiores. La integral como un elemento de dicho cálculo, representado en tres formas: indefinida, definida e impropias de primera y segunda especie. Manifiesta habilidades específicas como abstraer, conjeturar, representar, generalizar, y sintetizar al momento de hablar de integrales en contextos intra y extra-matemáticos. Su formación de base es: Matemático con maestría en docencia universitaria. Plantea que "…*es muy diferente ser matemático puro para tener bases pedagogías para poder enseñar lo que aprendimos. Creo ese ha sido uno de mis más grandes retos como profesor*"[3].	
	Observación sesiones de clase	
	Significados*: *Declarado	***Logrado***
Prof. 1	- Uso de significados puntuales para la integral (unitario): • Como operador, • Como integral definida aplicando la regla de Barrow. • Con los métodos para integrar. - Presenta la integral impropia como una extensión de la integral definida (sistémico), distinguiendo las de primera y segunda especie.	- Construye significados puntuales para la integral indefinida y definida (unitarios). Luego define la integral impropia como extensión de la definida mostrado a sus estudiantes significados intermedios (emergentes) para la integral. - Usa ejercicios de carácter intra y extra matemático para construir el conocimiento, desde situaciones problémicas. - Se evidencia rutinización y mecanización de algoritmos para usos de la integral.
	- Privilegia el uso de significados puntuales (unitarios), para los diferentes tipos de integral.	- No se evidencia articulación de significados puntuales o intermedios para formalizar la integral.

[3] Respuesta obtenida de: [entrevista realizada a los 3 profesores en agosto 2 de 2017]

Prof. 2	- Se percibe confusión para diferenciar la comprensión de integrales las indefinidas, de las definidas o de la impropias. - Identificación axiomática de los tipos de integral existentes. - Énfasis en privilegiar procedimientos algebraicos y analíticos, de tipo mecanicista. - Presentación de las integrales con que trabaja al mismo nivel.	- Uso de ejercicios de corte intra matemático para construir el conocimiento. - Reduce el proceso de enseñanza a una simple mecanización de algoritmos que presenta de forma axiomática. - Descuido de la vigilancia epistemológica al momento de enseñar. - Ausencia de situaciones problema que permitan al estudiante identificar el uso y tipo de integral necesario ante una situación determinada. - Presenta la integral únicamente como operador.
Prof. 3	- Privilegio del uso de significados puntuales para la integral (unitario): • Como operador, • Como integral definida. • Los métodos para calcular integrales • Para calcular área entre curvas. · Presenta la integral impropia como una extensión de la definida (sistémico), conduciendo a sus estudiantes a identificar claramente las de primera de las de segunda especie.	- Representa, define y formaliza la integral definida (unitario), usando el TFC, desde el uso de software específico, como elemento de apoyo para la clase. - Presenta las integrales impropias de manera formal, reduciéndola a presentaciones netamente axiomáticas (definiciones, usa teoremas para validar el trabajo realizado, pero no son demostrados). - Presenta situaciones problema específicas que involucran el uso de integrales para calcular el excedente de los consumidores y productores. - Se evidencia rutinización y mecanización de algoritmos para usos de la integral, solucionando situaciones problema. - Generaliza y sintetizar con sus estudiantes las integrales definidas e impropias conduciéndolos a desarrollar habilidades como: abstraer, conjeturar y generalizar. Permitiéndoles construir significados intermedios para la integral, particularmente cuando define las integrales impropias de 1° y 2° especie, (emergentes).

Tabla 2. Síntesis rejilla 2.

De la tabla 2 podemos inferir que, en los profesores P1 y P3 se observa preocupación por articular el significado puntual de la integral propuesto en la GEC1 (como operador matemático) dado que llevan a sus estudiantes a identificar procesos de abstracción, representación, visualización, y generalización de las situaciones propuestas, de ahí que, el significado intermedio de la GEC2 (como herramienta capaz de solucionar problemas relacionados con el cálculo de áreas) se hace evidente para estos estudiantes mediante la transición de la integral como operador a la función integral como herramienta.

Tanto el profesor P1 como P3 utilizan lenguaje geométrico, para construir, visualizar inducir, definir y conceptualizar la integral definida como "*el único número* *más grande que todas la sumas inferiores y menor que todas las sumas superiores*". Esta articulación la logran con el uso de un lenguaje analítico, lógico-descriptivo, con procesos aritméticos-geométricos que los llevan a encontrar resultados numéricos, vía teorema fundamental del cálculo, ayudados de Applets de Geogebra online. Estos profesores extienden esta articulación cuando enseñan aplicaciones de la integral (cálculo de área entre curvas). Tanto P1 como P3 integran significados puntuales de la integral: como operador, como función, como integral definida aplicando la regla de Barrow, con los métodos para calcular integrales, conduciendo al estudiante a diferenciar si la situación planteada (problema propuesto), se puede solucionar desde una integral definida o indefinida, por el análisis del tipo de situación propuesta y no solamente por el registro escrito. Elementos que fortalecen los procesos de abstraer, analizar, categorizar, diferenciar y formalizar las dos partes del teorema fundamental del cálculo.

Los profesores P1 y P3, construyen en sus estudiantes significados intermedios (emergentes) de la integral definida, con aplicaciones como el cálculo del excedente de los consumidores y productores. Sin embargo, dicha articulación puntual-intermedia se ve truncada en P1 cuando aplica procedimientos débiles para analizar, conjeturar, inducir, y sintetizar, que resultan insuficientes para aquellos estudiantes que ven la asignatura por primera vez, y pierden la articulación del sentido del significado puntual del intermedio. Tal es el caso, cuando no se definen criterios claros para determinar cómo distinguir si una región es de tipo I o II cuando desean calcular el área comprendida entre dos curvas. Algunos estudiantes no comprenden cómo diferenciar esta clase de regiones. Situación no percibida en P3 que definió criterios claros (configuración epistémica puntual), desde el análisis, representación y formalización de situaciones propias para determinar el tipo de región a evaluar (configuración epistémica intermedia). En contraste, encontramos que en P2 no existe una articulación de significados para la integral; no se distinguen significados puntuales de intermedios, todos se trabajan al mismo nivel. El trabajo realizado en el aula se redujo a la aplicación mecanicista de algoritmos útiles para solucionar determinado tipo de ejercicios de carácter netamente intra matemático (calcular integrales).

En P1 se observa una articulación de significados puntuales, algunos intermedios, desde el abordaje de situaciones de carácter intra matemático claramente definidos, (ejercicios particulares y situaciones problema que involucran integrales definidas o indefinidas), lo que permite inferir que sus estudiantes alcanzan una aproximación al significado intermedio de referencia para la integral, muy próximo al planteado en el currículo, para estos estudiantes hubiera sido más enriquecedor si P1 hubiera abordado situaciones de carácter extra matemático (problemas contextualizados), particularmente cuando trabajó integrales impropias, aplicaciones de la integral, elementos que hubieran potenciado los procesos de formalización, generalización y conceptualización de los diferentes significados puntuales e intermedios que alcanza la integral. Significado pretendido en la estructura curricular.

Una característica que llamó la atención en esta investigación fue que, durante las clases observadas, para los tres profesores, la típica explicación escolar no partía de una presentación que precise un equilibrio entre el desarrollo conceptual de las ideas básicas del Cálculo Integral con el manejo apropiado de sus algoritmos. En varias ocasiones se llegó a desconocer que el concepto de Integral es esencial dentro del Análisis Matemático, lo que implicaría el desarrollo, en el estudiante, de ciertas habilidades específicas como abstraer, conjeturar, representar, conceptualizar, generalizar, y sintetizar. Se observó presencia de ejercicios específicos para calcular integrales. Escasas situaciones problemas en las que se aplica la integral, las presentadas fueron estereotipadas y de carácter netamente intra matemático, allí el estudiante pudo ver cuál es la integral en juego reduciéndose la evaluación al cálculo de dicha integral vía teorema fundamental del Cálculo. Por ello compartimos la posición de Muñoz (2000) “no basta dar la definición de un objeto matemático para comprenderlo” (p. 62), es necesario considerar la articulación de significados existentes (puntuales, intermedios, global).

Se evidenció en los tres profesores, privilegio por una enseñanza centrada en una excesiva orientación algebraica (de tipo mecanicista) que impide una articulación de significados para la integral como objeto matemático, la función integral como objeto a enseñar y la función integral como objeto enseñado.

6. Conclusiones

Los profesores P1 y P3 mostraron mediante el desarrollo de su labor docente, variantes como, el uso de software matemático, modelación geométrica, entre otras, que pueden ser introducidas en el trabajo didáctico, considerando las circunstancias en las que desempeñaron su labor. Si bien los tres profesores construyeron su discurso mediante diferentes recursos que previamente habían seleccionado al planear sus clases, utilizan ejercicios netamente de carácter intra matemático, como un medio a partir del cual se pude construir conocimiento, pero no los extienden a situaciones contextualizadas (situaciones problemáticas), lo que nos permite inferir, que para ellos enseñar Cálculo Integral, significa enseñar procedimientos, técnicas, e identificar algunas problemáticas susceptibles de resolverse con estos elementos definidos, reduciendo el proceso de enseñanza a una simple mecanización de algoritmos que poco aportan al conocimiento y desarrollo de competencias matemáticas en el estudiante.

Trabajar la articulación de las tres configuraciones epistémicas presentadas para la integral, concibiendo la flexibilidad en el tratamiento de los diferentes componentes que las constituyen es clave para la introducción de la formalización propia del concepto de integral. Esto se evidencia con el trabajo de los profesores P1 y P3 que utilizan configuraciones epistémicas puntual e intermedia para articular el significado global presente en las GEC1, GEC2, GEC3, lo hacen de forma unitaria pero no sistémica. Consideramos que la configuración epistémica global declarada, entendida como la red de objetos institucionales que se ponen en juego en una actividad matemática, fue insuficiente; ya que no se presentó a los estudiantes situaciones problemáticas de carácter extra matemático, extendidas a otras ciencias, que les permita alcanzar un significado global de referencia para la integral como un ente sistémico.

Creemos que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieran un adecuado significado personal del objeto matemático “integral” puede estar basado en conseguir que los profesores construyan un significado personal del Cálculo Integral como un ente que es a su vez unitario y sistémico, donde la articulación de las tres configuraciones epistémicas globales presentadas permite comprender la complejidad epistémica que posee la integral. Elementos que posibilitan al profesor organizar la presentación del objeto matemático “integral” desde situaciones específicas puntuales e intermedias. En las primeras, la integral como operador, como herramienta útil para solucionar problemas (GEC1). Las segundas, la función integral como un ente matemático riguroso, con definiciones, teoremas y propiedades que permiten solucionar situaciones problema de carácter intra y extra matemático tales como: calcular excedente de los consumidores y productores; volúmenes, centros de gravedad y masa, corrientes, capacitancias, tiempos de carga y descarga de corriente, entre otras (GCE2 y GEC3). Situaciones que permiten al estudiante comprender y usar el Cálculo Integral como un ente sistémico-global. Como consecuencia, el desarrollo de competencias matemáticas.

Como conclusión general percibimos que la articulación parcial, por parte de los profesores P1 y P3, de las configuraciones epistémicas expuestas y desde el análisis prospectivo realizado en las secciones precedentes, permite afirmar un desequilibrio entre los significados pretendido y logrado. Situación altamente evidente en el profesor P2 quien se limitó a unas clases de tipo magistral, de carácter mecanicista y repetitivo. Los tres profesores privilegian procedimientos algebraicos y analíticos que ayudan a la comprensión parcial de la integral únicamente como operador. Elementos que permiten inferir el por qué se manifiestan muchos errores en el actuar de los estudiantes, se pudo observar que realizan tareas y, cuando los resultados obtenidos son inconsistentes con el gráfico, intentan dar explicaciones poco razonables que muestran más confianza en los cálculos que en el dibujo. Finalmente se observa que los alumnos recuerdan la integración como un conjunto de reglas desarticuladas (CEP), donde la mayoría no sabe por qué el cálculo de áreas y volúmenes trae consigo el cálculo de primitivas (CEI). En los tres procesos de instrucción observados no se percibe alcance alguno que se acerque a un significado global para la integral.

Contribuciones de los autores

Autor 1. Lideró y direccionó el proyecto de investigación. Planeó antecedentes, pregunta, objetivos, marco teórico, metodología, trianguló la información recopilada. Presentó resultados, conclusiones para en conjunto con el autor 2 ajustar y concretar el artículo que ponemos a su consideración para evaluar.

Autor 2. Colaboró recopilando información in situ, ayudó a diseñar y aplicar instrumentos; fases de la metodología, planeación de resultados, conclusiones y organización preliminar de este manuscrito

Declaración de disponibilidad de datos

Los datos que respaldan este estudio serán puestos a disposición por el autor 1, previa solicitud razonable.

Bibliografía

Bachelard, G. (1983). *Epistemología*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Bobadilla, M. (2012). *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico*. (Tesis doctoral). Universidad del Valle. Colombia. [en línea], Recuperado el 10 de junio de 2018, disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/10604/1/Bobadilla2012Desarrollo.pdf

Boyer, C. B. (1988) *A History of Mathematic*. (M. Martínez) Madrid, España: Alianza Editorial S.A. (Trabajo original publicado en 1968).

Font, V., Godino, J. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82,* 97-124.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Castro, C. de (2007). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de la matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Conferencia Invitada en la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Maracaibo, Venezuela.

Martínez, M. (2001). *La Nueva Ciencia. Su Desafío, Lógica y Método*. México. Editorial Trillas.

Mateus-Nieves, E. (2015). *Evolución histórico-epistemológica del concepto de integral*. DOI: 10.13140/RG.2.2.32081.56164. Project: línea de investigación doctorado en Educación Matemática. Bogotá.

Mateus-Nieves, E. (2016). Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de integración por partes. ISSN 1980-4415. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a13. *Bolema*, *Rio Claro (SP), v. 30*, n. 55, p. 559 – 585.

Mateus-Nieves, E. (2020a). Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. ISSN2178-7727. DOI: 10.17648/acta.scientiae.5667. *Acta Scientiae. (Canoas), 22(3),* 65-81.

Mateus-Nieves, E. (2020b). Epistemic Complexity of the “integral” mathematical object. (In press). International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. ISSN impreso: 0020-739X ISSN en línea:1464-521. London, UK.

Mateus-Nieves, E. (2020c). Preliminares del Cálculo Integral. DOI: 10.13140/RG.2.2.34322.27841. Conference: Encuentro Didáctica del cálculo infinitesimal. Project: Educación Matemática, Bogotá. D. C. August 2020.

Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*. Tesis de magíster. Universidad de Los Lagos.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma, 34*(2), 123–150.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 26–33.

Ramos, A. (2005). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales: El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. Tesis doctoral. Universidad de

Barcelona. [en línea], Recuperado el 15 de julio de 2018, disponible en, http://hdl.handle.net/10803/1313.

Autores:

Enrique Mateus-Nieves, ORCID iD (0000-0002-0500-7450).
CV. Estudios posdoctorales en Educación Matemática, universidad de Barcelona. Director líneas de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado; Didáctica del Cálculo; Análisis matemático; Topología y topología algebraica. Universidad Externado de Colombia. Calle 12 1-17E Bogotá, D. C.

Wilfaver Hernández Montañez, ORCID iD (0000-0003-1060-2497). C.V. Máster en Educación, Énfasis Educación Matemática. Co-investigador en las líneas: Pensamiento Matemático Avanzado y Didáctica del cálculo, Facultad de Educación, Maestría en Educación, énfasis Educación Matemática, universidad Externado de Colombia. Calle 12 1-17E Bogotá, D. C