

Se hace camino al andar

Rafael Losada Liste

Resumen	Casi todas las construcciones que se realizan con GeoGebra se basan en la representación de dimensiones espaciales (0, 1, 2 o 3). Aquí se detallan métodos que permiten incorporar a esas dimensiones la gran ausente, la dimensión temporal. Se expondrán diversos ejemplos de entornos "casi reales", cuya creación sería impensable con las primeras versiones de GeoGebra pero que las nuevas versiones facilitan, gracias a la gran flexibilidad característica de los guiones (instrucciones de GeoGebra) asociados a deslizadores. Palabras clave: GeoGebra, Tiempo, Física, Movimiento, Guiones.
Abstract	Almost all constructions made with GeoGebra are based on the representation of spatial dimensions (0, 1, 2, or 3). This document details methods that allow the incorporation of the often-missing temporal dimension into those spatial dimensions. Various examples of 'almost real' environments will be presented, whose creation would have been unthinkable with the early versions of GeoGebra but are now made easier thanks to the great flexibility offered by scripts (GeoGebra instructions) associated with sliders. Keywords: GeoGebra, Time, Physics, Movement, Scripts.
Resumo	Quase todas as construções realizadas com o GeoGebra baseiam-se na representação de dimensões espaciais (0, 1, 2 ou 3). Aqui são detalhados métodos que permitem incorporar a essas dimensões a grande ausente: a dimensão temporal. Serão apresentados diversos exemplos de ambientes 'quase reais', cuja criação seria impensável nas primeiras versões do GeoGebra, mas que as novas versões tornam possível graças à grande flexibilidade característica dos scripts (instruções do GeoGebra) associados aos seletores. Palavras-chave: GeoGebra, Tempo, Física, Movimento, Scripts.

1. Introducción

1.1. El objetivo

Este artículo está concebido como ejemplo o propuesta de lo que considero un modo de aprendizaje atractivo y significativo de las Matemáticas, basado en proyectos multidisciplinarios en donde la evaluación de "demostrar saber hacer" es más importante que la de "demostrar saber reproducir". En este caso, combinando contenidos de Matemáticas y de Física con procedimientos de GeoGebra.

Creo necesario dotar al aprendizaje de las matemáticas en Secundaria de un contexto menos teórico que el habitual, tradicionalmente heredado de la clase magistral universitaria. Es normal que a los¹ matemáticos nos fascine la perfección de las ideas abstractas y su desarrollo puramente lógico, desligado de la experiencia, pero hace años que he comprobado que la mayoría de adolescentes agradecen un contexto mucho más terrenal.

Además, en un mundo cada vez más acelerado, los conocimientos concretos merman rápidamente su valor, cediéndolo a las competencias generales. Y son proyectos como este los que promueven, precisamente, la adquisición de esas competencias (en este caso, matemática y científico-técnica).

Como, por su increíble versatilidad, las Matemáticas se encuentran presentes en infinidad de contextos transversales, podríamos pensar que es fácil elegir algunos que permitan, en cada nivel, la evaluación de la competencia matemática. Sin embargo, la mayoría de las situaciones "reales" son demasiado "complejas" (perdón por el juego de palabras) para que sea sencillo simplificarlas sin perder con ello la esencia de su contenido.

Por su parte, desde el punto de vista de la Física, es históricamente clara su matematización, mayor que en cualquier otra área científica. Lo que también conlleva algunos riesgos en su enseñanza temprana, como abusar de la formulación o intentar adelantar conceptos y procedimientos matemáticos (particularmente, las funciones trigonométricas y complejas, y aquellos relacionados con el cálculo infinitesimal, como la derivada y la integral).

Aquí pretendo mostrar un modo de evitar estos riesgos, permitiendo, mediante el uso de GeoGebra, que los alumnos demuestren su buen hacer matemático en un contexto dinámico similar al de la vida real.

1.2. El contenido

Mostraré las instrucciones detalladas que convierten a GeoGebra en un laboratorio de cinemática al alcance de alumnos de Secundaria (Losada, 2024). Como se verá, solo es necesaria la introducción de un deslizador asociado a unas pocas líneas de comandos de GeoGebra que, con ligeras variaciones, son esencialmente siempre los mismos. Este laboratorio puede ser usado como punto

¹ Y, por supuesto, "las". No usaré el doble género gramatical por brevedad, pero el lector o la lectora debe ser consciente de que en la mente del autor (en este caso el masculino no es genérico) no existe la más mínima correspondencia del género gramatical, empleado de modo genérico, con ningún sexo determinado.

de partida para la propuesta de proyectos físico-matemáticos, ya sea en esa etapa educativa o en etapas posteriores.

Para facilitar estas propuestas al alumnado más joven, los conceptos teóricos han sido reducidos al mínimo, al igual que la formulación. No hace falta saber mucha física. Tampoco mucha matemática. Lo que hace falta saber es realmente qué queremos visualizar y qué instrucciones de GeoGebra sirven para lograrlo.

Algunas páginas de este artículo incluyen notas con la teoría física correspondiente. De hecho, en muchas de las construcciones puede verse la comparación entre esa teoría y la animación conseguida. Pero esto no significa que sea necesario conocer esa teoría para realizar la construcción. Simplemente, he incluido la teoría para que podamos comprobar el grado de exactitud de cada animación.

En cada apartado se muestra la dirección URL que permite acceder a cada construcción. En muchos casos, se acompaña de una imagen también vinculada a esa dirección.

1.3. El procedimiento

En el I Congreso Internacional de GeoGebra, celebrado en Córdoba en 2023, expuse algunos métodos que facilitan a los estudiantes el acceso a investigaciones con un mínimo de aparato algebraico (Losada, 2023). Como ejemplo, podemos usar la vista de Cálculo Simbólico (CAS) para definir un punto arbitrario X y la distancia entre él y otros objetos ya definidos, como un punto fijo A o una recta r :

- $X := (x, y)$
- $XA(x, y) := \text{Distancia}(X, A)$
- $Xr(x, y) := \text{Distancia}(X, r)$

De esta forma tan simple (observemos que ni siquiera se da por supuesto el conocimiento del teorema de Pitágoras) conseguimos plantear ecuaciones como la siguiente y observar la cónica resultante (Figura 1), de excentricidad k :

- $XA / Xr = k$

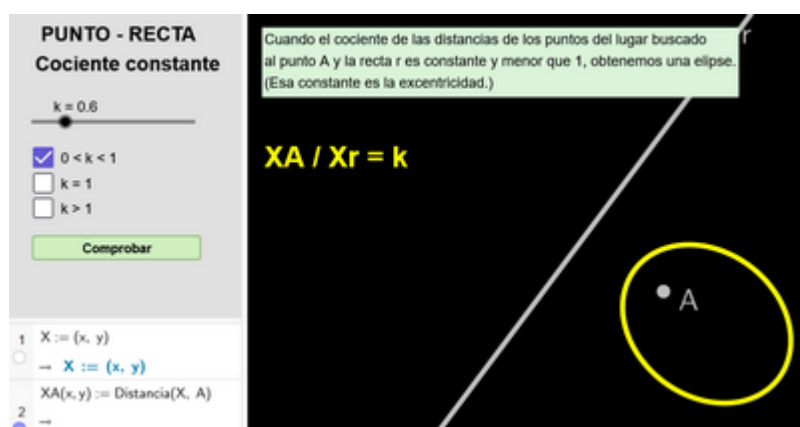


Figura 1. Uso sencillo pero potente del CAS para descubrir lugares geométricos
<https://www.geogebra.org/m/uaebmqzy>

O, por ejemplo, podemos confinar varios puntos libres en una superficie esférica y, definiendo vectores entre ellos, hacer que se repelan automática y mutuamente, observando qué tipo de configuración aparece según sea el número de puntos confinados.

Esta repulsión automática es posible gracias a un deslizador permanentemente animado (que he denominado "anima"). En aquel caso, cada vez que este deslizador cambia de valor, ejecuta el guion que "anima" a los puntos a repelerse.

En este artículo, un deslizador similar, continuamente animado, será también el protagonista indiscutible. Presentaré un método que permite el acercamiento a algunas magnitudes físicas inherentes al movimiento, como la velocidad y la aceleración, basado exclusivamente en su definición conceptual². La idea original de este método aparece expuesta, como tablas de variaciones, por Richard Feynman en su famoso libro "The Feynman Lectures on Physics", volumen I, 9-7, *Planetary motions* (Feynman, 1963).

Veremos que este método parece haber sido ideado a propósito para su incorporación como guion al deslizador "anima" (al que, sin duda alguna, a Feynman le hubiera encantado ver en acción). Con ese fin, usaremos la sincronización en tiempo real con la hora disponible en el ordenador (u otro dispositivo) del usuario. Conseguiremos así la simulación bastante precisa de diversas situaciones en donde una masa, sometida a una aceleración **g**, mueve su posición **M** con velocidad **v**, sin necesidad de recurrir a la matemática superior.³

En general, las animaciones no hacen uso de fórmulas (ni ecuaciones preformuladas ni trigonometría ni cálculo diferencial), solo realizan las variaciones necesarias en los vectores que dirigen el movimiento. Sin embargo, veremos que las consecuencias pueden llegar a ser espectaculares. Estas variaciones se reducen esencialmente a la ejecución de dos instrucciones muy simples:

- Valor(**v**, **v** + dt **g**)
- Valor(**M**, **M** + dt **v**)

En ellas, *dt* es un intervalo muy pequeño de tiempo (lo que tarda el deslizador en cambiar de valor, unas pocas centésimas de segundo). Es decir, "cada poquito", la velocidad **v** varía en un valor igual a "un poquito de **g**" y la posición **M** de la masa se desplaza "un poquito de **v**". Es importante resaltar que estas sumas no son numéricas, sino vectoriales, es decir, se suma una cierta cantidad en una cierta dirección y sentido.

2. Rastro poligonal

GeoGebra permite que los objetos geométricos, como puntos o líneas, puedan dejar una huella, un rastro, de su movimiento. Basta activar la casilla de opción "Mostrar el rastro" en las propiedades del objeto. Para mejorar la visualización del

² En la mecánica clásica, no relativista.

³ Las letras **g** y **v** aparecen en negrita porque representan a vectores, no a escalares. Formalmente, la letra **M** representaría también el vector de posición del punto **M**, por lo que una expresión como **M** + dt **v** es en realidad una suma vectorial.

recorrido realizado, en algunas construcciones sustituiremos el rastro que deja un punto por una línea poligonal. En este apartado detallo cómo hacerlo.

Calcular la longitud que seguirá la trayectoria de un móvil no siempre es sencillo. Si conocemos el recorrido que seguirá esa trayectoria, podemos crear una poligonal que se ajuste muy bien a ese recorrido. Por ejemplo, en la construcción de la Figura 2 hemos aproximado un arco parabólico con una poligonal con 500 vértices. El ojo no puede distinguir la poligonal de la curva. El error cometido en el cálculo de la longitud, al sustituir la curva por la poligonal, es ínfimo (Figura 2).

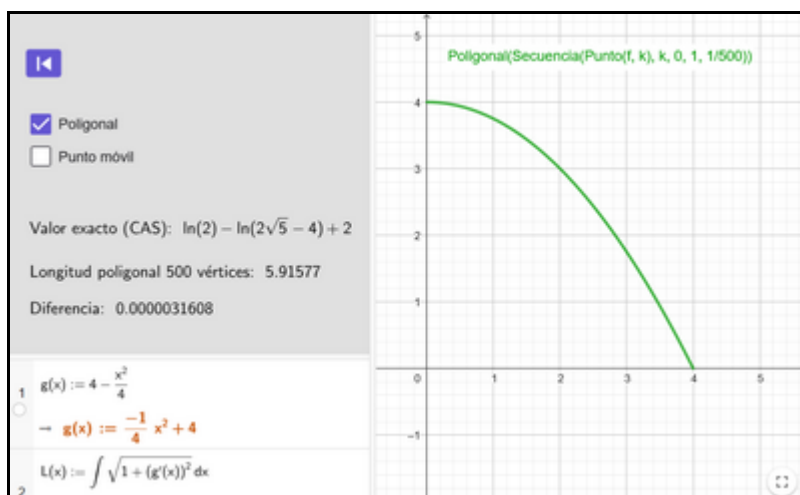


Figura 2. Poligonal y rastro poligonal
<https://www.geogebra.org/m/w4zhh9qk>

Si no conocemos ese recorrido, o ignoramos su expresión algebraica, podemos usar el rastro de un punto móvil M para crear esa poligonal. Primero, creamos una lista vacía (que llamaremos "reg") que se encargará de registrar las posiciones de M. Como primer elemento de la lista, asignamos la posición inicial del punto libre M:

- $reg = \{\}$
- $Valor(reg, \{M\})$

Observemos que no definimos directamente $reg = \{M\}$. Si así lo hiciésemos, no podríamos usar posteriormente el comando Valor para ir añadiendo más puntos, pues este comando solo permite actuar sobre objetos libres, no dependientes (aunque M es libre, reg dependería de M).

Sobre esa lista, creamos la poligonal que une esas posiciones:

- $Poligonal(reg)$

Por último, escribimos el guion (pestaña "Al actualizar") asociado al punto libre M, que se ejecutará cada vez que M actualice su posición:

- $Valor(reg, Añade(reg, M))$

3. Capturando el instante

3.1. Fracciones de tiempo

El comando TomaTiempo permite recoger la fecha y hora real desde el ordenador o dispositivo que estemos usando. Al ejecutarse, devuelve una lista que comienza con la hora actual, en el siguiente orden:

- {milisegundos, segundos, minutos, horas, fecha, mes, año, mes (texto), día semana (texto), día semana (comenzando en domingo)}

Así, a las 18:31 y 16,347 segundos del sábado 5 de abril de 2025, devolverá:

- {347, 16, 31, 18, 5, 4, 2025, "Abril", "Sábado", 7}

En adelante, bastará considerar los tres primeros elementos de esta lista.

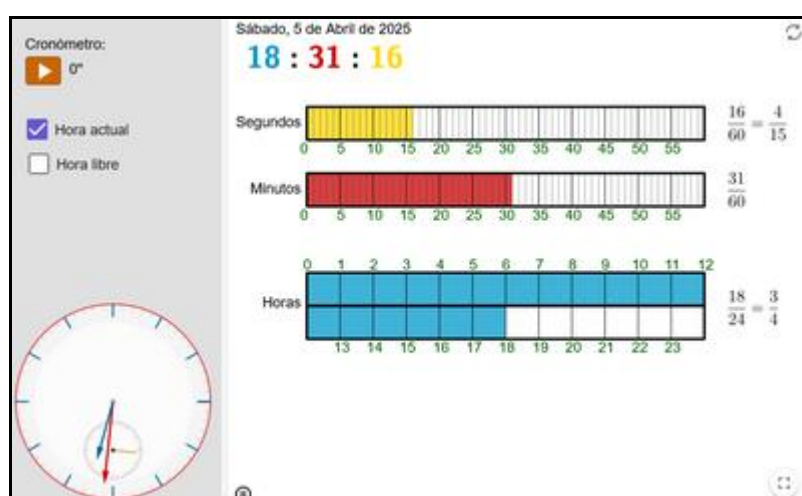


Figura 3. Reloj que muestra la hora actual gracias al comando TomaTiempo
<https://www.geogebra.org/m/s6qpkeuq>

3.2. Registro del tiempo (plantilla para estudiantes)

3.2.1. El registro de cada instante

Tomaremos el tiempo real en un instante inicial t_0 y, cada poco, el deslizador "anima", se encargará, como veremos, de volverlo a tomar en un instante t_1 .

Llamaremos tt al último instante registrado y dt a la diferencia de tiempo (unas pocas centésimas de segundo) entre esos instantes de toma de tiempo.

Creamos, pues, las siguientes variables libres (no dependen de ningún objeto):

- $t_0 = \{0, 0, 0\}$
- $t_1 = \{0, 0, 0\}$
- $tt = 0$
- $dt = 0$

Para referirnos por separado a cada elemento de las listas $t0$ y $t1$, basta colocar como argumento de estas variables el índice correspondiente. Por ejemplo, $t0(2)$ recoge el valor del segundo elemento de la lista $t0$.

3.2.2. El deslizador "anima"

Llegamos al ya declarado protagonista indiscutible de todas las simulaciones. Llamaremos "anima" a este deslizador, que creamos de 0 a 1, con incremento 0.001. En él escribimos el siguiente guion "Al actualizar", que se encarga de actualizar $t1$ y calcular el tiempo dt transcurrido desde tt .

- Valor(tt , $t1(1)$)
- Valor($t1$, Primero(TomaTiempo(), 3))
- Valor(dt , $(t1(1) < tt) + (t1(1) - tt)/1000$)

Así, dt ("diferencia de tiempo") recogerá el tiempo (unas pocas centésimas de segundo) transcurrido entre dos ejecuciones consecutivas del guion del deslizador "anima". La instrucción $(t1(1) < tt)$ sirve para sumar un segundo cuando $t1(1) < tt$.⁴

3.2.3. Botón Reinicia

Creamos el botón "Reinicia" (primer botón de la Figura 4, en la esquina superior izquierda) con el siguiente guion "Al hacer clic":

- Valor(anima, 0)
- IniciaAnimación(anima, false)
- Valor($t0$, {0, 0, 0})
- Valor($t1$, $t0$)

3.2.4. Botón Empieza⁵

Creamos el botón "Empieza" (segundo botón de la Figura 4) con el siguiente guion "Al hacer clic", que toma la hora inicial {milisegundos, segundos, minutos} y la asigna a $t0$ y $t1$. Inmediatamente, activa el deslizador "anima".

- Valor($t0$, Primero(TomaTiempo(), 3))
- Valor($t1$, $t0$)
- IniciaAnimación(anima, true)

3.2.5. Tiempo de animación

Finalmente, creamos la variable t que recogerá los segundos transcurridos desde $t0$, es decir, desde el momento en que pulsemos el botón Empieza:

- $t = (t1(3) < t0(3)) * 3600 + (t1(3) - t0(3)) * 60 + t1(2) - t0(2) + (t1(1) - t0(1)) / 1000$

⁴ La desigualdad toma el valor 1 cuando es verdadera y 0 cuando es falsa. Para añadir líneas con comentarios como este al propio guion, basta comenzar cada línea de comentario con el símbolo #.

⁵ En las construcciones también aparece un botón "Para" que sustituye a "Empieza". En ellas, pueden verse los detalles de su guion "Al hacer clic". No los incluimos aquí por no ser relevantes para el resto del artículo.

Observemos que la instrucción $(t1(3) < t0(3)) * 3600$ suma 3.600 segundos (una hora) cuando la hora actual $t1(3)$ tenga un valor menor que la hora inicial $t0(3)$, es decir, cuando se cambie de día (siempre hay quien trabaja a medianoche).

Hemos terminado. No es necesario que los alumnos tengan que discurrir todo esto, podemos facilitarles esta plantilla con los objetos ya creados. Nuestro objetivo es otro: serán ellos los que deban aplicar la plantilla a sus propios fines. Para ello solo necesitan saber que t recoge los segundos transcurridos y dt es una cantidad de tiempo, en segundos, muy pequeña (como unos 0,04 segundos).

Enlace a la construcción plantilla: <https://www.geogebra.org/m/q9w2uqnu>

4. Movimiento uniforme

4.1. Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU). Primera ley de Newton

Después de crear, como hemos visto, un registro del tiempo, colocamos un punto libre M (que representa una masa m) y definimos un vector constante $\mathbf{v}$ (Figura 4). Por ejemplo:

- $\mathbf{v} = (2, 0)$

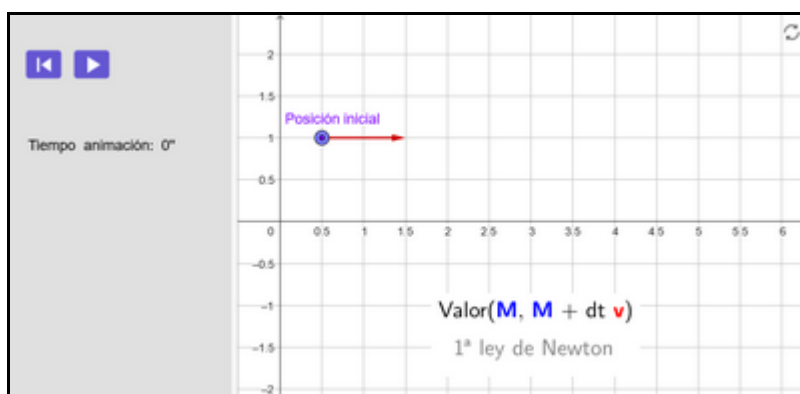


Figura 4. Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)
<https://www.geogebra.org/m/be4u2nzc>

Por definición de velocidad, la masa se desplazará $dt \mathbf{v}$, así que basta añadir la siguiente instrucción (1ª ley de Newton) al guion del deslizador "anima":

- $\text{Valor}(M, M + dt \mathbf{v})$

Así conseguimos que M se desplace en un Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU). Observa que esta instrucción, cada vez que se actualiza el valor del deslizador, lo único que hace es obligar a M a desplazarse "un poquito" en la dirección y sentido de $\mathbf{v}$.⁶

Para que M vuelva a la posición inicial P , añadimos la siguiente instrucción al guion del botón Reinicia:

- $\text{Valor}(M, P)$

⁶ Como dt está en segundos, la velocidad $\mathbf{v}$ estará en m/s, así que tomamos el metro como unidad de los ejes.

El MRU es especialmente importante porque, según la primera ley de Newton, toda masa ha de permanecer o bien en reposo o bien en este movimiento (respecto a un sistema de referencia) si no actúa sobre ella ninguna fuerza. Es decir, toda masa se resiste a variar su estado de movimiento. Esta importante propiedad se conoce como *inercia*.⁷

4.2. Efecto Doppler y Mach 1

Incluso algo tan sencillo como el movimiento uniforme puede ofrecer escenarios interesantes. En este, se combina el movimiento uniforme de las ondas sonoras con el movimiento uniforme de un avión (se puede elegir a qué velocidad viaja este último).⁸

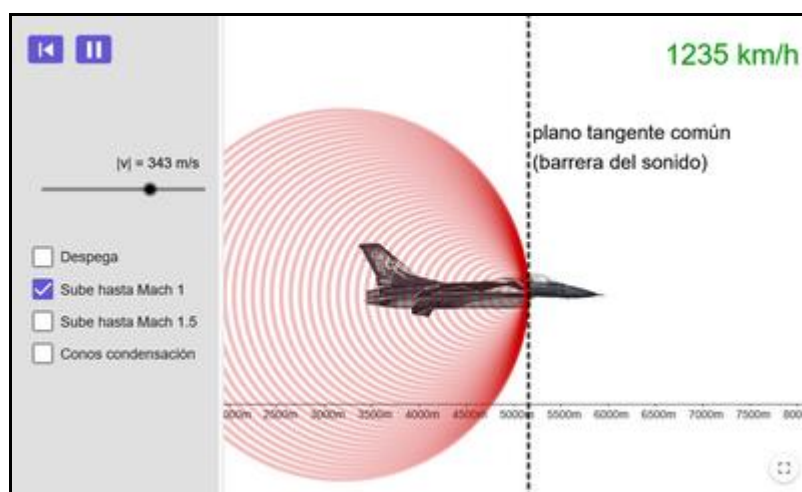


Figura 5. Rompiendo la barrera del sonido
<https://www.geogebra.org/m/q2nmywav>

Esto permite la observación de la compresión de las ondas sonoras, lo que conlleva la variación de la frecuencia que percibe el observador (efecto Doppler) y de la ruptura de la barrera del sonido, apareciendo la onda de choque, en forma de superficie cónica. Esta es una onda de presión que viaja más rápido que la del sonido en ese lugar (que se denomina Mach 1). Cuando esta onda alcance a un observador, este oírán el estampido sónico.⁹

⁷ Sin embargo, el movimiento puramente inercial es raro de observar, pues en el universo ninguna masa escapa a la acción gravitatoria de otras masas. La importancia reside en que este movimiento "sería" el que existiría en caso de ausencia de esas masas, por lo que la desviación del movimiento real respecto al inercial nos permite calcular, indirectamente, la presencia de tales masas. Así se han descubierto algunos planetas, por ejemplo.

⁸ En la construcción, parece evidente que el avión no está a escala. Sin embargo, podemos pensar que sí lo está si imaginamos que simplemente el avión se encuentra en otro plano, mucho más cerca del observador (que mantiene siempre al avión enfocado en el primer plano) que el eje de abscisas.

⁹ Como el sonido no es más que una variación de la presión del aire, el cono es en realidad un sonido muy intenso (el estampido sónico). Si el avión fuese muy pequeño, solo habría un estallido. Pero como es grande, se diferenciarán dos o más conos (y se oirán dos o más estampidos), como mínimo el del morro y el de la cola.

4.3. Curva de persecución

El MRU es el movimiento más aburrido que existe. Ahora bien, la cosa se puede poner mucho más interesante si el móvil que sigue ese movimiento es perseguido por otro que también se mueve a velocidad de módulo constante, pero siempre hacia el primero, como cuando un perro persigue a un coche. La curva que se genera en esa persecución (Figura 6) recibe el original nombre de *curva de persecución*.

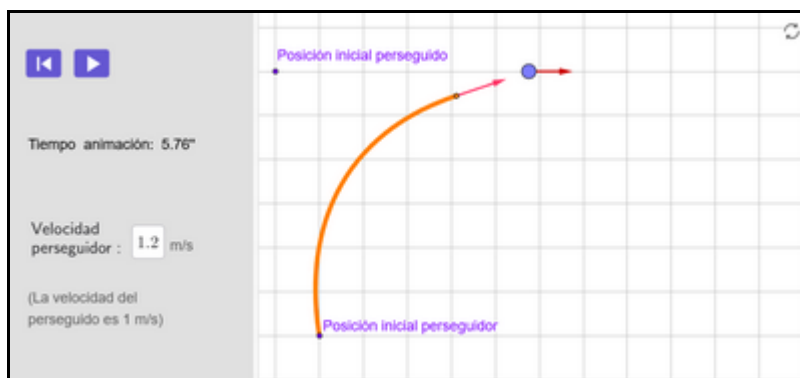


Figura 6. Curva de persecución
<https://www.geogebra.org/m/vuhyrghe>

Podemos advertir que mientras el perseguido mantiene su MRU a velocidad constante, el perseguidor varía en cada instante la dirección de su velocidad, por lo que, si bien su módulo es constante, no lo es su vector velocidad.

4.4. Problema de los ratones

Si añadimos un tercer punto y hacemos que los perseguidos sean también perseguidores, obtendremos el conocido problema de los ratones (Figura 7).

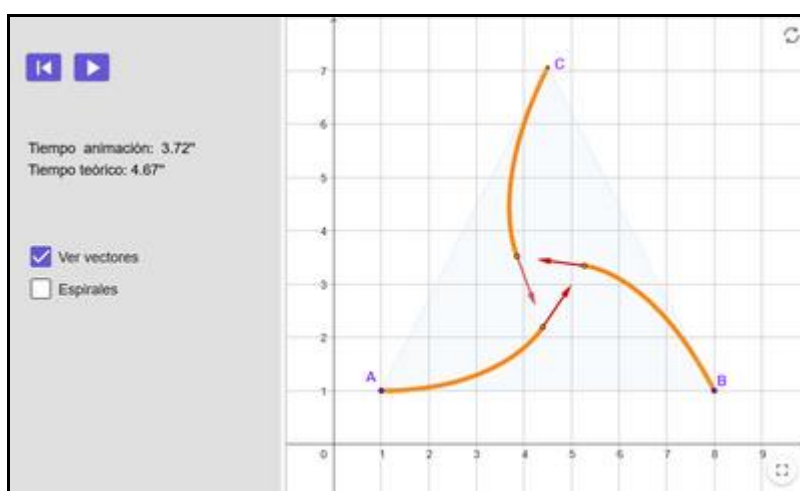


Figura 7. El problema de los ratones ("mice problem")
<https://www.geogebra.org/m/rx6baqvq>

Ahora hay tres puntos, que representan a los ratones, situados respectivamente en las posiciones iniciales, los vértices de un triángulo equilátero. A cada punto le corresponde el mismo módulo de velocidad constante (1 m/s), pero de modo que cada ratón se dirige en todo instante al que está a su derecha.

La curva que describe cada ratón es una de las curvas más frecuentes en la naturaleza, desde conchas hasta galaxias: la *espiral logarítmica*. Da igual que sean tres o más los ratones situados en los vértices de un polígono regular: en cualquier caso trazarán una espiral logarítmica, también llamada *equiangular* por el ángulo constante que forma la tangente en cualquier punto con la recta que lo une al centro (propiedad que comparte con la circunferencia). En el caso de estos tres ratones, este ángulo constante es de 30° (dejo al lector que averigüe por qué: basta observar la posición de partida de cada ratón).

4.5. Curva de persecución de Hathaway

Este problema fue planteado por el matemático estadounidense A. S. Hathaway, en 1920.

"Un perro en el centro de un estanque circular persigue a un pato que nada a lo largo del borde del estanque. Si el perro nada n veces más rápido que el pato, determinar la ecuación de la curva de persecución y la distancia que nada el perro hasta atrapar al pato."

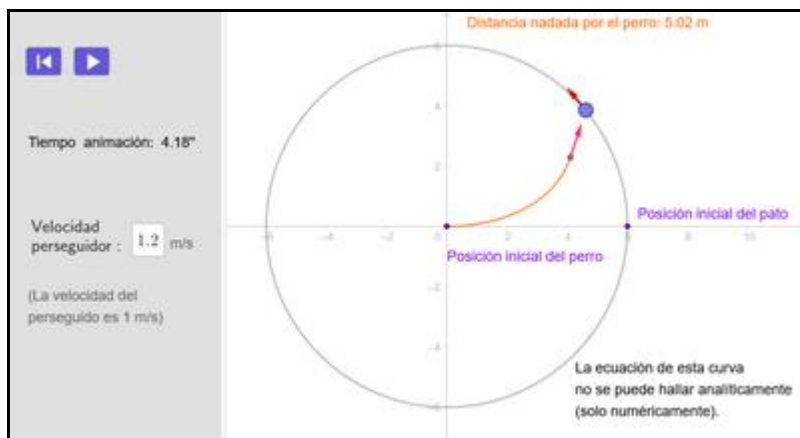


Figura 8. La curva de persecución de Hathaway
<https://www.geogebra.org/m/fcxdpcc4>

Aunque el enunciado no lo mencione explícitamente, podemos dar por supuesto que el pato en cuestión no solo nada a velocidad constante (en módulo), sino que además no sabe, no puede o no quiere, escapar volando...

Hathaway no pudo encontrar la ecuación de la curva. Nada extraño, pues la ecuación diferencial resultante no tiene solución analítica (solo puede ser resuelta numéricamente). Pero, con el procedimiento que estamos usando, nosotros podemos visualizar con GeoGebra esa curva (Figura 8) tan fácilmente como las anteriores, al tiempo que también podemos medir su longitud.

4.6. Movimiento Circular Uniforme (MCU)

Coloquemos un punto M (que representa una masa m) a cierta distancia de un punto O. Llamamos ω a una velocidad angular constante (en radianes) y sustituimos en el deslizador "anima" la anterior instrucción:

- Valor(M, M + dt v)

por esta otra:

- Valor(M, Rota(M, dt ω , O))

En consecuencia, M se desplazará (Figura 9) en un Movimiento Circular Uniforme (MCU) alrededor de O.¹⁰

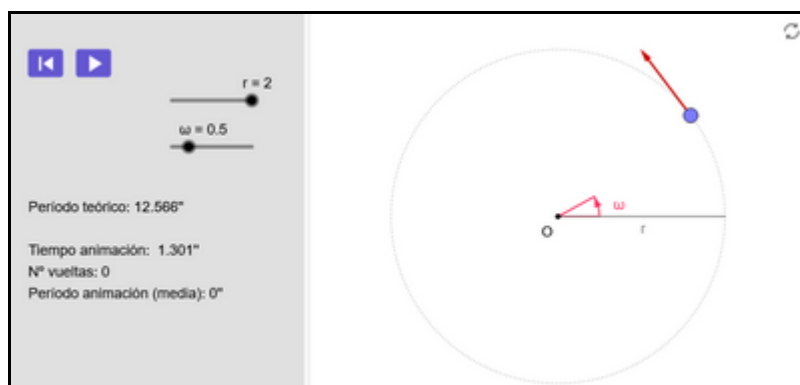


Figura 9. Movimiento Circular Uniforme (MCU)
<https://www.geogebra.org/m/gj4t8dfd>

Con esto ya habremos terminado la animación. Sin embargo, como ha sido demasiado sencillo, aprovecharemos esta construcción para detallar cómo crear un contador de vueltas y, sobre todo, cómo calcular el tiempo medio invertido en cada vuelta.

Para ello, definimos la lista libre reg y la lista de períodos regDif:

- $reg = \{0\}$
- $regDif = \text{Si}(\text{Longitud}(reg) \stackrel{?}{=} 1, \{reg(1)\}, \text{Secuencia}(reg(k) - reg(k+1), k, 1, \text{Longitud}(reg) - 1))$

Así, el tiempo medio de animación tras una vuelta completa, es decir, el período de la animación, vendrá dado por:

- $T = \text{media}(regDif)$

Hallamos la media T de todos los períodos registrados porque aunque todos ellos deberían ser teóricamente iguales, se producen pequeñas desviaciones en cada vuelta, pues la animación no sigue un movimiento continuo, sino a pequeños intervalos de tiempo dt .

¹⁰ Como el ángulo completo de una circunferencia es de 2π radianes, el período teórico ha de valer $2\pi / \omega$. En ese tiempo, M deberá recorrer la longitud de la circunferencia $2\pi r$, así que el módulo de la velocidad tangencial v (que aparece en la construcción) ha de ser igual a $2\pi r$ entre $2\pi / \omega$, es decir, $|v| = \omega r$.

Ahora basta añadir al guion del deslizador "anima" las instrucciones:

- Valor(reg, Si($y(M) < 0 \wedge y(\text{Rota}(M, dt \omega, O)) \geq 0$, Añade(t, reg), reg))
- Valor(vueltas, Si($y(M) < 0 \wedge y(\text{Rota}(M, dt \omega, O)) \geq 0$, vueltas + 1, vueltas))

El símbolo $\wedge$ (o su equivalente &&) corresponde al operador lógico "Y". Por su parte, el operador $y(M)$ recoge la ordenada del punto M. De este modo, la condición:

- $y(M) < 0 \wedge y(\text{Rota}(M, dt \omega, O))$

se hace verdadera cuando la ordenada de M pasa de ser negativa a positiva, completando un ciclo.

4.7. MCU en polares

En vez de usar el comando Rota, podemos usar coordenadas polares. En las coordenadas polares $P(r; \alpha)$, r corresponde a la longitud del segmento OP y α corresponde al ángulo (entre 0° y 360°) que forma OP con el Eje X.

Para evitar confusiones, GeoGebra separa las coordenadas polares usando el "punto y coma" en vez de la "coma". Por ejemplo, el punto $P(0, -3)$ es el mismo que $P(3; 270^\circ)$.

Para obtener las coordenadas cartesianas de un punto P, debemos usar $x(P)$ e $y(P)$. Para obtener sus coordenadas polares, usamos $\text{abs}(P)$ y $\text{arg}(P)$.¹¹

Las coordenadas polares resultan especialmente útiles en los movimientos rotatorios, pues el punto $P(r; \alpha)$, al variar α , describe una circunferencia de radio r centrada en el origen.

Así que si en el MCU de la construcción anterior, con velocidad angular constante ω , O es el origen de coordenadas, entonces el punto M tiene por coordenadas polares $(r; t \omega)$. Por lo tanto, podemos mover M con la instrucción:

- Valor(M, (r; t ω))

El ángulo que forma M con el origen se obtiene con $\text{arg}(M)$.

Si queremos generalizar al caso en que O no sea el origen de coordenadas, basta sumar sus coordenadas:

- Valor(M, O + (r; t ω))

En tal caso, el ángulo que forma M con el origen de coordenadas se obtiene con $\text{arg}(M - O)$.

Enlace a la construcción: <https://www.geogebra.org/m/zfxfd9n>

¹¹ En realidad, $\text{arg}(P)$ devuelve un ángulo entre -180° y 180° , correspondiendo los valores negativos a los ángulos mayores de 180° .

5. Aceleración

5.1. Aceleración centrípeta del MCU. Segunda ley de Newton

Hemos visto cómo la masa m , representada por el punto M, se desplazaba en un Movimiento Circular Uniforme alrededor del punto O, es decir, a una distancia r con una velocidad angular ω constante. También aparecía (nota al pie nº 10) una velocidad tangencial $\mathbf{v}$, cuyo módulo, $|\mathbf{v}|$, vale la constante ωr .

Pero que $\mathbf{v}$ tenga módulo constante no quiere decir que la velocidad $\mathbf{v}$ sea constante, ya que su dirección no lo es. Esto significa que ha de existir una fuerza (la rigidez del cuerpo, la tensión de la cuerda, la gravedad u otra) que obligue a la masa m a mantener el movimiento circular. De otro modo, como hemos visto, seguiría un MRU, por inercia.

Esa fuerza se conoce como fuerza centrípeta, porque su dirección y sentido es hacia el centro de la circunferencia. Esta fuerza provoca una aceleración centrípeta $\mathbf{c}$, representada por el vector verde (Figura 10). El módulo de esta aceleración es exactamente el necesario para mantener a la masa en el movimiento circular y evitar que, por inercia, siga un movimiento rectilíneo.

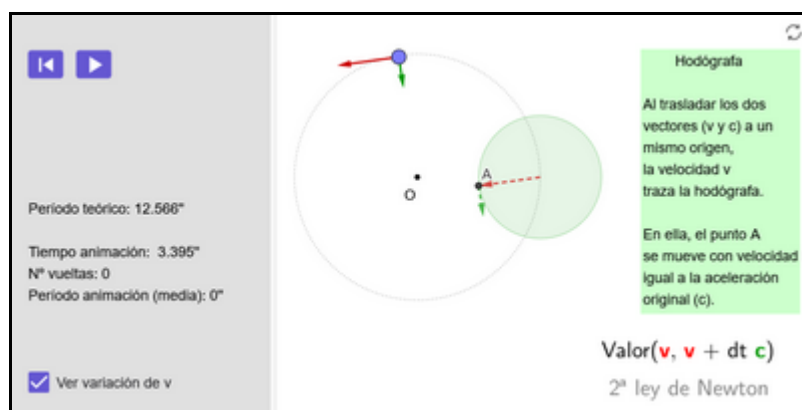


Figura 10. Aceleración centrípeta
<https://www.geogebra.org/m/rryyhqud>

Si nosotros ocupamos la posición del punto M, notaremos una fuerza que tiende a despegarnos del recorrido circular, a "salirnos por la tangente" (literalmente). Esa fuerza aparente (es decir, ficticia) recibe el nombre de "fuerza centrífuga", pero no es más que nuestra percepción de la resistencia que ofrece la inercia a la fuerza centrípeta real.

Para observar mejor la relación entre la aceleración $\mathbf{c}$ y la velocidad $\mathbf{v}$, podemos crear un diagrama que se conoce como *hodógrafa* del movimiento.¹²

Observa que los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{v}$ determinan completamente el movimiento de M. En la animación, cada vez que el tiempo avanza "un poquito", la velocidad pasa a valer $\mathbf{v} + dt \mathbf{c}$ (2ª ley de Newton), con lo que la posición de M pasa a ser $M + dt \mathbf{v}$.

¹² En la hodógrafa, el punto A recorre $2\pi |\mathbf{v}|$ en cada vuelta, es decir, cada $T = 2\pi / \omega$ segundos. Como A avanza a velocidad $\mathbf{c}$ (la aceleración es la velocidad de cambio de la velocidad), tenemos que $|\mathbf{c}| = 2\pi |\mathbf{v}| / T = \omega |\mathbf{v}| = \omega^2 r = \mathbf{v}^2 / r$.

5.2. Gravedad

Toda masa altera la geometría del espacio en donde se encuentra, provocando la aparición de un pozo gravitatorio. Este pozo atrae todo lo que la rodea hacia su centro de masas, con una aceleración que llamamos *aceleración gravitatoria* o simplemente *gravedad*.

En el caso de la Tierra, su masa provoca la aparición de una fuerza gravitatoria cuya aceleración denotamos por $\mathbf{g}$. Por lo tanto, $\mathbf{g}$ es un vector cuya dirección y sentido es hacia el centro de la Tierra, y cuyo módulo depende de la distancia al centro de la Tierra.

Para masas situadas en el espacio, el módulo de $\mathbf{g}$ viene dado por la conocida fórmula de Newton, que lo iguala a $G m_T / d^2$, donde G es la constante de gravitación universal, m_T es la masa de la Tierra y d la distancia a la que nos encontremos del centro de la Tierra.

Ese valor es máximo en la superficie terrestre, desciende progresivamente al alejarnos de la Tierra y, en principio, también desciende al adentrarnos en ella, hasta hacerse nulo en el centro de la Tierra. Es así porque, a medida que viajamos hacia el centro de la Tierra, por debajo de la superficie terrestre, la atracción de la capa de masa terrestre ya atravesada es nula (es suma de fuerzas que, por simetría, se cancelan mutuamente), así que la masa terrestre a tener en cuenta se va reduciendo. Como la masa disminuye proporcionalmente al volumen, y este con el cubo de la distancia, el valor de la gravedad disminuye linealmente (parte recta de la gráfica amarilla en la Figura 11).

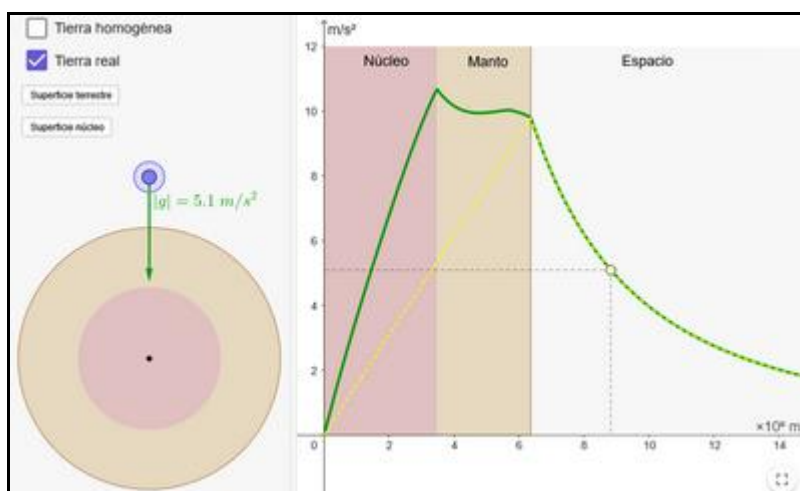


Figura 11. Aceleración gravitatoria
<https://www.geogebra.org/m/bkkfqufa>

Esta disminución sería realmente lineal si la Tierra fuera una esfera homogénea. Sin embargo, la densidad de la Tierra no es constante, lo que provoca que el descenso no sea lineal (gráfica verde). También provoca que la gravedad no

alcance su máximo en la superficie terrestre sino en la superficie del núcleo, más denso que el resto.¹³

En las siguientes construcciones, supondremos que estamos cerca de la superficie terrestre ($d = r$, siendo r el radio medio de la Tierra), por lo que aproximaremos el valor del módulo de $\mathbf{g}$ a unos $9,81 \text{ m/s}^2$.

5.3. Péndulo cónico y MCU

En el caso del *péndulo cónico* (Figura 12) la masa m , representada por el punto M, pende de un hilo (de masa despreciable) desde el punto A. La aceleración centrípeta $\mathbf{c}$ viene dada como la componente horizontal de la tensión del hilo, cuya componente vertical compensa la gravedad $\mathbf{g}$.

Tanto $\mathbf{v}$ como $\mathbf{c}$ tienen módulos constantes que solo dependen de la velocidad angular ω y el radio r . La velocidad angular ω viene determinada únicamente por la altura h del cono. Cuanto menor sea la altura, mayor será la velocidad angular (y, por lo tanto, menor el período). Sin embargo, variar el radio de la circunferencia no afecta a la velocidad angular (ni al período), solo afecta al módulo de la velocidad tangencial $\mathbf{v}$.

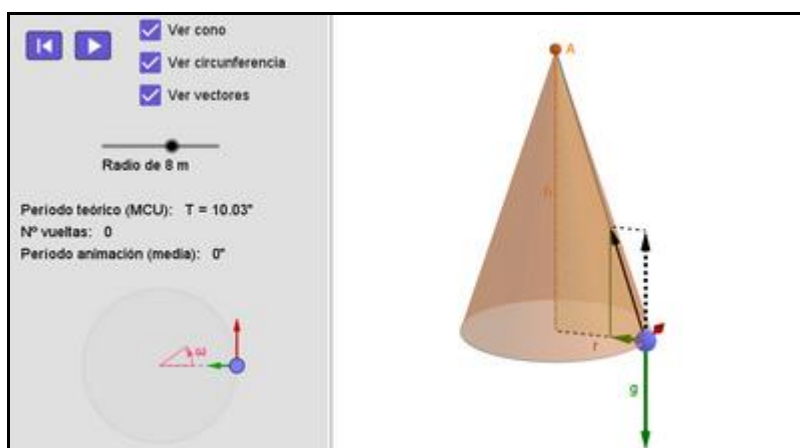


Figura 12. Péndulo cónico
<https://www.geogebra.org/m/yxggmhfr>

No se puede conseguir altura nula, por mucha resistencia que tenga el hilo, ya que su tensión siempre ha de contar con una componente vertical que compense la gravedad.¹⁴

¹³ Como el radio de la Tierra es inferior en los polos que en el ecuador, el módulo de $\mathbf{g}$ es mayor en los polos. Pero, además, a medida que nos desplazamos de los polos al ecuador, una parte (pequeña, pero progresivamente mayor) de la aceleración gravitatoria no incide en el peso de la masa, sino que funciona como aceleración centrípeta (o, dicho de otro modo, ha de compensar la ficticia "aceleración centrífuga"). Esto evita que la masa se despegue de la superficie terrestre, algo que no es necesario en los polos, donde la aceleración centrípeta es nula. Como consecuencia de ambos factores, las masas pesan alrededor de un 0,5% más en los polos que en el ecuador.

¹⁴ Si la altura fuese cero, el período sería cero, y tanto la velocidad angular como la tangencial serían infinitas.

6. Movimiento Uniformemente Acelerado

6.1. Fórmula 1

En esta construcción, que simula un sencillo videojuego, la velocidad del coche depende del resultado de imprimir una aceleración que podemos variar con un deslizador (que también sirve para frenar, pues admite valores negativos). El objetivo es completar una vuelta al circuito en el menor tiempo posible, sin salirse de la pista.

Si, al ponerse en verde el semáforo, activamos la casilla "Vuelta de reconocimiento", la aceleración se fijará en un valor constante (0,06), con lo que el coche entrará en un Movimiento Uniformemente Acelerado, completando cada vuelta en un tiempo menor (hasta salirse de la pista, como muestra la Figura 13).¹⁵

El rastro poligonal del coche permite observar que en cada vuelta no sigue un recorrido prefijado, sino que su trayectoria obedece en cada instante al estado puntual de los vectores de velocidad y aceleración.



Figura 13. El efecto de una aceleración constante
<https://www.geogebra.org/m/ryu4he4c>

6.2. Caída libre. Segunda ley de Newton

Una masa, representada por el punto azul, cae desde la posición inicial. Tal como descubrió Galileo¹⁶, en su famoso experimento mental de Pisa, el tiempo de caída no depende de la masa. En un razonamiento por reducción al absurdo, supuso que una masa pesada cayese más deprisa que una ligera. En tal caso, al atarlas a ambos extremos de una cuerda, la masa ligera quedaría rezagada en su caída, hasta tensar la cuerda y frenar la caída de la pesada. Pero esto es absurdo,

¹⁵ En la construcción, el coche (o la pista) no está a escala.

¹⁶ Galileo también descubrió la ley que sigue este movimiento, es decir, el espacio e recorrido en un tiempo t . Podemos llegar a ella, de un modo informal, mediante este razonamiento. Sabemos que la velocidad que tiene M después de pasar el tiempo t es $g t$. Al inicio, M tenía velocidad nula. Como la velocidad siempre crece al mismo ritmo (pues g es constante), la velocidad media será $(0 + g t) / 2$. Entonces $e = v t = g t^2 / 2$.

pues el conjunto de ambas masas (más la cuerda), al pesar más que la masa pesada, debería caer todavía más rápido.

En esta construcción (Figura 14) podemos ver la caída en la Tierra, sin considerar la resistencia del aire, y en la Luna. Cada vez que pase un breve lapso¹⁷, una cantidad de tiempo dt muy pequeña, por definición de aceleración, la velocidad aumenta $dt \mathbf{g}$. Así de sencillo. Basta, pues, añadir al guion del deslizador "anima" la instrucción (2ª ley de Newton):

- Valor(v , $v + dt \mathbf{g}$)

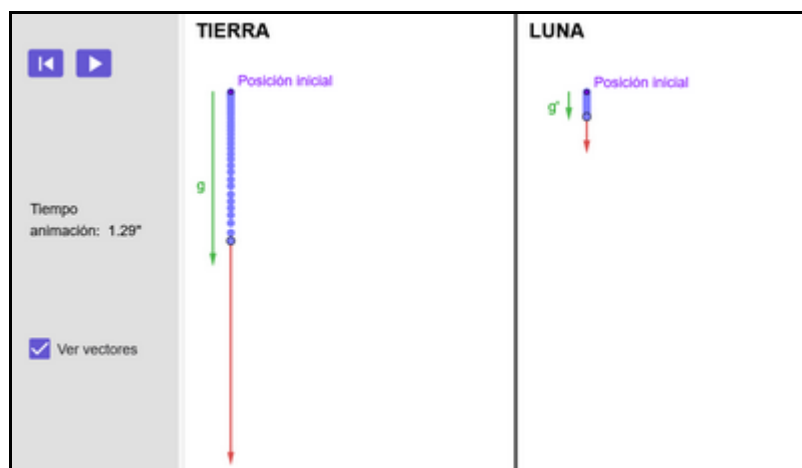


Figura 14. Caída libre en la Tierra y en la Luna
<https://www.geogebra.org/m/m2f8mzzy>

6.3. Lanzamiento vertical

Ahora la diferencia con respecto a la caída libre es que el valor inicial de $\mathbf{v}$ no es $(0, 0)$, sino de tipo $(0, v_y)$. Por ejemplo, $(0, 2)$.

Por lo demás, el procedimiento sigue siendo el mismo. Recapitulemos: después de usar el reloj para establecer pequeñas diferencias de tiempo dt , la animación, en cada paso, solo hace uso esencialmente de estas dos instrucciones:

- Valor($\mathbf{v}$, $\mathbf{v} + dt \mathbf{g}$)
- Valor($\mathbf{M}$, $\mathbf{M} + dt \mathbf{v}$)

Enlace a la construcción: <https://www.geogebra.org/m/bjetgwhk>

6.4. Movimiento parabólico

Podemos considerar el movimiento parabólico (Figura 15) como combinación del MRU horizontal con el de lanzamiento vertical, pues cada uno no influye en el otro. Algebraicamente, esto sucede porque la primera coordenada del vector aceleración $\mathbf{g}$ es nula (Figura 15).

¹⁷ No es casualidad que podamos denominar *lapso* a la cantidad de tiempo dt , pues esta palabra deriva etimológicamente de la caída del agua, en un intervalo de tiempo, en una *clepsidra* (literalmente, "robo de agua", reloj de agua).

Este es el *principio del movimiento compuesto*, establecido por Galileo en 1638, y utilizado por él para demostrar la forma parabólica¹⁸ del movimiento de proyectiles: "las componentes horizontal y vertical de la velocidad de un proyectil son independientes entre sí".

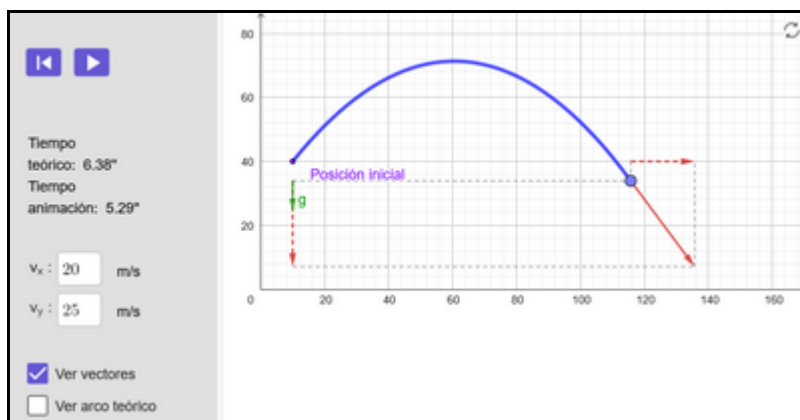


Figura 15. Movimiento parabólico
<https://www.geogebra.org/m/hqkyxckc>

Como consecuencia, en la construcción, la abscisa que alcanzará la masa al llegar al eje X será la misma que si no hubiese caída y siguiese rectilínea en un movimiento uniforme.

6.5. El mono y el cazador

Este experimento mental sitúa a un cazador apuntando un tirachinas¹⁹ directamente a un mono. En el mismo instante en que dispara, el mono se deja caer del árbol. Mala decisión. Como hemos visto, descomponiendo el movimiento de la pelota en dos movimientos (horizontal y vertical), la pelota no sigue un movimiento rectilíneo porque en cada instante cae verticalmente exactamente igual que lo hace el mono. De hecho, si el mono mira a la pelota en todo momento, verá que se acerca directamente hacia él, en movimiento (que él ve) completamente rectilíneo, pues ambos caen al mismo tiempo. Así que cuando haya pasado el tiempo necesario para recorrer la distancia horizontal que separa al cazador del mono, la pelota y el mono se encontrarán (Figura 16).

Por eso, en la realidad, para darle al mono sin que este abandone su posición inicial, el cazador debe o bien apuntar por encima de él, o bien, como es lo habitual en muchas armas, corregir el ángulo de tiro mediante el ajuste del alza de mira.

¹⁸ Estrictamente hablando, este movimiento no es parabólico sino elíptico. Para que fuera realmente parabólico, o bien la aceleración gravitatoria g debería ser exactamente constante o bien la velocidad inicial v_0 debería ser igual a la velocidad de escape de la Tierra (unos 40.280 km/h). Ahora bien, cerca de la superficie terrestre y para velocidades pequeñas, podemos suponer, como venimos haciendo, que el módulo de g se mantiene constante (unos 9,81 m/s²), con lo que el arco elíptico es prácticamente idéntico al parabólico.

¹⁹ En el enunciado original, el cazador usa un rifle. Para ver mejor la animación (la velocidad de la munición es demasiado alta en comparación con la distancia a recorrer) he sustituido la bala por una pelota de goma lanzada con tirachinas, lo que claramente beneficia al mono (de nada). En la sección 11 ("Escalas de tiempo") veremos que, alternativamente, habiéramos podido escalar el tiempo (en este caso, para ralentizar el movimiento).

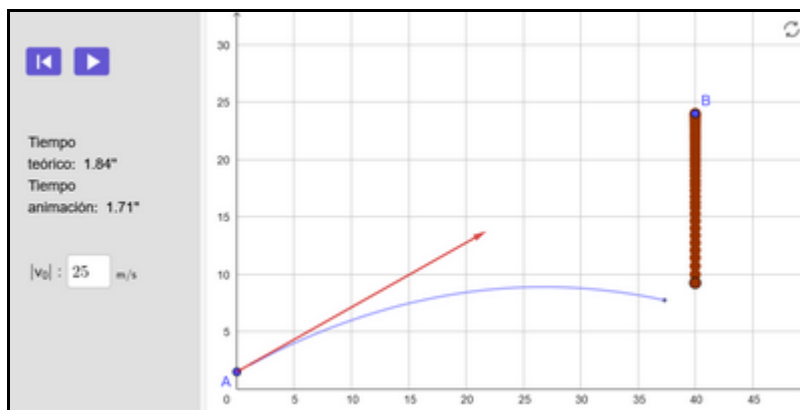


Figura 16. El experimento mental del mono y el cazador
<https://www.geogebra.org/m/fpuanxke>

6.6. Rebotes de una pelota. Tercera ley de Newton

En este ejemplo, el guion del deslizador "anima" es algo más largo debido a los cambios a los que hay que someter a la velocidad y posición de la pelota en las cercanías del suelo y paredes donde rebota (*principio de acción y reacción*, tercera ley de Newton). Como la pelota avanza a intervalos de tiempo dt , podemos observar que el punto exacto del rebote no siempre coincide con el punto real del impacto. La instrucción que genera un rebote con el suelo es:

- Valor(v , ($x(v)$, $-y(v)$))

En la construcción (Figura 17), se visualizan dos situaciones: caída libre o con velocidad inicial. Para cada una, podemos fijar el Coeficiente de Restitución (C_R).

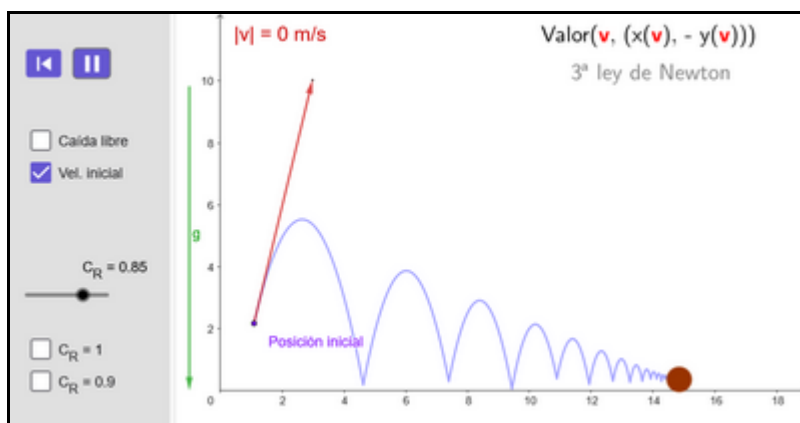


Figura 17. Progresión geométrica de las alturas en los rebotes de una pelota
<https://www.geogebra.org/m/pntenacs>

Para $C_R = 1$ (choque elástico) la pelota es de elasticidad perfecta. Esto significa que la pelota, en cada rebote con el suelo, alcanzará siempre la misma altura máxima.

Para valores de menores C_R que la unidad, la pelota pierde energía al chocar, por lo que en cada rebote con el suelo la altura de la pelota disminuye en progresión geométrica de razón C_R , hasta finalmente detenerse.

6.7. Caída por un plano inclinado

Una masa, representada por el punto azul M, se encuentra en un plano inclinado (lo que incluye la distancia del centro de masas al plano) entre el punto inicial A y el punto final B.

El vector $\mathbf{g}$ (en línea verde discontinua, Figura 18) se puede descomponer como suma de dos: uno paralelo al plano inclinado ($\mathbf{gt}$) y otro perpendicular a él. Este otro vector no interviene en el movimiento porque su efecto queda anulado por la resistencia de la rampa, siguiendo el principio de acción y reacción (tercera ley de Newton). Observemos en el esquema que el triángulo rectángulo de hipotenusa $|\mathbf{g}|$ y cateto $|\mathbf{gt}|$ es semejante al de hipotenusa c y cateto vertical b . Así que $|\mathbf{g}| / |\mathbf{gt}| = c / b$.

Adecuamos el guion del deslizador "anima":

- Valor(v , $v + dt \, gt$)

Podemos variar las posiciones de A y B. Tras minuciosas observaciones, Galileo descubrió que el tiempo del recorrido de la masa en el plano inclinado es el mismo que el de caída libre por el factor de proporción entre las distancias recorridas (longitud de la rampa entre su altura).²⁰

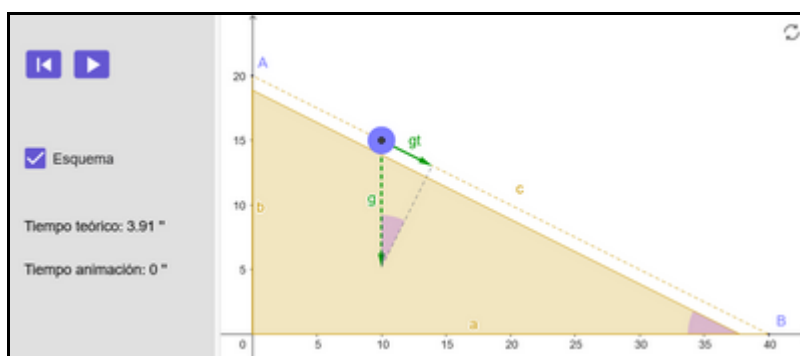


Figura 18. Esquema de la caída por un plano inclinado
<https://www.geogebra.org/m/k6hta953>

6.8. Caída por una esfera

Ahora la masa se encuentra en la semiesfera superior de una esfera de radio r (lo que incluye la distancia del centro de masas a la superficie esférica).

El movimiento seguido por M se compone de dos tramos. En el primero, cae por la circunferencia (una sección vertical) de la esfera en un movimiento circular (no uniforme, sino uniformemente acelerado). En el segundo, se despegue de la

²⁰ Esto es así porque, en cada instante, la velocidad de caída es la misma en ambos movimientos (esta velocidad solo depende de la altura: la masa del plano inclinado tarda más que en caída libre, pero también recorre más), así que, si t_0 es el tiempo en caída libre, $|\mathbf{gt}| \, t = |\mathbf{g}| \, t_0$, es decir, $t = |\mathbf{g}| / |\mathbf{gt}| \, t_0 = c / b \, t_0$. Habíamos visto en la caída libre que el espacio que descendía era igual $|\mathbf{g}| / 2 \, t_0^2$, siendo t_0 el tiempo de descenso. Por tanto, si la masa cayese libremente desde A, recorrería $b = |\mathbf{g}| / 2 \, t_0^2$. Es decir, el tiempo t_0 de caída libre sería igual a la raíz cuadrada de $2b / |\mathbf{g}|$. Como siguiendo el plano inclinado recorre c en vez de b , hay que multiplicar por el factor c / b , así que el tiempo de recorrido será igual a c por la raíz cuadrada de $2 / b \, |\mathbf{g}|$.

superficie esférica para pasar a un movimiento de caída libre con la velocidad inicial que tenga en el instante de separación.

El vector $\mathbf{g}$ (en línea verde discontinua, Figura 19) se puede descomponer como suma de dos: uno tangente a la esfera, $\mathbf{g}_t$, y otro perpendicular a ella, $\mathbf{g}_n$. Este último vector no interviene en el movimiento, como hemos visto en la construcción anterior del plano inclinado, pero es clave para determinar en qué punto la masa se despega de la esfera y diferenciar así ambos tramos. Esto es todo lo que necesitamos para escribir el guion del deslizador "anima".

Cuando el módulo de $\mathbf{g}_n$ sea menor que el de la aceleración centrípeta, esa componente de la gravedad será insuficiente para mantener a la masa pegada a la esfera, así que esta abandonará el movimiento circular para iniciar, en el segundo tramo, un movimiento de caída libre con velocidad inicial igual a la que llevaba en el momento de despegarse.²¹

En la construcción, he centrado la esfera en el origen de coordenadas. La posición inicial puede ser cualquier punto del arco del primer cuadrante.²²

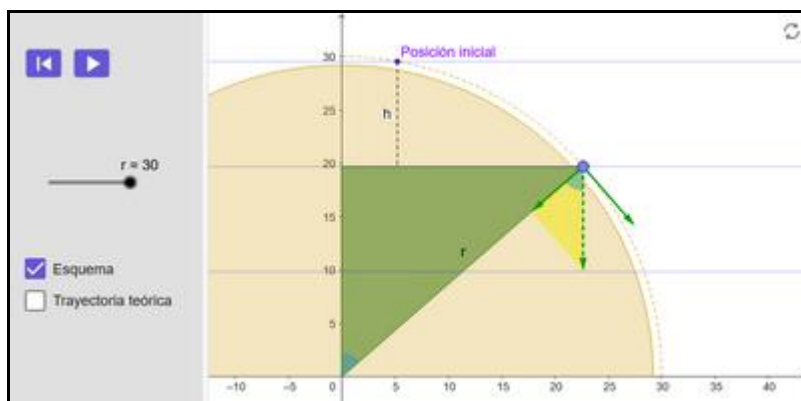


Figura 19. Esquema de la caída por una esfera
<https://www.geogebra.org/m/j8krqsg>

Podemos comprobar en la construcción que el primer tramo siempre corresponde a la tercera parte de la altura inicial. No importa la masa, el radio de la esfera, o incluso el valor de la gravedad. La masa (en caída sin rozamiento) se mantendrá pegada a la esfera siempre durante 1/3 de la altura inicial.²³

²¹ Recordemos que, tal como hemos visto en el apartado de la aceleración centrípeta del MCU, para que la masa no se despegue de su recorrido circular es necesario aplicar una aceleración mayor o igual que esa aceleración centrípeta, cuyo módulo valía v^2/r , siendo v la velocidad tangencial. La condición entonces para permanecer en el primer tramo es $|\mathbf{g}_n| > v^2/r$.

²² En realidad, ese arco no corresponde a 90°, sino a 89.99°. El motivo es impedir que se elija 90° como posición inicial (el "polo norte" de la esfera), ya que en tal caso la masa estaría en equilibrio (inestable), pues $\mathbf{g}_t$ sería nula y no comenzaría el movimiento.

²³ Para demostrarlo, activemos la casilla "Esquema". La masa ha descendido una altura h desde su posición inicial, situada a una altura h_0 . El triángulo rectángulo amarillo, de hipotenusa $|\mathbf{g}|$ y cateto $|\mathbf{g}_n|$ es semejante al verde, de hipotenusa r y cateto $h_0 - h$. Así que $|\mathbf{g}_n|/|\mathbf{g}| = (h_0 - h)/r$. Sabemos que, en el momento de despegarse, se ha de cumplir $|\mathbf{g}_n| = v^2/r$. Además, como el módulo de la velocidad (recordemos que es la misma que en la caída libre) era la raíz cuadrada de $2|\mathbf{g}|h$, tenemos que $|\mathbf{g}_n| = 2|\mathbf{g}|h/r$, es decir, $|\mathbf{g}_n|/|\mathbf{g}| = 2h/r$. Igualando las dos igualdades anteriores, $(h_0 - h)/r = 2h/r$, de donde $h = h_0/3$.

7. Movimiento Armónico Simple (MAS)

7.1. MAS de un resorte horizontal

Una masa m , representada por el punto azul M, se encuentra en el extremo de un resorte o muelle de elasticidad constante k .

Al iniciarse, la construcción muestra el punto M en estado de reposo: el resorte no ejerce ninguna fuerza sobre él. Arrastramos M hacia la derecha para estirar el resorte. La distancia que lo arrastremos determinará la amplitud. Comprobemos que, según arrastremos M, el período teórico no varía, pues no depende de la amplitud. El motivo es que a mayor amplitud, mayor será la fuerza restauradora del resorte, así que al final M recorrerá cada oscilación en el mismo tiempo (demostraremos este isocronismo en el siguiente apartado).

Esa separación de la posición de reposo hará que el resorte se resista, apareciendo una aceleración a (en verde, Figura 20) cuyo sentido es siempre hacia el punto de reposo. Esta aceleración no es constante, sino que, en cada posición de M, es proporcional a la distancia x de M al punto de reposo (ley de Hooke).

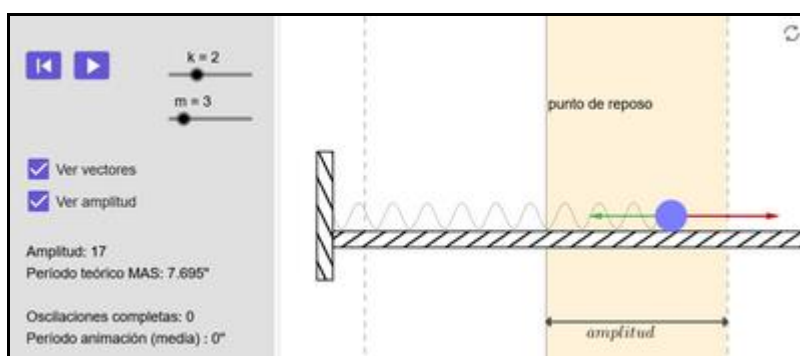


Figura 20. Movimiento Armónico Simple (MAS)

<https://www.geogebra.org/m/wknympjw>

La aceleración a provoca que M adquiera una velocidad variable v (en rojo). Su módulo es proporcional a la elasticidad k y a la distancia x , e inversamente proporcional a la masa m . Es decir, $|a| = k / m x$.²⁴

Así que adecuamos a esta situación el guion del deslizador "anima":

- Valor(v , $v + dt a$)

7.2. MAS y MCU: isocronismo

El Movimiento Armónico Simple se puede ver como una proyección de cierto Movimiento Circular Uniforme. Veamos cuál. Como se trata de una demostración formal, esta vez incluiré los cálculos teóricos en el texto principal.

La siguiente construcción está diseñada para que el punto verde (Figura 21) siga un MCU alrededor de O, pero siempre en la misma vertical que el punto azul M.

²⁴ Sabemos que la fuerza del resorte es, por un lado, igual a la masa por la aceleración: $m |a|$, y por otro lado, proporcional a la distancia x recorrida: $k x$. De aquí se deduce que $|a| = k / m x$.

Esto conlleva que el radio de la circunferencia ha de ser igual a la amplitud A del MAS. La aceleración centrípeta de este MCU es $\mathbf{c}$ (vector verde discontinuo), cuyo módulo hemos visto que vale $\omega^2 A$.

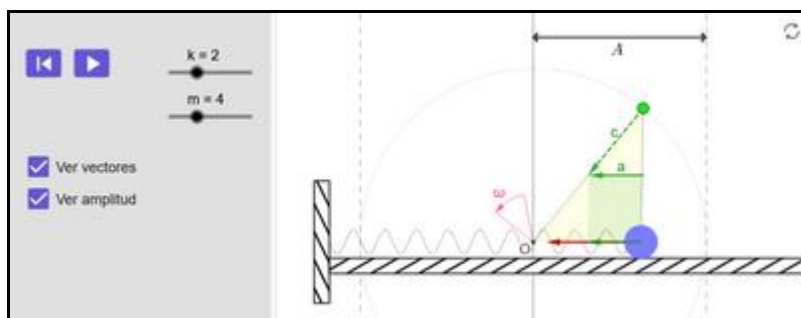


Figura 21. El MAS como proyección del MCU
<https://www.geogebra.org/m/h72fydyv>

Pues bien, para que el punto verde se mantenga siempre en la misma vertical que M, la componente horizontal de $\mathbf{c}$ debe ser precisamente la aceleración $\mathbf{a}$ del MAS. Esto es así porque el triángulo de hipotenusa $\mathbf{c}$ y cateto $\mathbf{a}$ ha de ser semejante al de hipotenusa A y cateto x , tal como muestra la construcción.

Debido a esta semejanza de triángulos, tenemos que $|\mathbf{a}| / |\mathbf{c}| = x / A$, es decir $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}| x / A = \omega^2 x$.

Pero también sabíamos que $|\mathbf{a}| = k / m x$, así que ha de cumplirse $\omega^2 = k / m$, por lo que la velocidad angular ω del MCU ha de valer la raíz cuadrada de k / m y el período ha de ser $T = 2\pi / \omega$, es decir, igual a 2π veces la raíz cuadrada de m / k . Como M da una oscilación completa cada vez que el punto verde da una vuelta, el período de ambos movimientos ha de ser el mismo.

Deducimos entonces que el período del MAS no depende de la amplitud A , solo depende de la masa m y la elasticidad k . Para un resorte de elasticidad k , la masa m siempre tardará lo mismo en realizar una oscilación completa. Esta propiedad se denomina isocronismo.

7.3. MAS y MCU: proyección múltiple. Recurrencia

Podemos proyectar el punto que describe el MCU sobre cualquier diámetro del círculo. El punto obtenido seguirá siempre un MAS. Si proyectamos sobre los diámetros horizontal y vertical, obtenemos el diagrama familiar con el que explicamos las funciones coseno y seno en la *circunferencia goniométrica*.

Pero se produce un curioso efecto al realizar la proyección sobre *todos* los diámetros. Los puntos obtenidos conformarán, cada uno recorriendo su diámetro con MAS, un nuevo círculo con la mitad de radio, que gira en el interior del círculo mayor (Figura 22). Y a su vez, un punto que describa un MCU en este nuevo círculo, al proyectarse sobre todos sus diámetros, creará un nuevo círculo...

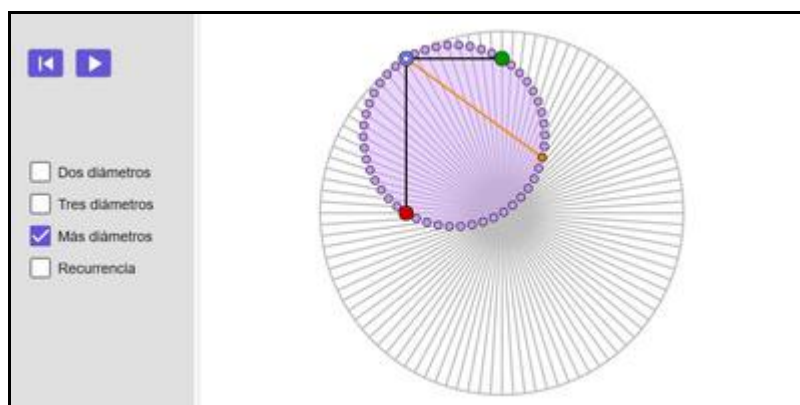


Figura 22. Proyección múltiple del MCU
<https://www.geogebra.org/m/g8hfvrww>

7.4. Curvas de Lissajous. Armonógrafo

Al combinar dos MAS con direcciones perpendiculares, con el mismo período y en la misma fase, obtenemos un segmento recto. Si los desfasamos, obtenemos elipses. Si además tienen distinto período, obtenemos las curvas o figuras de Lissajous.

Como veremos más adelante, el movimiento de un péndulo con amplitud suficientemente pequeña es prácticamente idéntico al MAS. Por tanto, la acción combinada de dos péndulos perpendiculares también producen las figuras de Lissajous. Estos dispositivos se denominan *armonógrafos*.

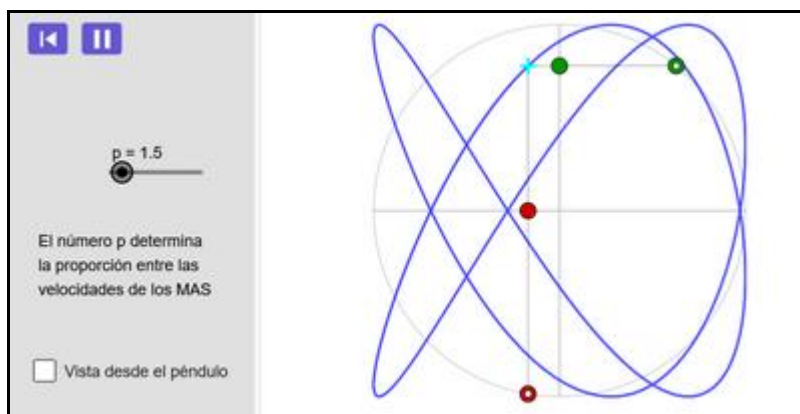


Figura 23. Una figura de Lissajous generada por dos MAS perpendiculares
<https://www.geogebra.org/m/bxtywnbz>

8. Péndulos

8.1. Péndulo simple

Si en este artículo tuviera que limitarme a mostrar una única animación que ejemplifique el uso del deslizador "anima", elegiría esta. En ella se puede apreciar el

contraste entre la sencillez de la construcción y la dificultad superada, pues el movimiento pendular es mucho más complicado que el MAS.

Esta animación simula el movimiento de un péndulo simple en tiempo real, despreciando el peso de la varilla y el rozamiento. Tal como hemos venido haciendo, la animación no hace uso de fórmulas (ni trigonometría ni ecuaciones ni cálculo diferencial), solo realiza las variaciones necesarias en los vectores que dirigen el movimiento.

Una masa, representada por el punto azul, se encuentra en el extremo de la varilla, cuya posición inicial se puede colocar en cualquier lugar de la parte izquierda de la circunferencia, hasta una amplitud²⁵ de 175°.

La animación varía en cada instante tanto el vector velocidad $\mathbf{v}$ (en rojo, Figura 24) como la posición M de la masa, debido a la acción de la gravedad, cuya aceleración constante está representada por el vector $\mathbf{g}$ (en línea verde discontinua). Este vector se puede descomponer como suma de dos: uno perpendicular a la varilla (en verde, $\mathbf{g_t}$) y otro en la dirección de la varilla, que no interviene en el movimiento porque su efecto queda anulado por la rigidez de la varilla o, en el caso de un hilo, por la tensión del hilo (principio de acción y reacción, tercera ley de Newton).

Adecuamos el guion del deslizador "anima":

- Valor(v , $v_t + dt \, g_t$)

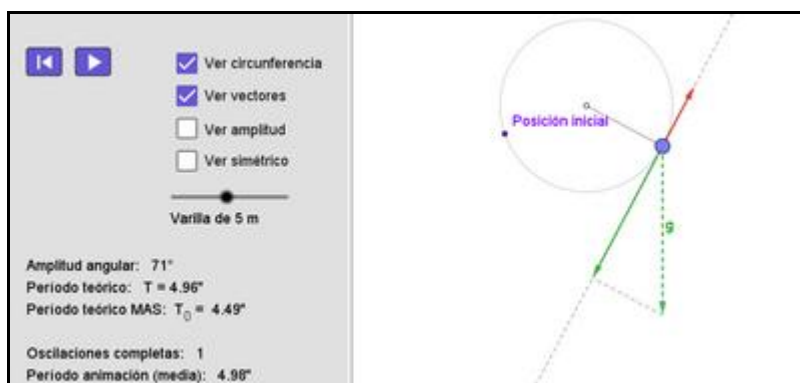


Figura 24. Péndulo simple (válido para grandes amplitudes angulares)
<https://www.geogebra.org/m/yndptf7f>

Observemos que $\mathbf{v_t}$ es un vector con el mismo módulo que $\mathbf{v}$, pero que conserva siempre la misma dirección perpendicular a la varilla; es necesario cambiar $\mathbf{v}$ por $\mathbf{v_t}$ ya que si sumásemos directamente $\mathbf{v}$ con $dt \, \mathbf{g_t}$, el vector $\mathbf{v}$ perdería paulatinamente esa perpendicularidad, pues la dirección de $\mathbf{v}$ un instante antes ya no es perpendicular a la varilla un instante dt después.

Observemos también que para amplitudes pequeñas (menores de 10°, aproximadamente), el período T es prácticamente constante e igual al período T_0 del movimiento armónico simple (MAS), como se mostrará en el siguiente apartado.

²⁵ Se llama *amplitud angular* al ángulo máximo que alcanza el péndulo respecto a la vertical.

El resultado se ajusta bastante bien a la realidad, incluso para amplitudes angulares grandes, para las que no es buena la aproximación del movimiento pendular al de un MAS, como se puede comprobar. A partir de 130° , el cálculo del período teórico conlleva trabajar con números demasiado elevados, por lo que GeoGebra no lo puede calcular algebraicamente con suficiente precisión, mientras que, en la animación, el período sigue ajustándose bastante bien al modelo ideal.²⁶

8.2. Péndulo simple y MAS

Una masa m , representada por el punto azul M, se encuentra en el extremo de la varilla, de longitud L (Figura 25). Al mismo tiempo que el péndulo oscila, un resorte activa el movimiento armónico simple, en horizontal, de la masa m , con la amplitud correspondiente a la amplitud angular del péndulo. Para ello, se toma para el resorte la constante de elasticidad $k = |g| / L m$.

Observa que cuando esta amplitud angular es pequeña, el período de oscilación del péndulo es casi idéntico al del movimiento armónico simple. Pero si variamos la posición inicial para que la amplitud angular sea mayor, los dos movimientos dejan de sincronizarse.

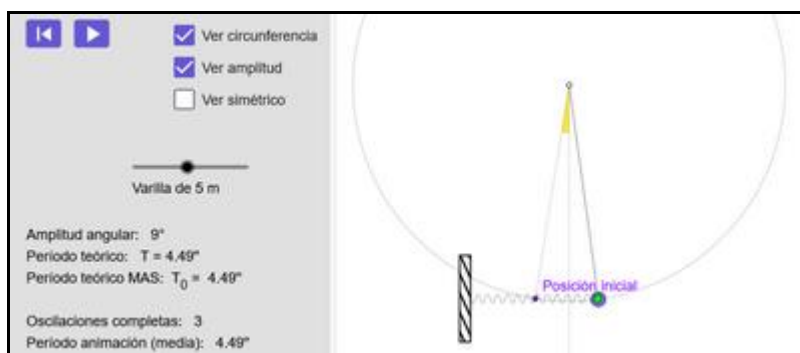


Figura 25. Péndulo simple y MAS
<https://www.geogebra.org/m/wvjbuy4k>

8.3. Péndulo de segundos

En el apartado anterior hemos comprobado que para amplitudes pequeñas (menores de 10° , aproximadamente), el período T es prácticamente constante e igual al período T_0 del Movimiento Armónico Simple (MAS).

Como este período T_0 del MAS es igual a 2π veces la raíz cuadrada de $L / |g|$, podemos calcular la longitud de la varilla para que ese período sea exactamente de 2 segundos (en cada oscilación, un segundo para la ida y otro para la vuelta). Este valor es igual a $|g| / \pi^2$, es decir, aproximadamente 0.994 metros.

Utilizando un péndulo de este tipo, se pudo, por primera vez en la historia, medir con bastante exactitud una cantidad de tiempo tan pequeña como un segundo. Como vemos, la longitud de la varilla es casi un metro exacto. No es

²⁶ Para amplitudes mayores de 175° , el período seguiría aumentando y tiende a infinito al acercarse la amplitud angular a 180° .

casualidad. Esta medida fue originalmente propuesta, a finales del siglo XVII, como medida estándar de longitud, hasta convertirse en nuestro metro actual, del que difiere en poco más de medio centímetro.

Veremos más adelante, en el apartado "Péndulo cicloidal", cómo Huygens se las ingenió para evitar la pequeña diferencia de tiempo entre el período del péndulo y el período del MAS, logrando construir relojes de péndulo precisos.

Enlace a la construcción: <https://www.geogebra.org/m/pgria53t>

8.4. Metrónomo

Gracias al péndulo de segundos, se consiguieron fabricar los primeros relojes precisos. Y también los primeros metrónomos (Figura 26).

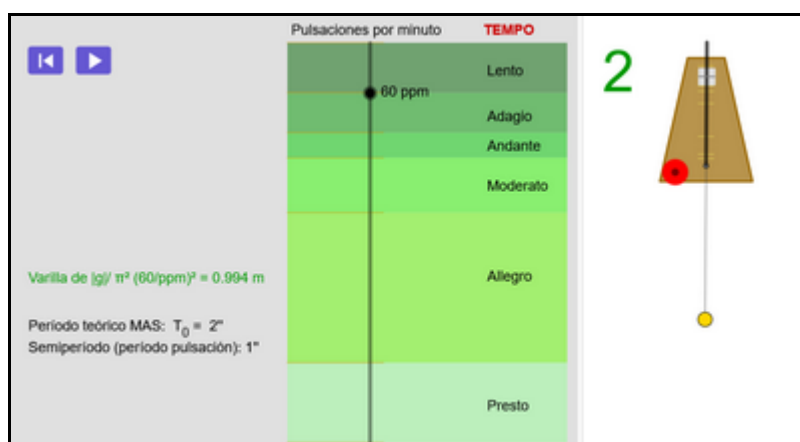


Figura 26. Metrónomo

<https://www.geogebra.org/m/rbywwiqw>

8.5. Péndulo doble

Si colocamos un péndulo en el extremo móvil de otro, obtenemos un péndulo doble. Aunque cada uno de ellos se sigue rigiendo por el período estable de un movimiento ordenado, su movimiento combinado resulta caótico (Figura 27).

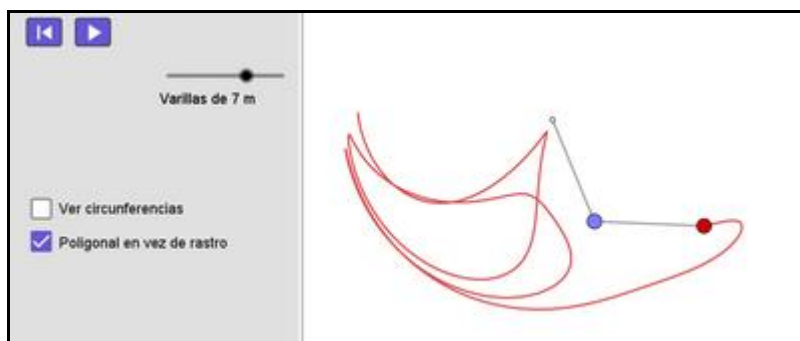


Figura 27. Movimiento caótico de un péndulo doble

<https://www.geogebra.org/m/v72dduav>

Podemos aprovechar la poligonal generada por el rastro²⁷ para estimar la longitud recorrida por el segundo péndulo. También podemos observar que incluso sin variar los puntos iniciales ni cambiar de dispositivo, cada vez que iniciemos el movimiento no está garantizado que obtengamos exactamente el mismo recorrido (lo más probable es que varíe). Esto se debe a que el valor exacto de cada intervalo de tiempo dt es resultado de la velocidad de ejecución del programa, y esta velocidad no es completamente uniforme (cosas de la electrónica).

Además, si esperamos lo suficiente, veremos que las pequeñas diferencias iniciales en el recorrido se van ampliando con el paso del tiempo, de modo que la posición de los péndulos en el mismo instante t puede llegar a ser muy diferente entre dos ejecuciones.

En la construcción, el origen de ese comportamiento caótico reside, como vemos, en una extrema sensibilidad a ligerísimos cambios en la velocidad de procesamiento. En la realidad, se debe a minúsculas variaciones de las posiciones iniciales, tensiones implicadas u otras fuerzas (corrientes de aire, microscópicos cambios en la presión atmosférica, etc.).

8.6. Tirolina o tirolesa

La carga de una tirolina ideal (es decir, sin rozamiento) se comporta de modo similar al del péndulo doble. La diferencia estriba en que ahora la polea (el primer péndulo) no traza un arco de circunferencia, sino un arco de elipse, pues su recorrido está determinado por la longitud del cable, que es la suma de las distancias de la polea a los extremos A y B (Figura 28).

He aprovechado el guion del deslizador "anima" para registrar la máxima velocidad alcanzada (con o sin carga). Así, podemos observar que la carga (punto rojo) puede llegar a moverse más rápido que la polea de enganche al cable (punto azul). En la realidad, la carga suele estar muy cerca de la polea, lo que minimiza, junto con el rozamiento, los vaivenes producidos por la carga.

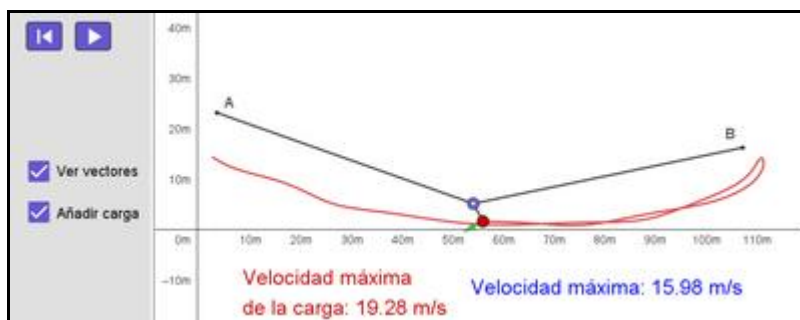


Figura 28. Recorrido caótico de la carga de una tirolina
<https://www.geogebra.org/m/y45rzq6y>

²⁷ Ver sección 2.

9. La Helena de los Geómetras

9.1. La cicloide

Imaginemos una rueda girando sobre un plano horizontal, sin deslizarse (Figura 29). Un punto de su circunferencia realizará una combinación de dos movimientos: el rectilíneo uniforme (MRU) del centro de la rueda (punto blanco) y el circular uniforme (MCU) del punto que gira alrededor de ese centro (punto verde). Esta combinación da lugar al recorrido del punto de la rueda (punto naranja), un recorrido curvo denominado cicloide²⁸.

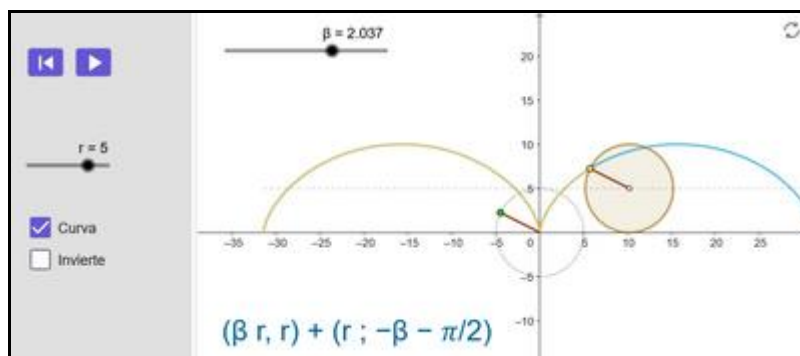


Figura 29. La curva cicloide
<https://www.geogebra.org/m/hwsrkyzz>

A partir de su definición, hay dos consecuencias evidentes. La primera es que la cicloide es una curva periódica, pues, a cada vuelta de rueda, el punto comienza el mismo trazado. La segunda es que su período es la longitud de la circunferencia ($2\pi r$, siendo r el radio de la rueda), pues en cada vuelta la rueda recorre su perímetro.

En la construcción, hemos limitado la curva a los valores de un ángulo β entre -2π y 2π . Para cada valor de β , el ángulo del punto verde es $-\beta - \pi/2$. Así que su posición²⁹ es $(r; -\beta - \pi/2)$. Para ese mismo valor β , el punto blanco se desplaza en horizontal, a una altura r , la longitud del arco de rueda correspondiente: βr . Así que su posición es $(\beta r, r)$. Por lo tanto, la posición del punto naranja es:

- $(\beta r, r) + (r; -\beta - \pi/2)$

Esta es la ecuación de la cicloide. Con GeoGebra, podemos representar los dos arcos mostrados de la curva introduciendo:

- $c(\beta) = (\beta r, r) + (r; -\beta - \pi/2), -2\pi \leq \beta \leq 2\pi$

O bien, usando el comando Curva:

- $\text{Curva}((\beta r, r) + (r; -\beta - \pi/2), \beta, -2\pi, 2\pi)$

²⁸ Apodada "La Helena de los Geómetras" según unos porque, al igual que Helena de Troya, fue fuente de numerosas discusiones entre los matemáticos del siglo XVII, y según otros, por la belleza de sus propiedades. En [este artículo](#) de UNIÓN (Hernández, 2007) se puede encontrar más información sobre esta curva.

²⁹ Usando coordenadas polares. Ver apartado 4.7.

En los siguientes apartados usaremos esta curva, pero invertida. En la cicloide invertida, la posición del punto naranja viene dada, para el ángulo β , por:³⁰

- $(\beta r, r) + (r; \beta + \pi/2)$

9.2. Caída por una cicloide

Esta animación simula el movimiento de caída de una masa por una cicloide en tiempo real, despreciando el peso de la varilla y el rozamiento. Tal como hemos venido haciendo, la animación no hace uso de fórmulas, solo realiza las variaciones necesarias en los vectores que dirigen el movimiento.

La animación varía en cada instante tanto el vector velocidad $\mathbf{v}$ (en rojo, Figura 30) como la posición M de la masa m , debido a la acción de la gravedad, cuya aceleración constante está representada por el vector $\mathbf{g}$ (en línea verde discontinua), que se puede descomponer como suma de dos: uno tangente al recorrido ($\mathbf{gt}$) y otro en la dirección perpendicular (que no interviene en el movimiento por quedar anulado por la reacción del material, con forma de cicloide, que sostiene a la masa). El guion del deslizador "anima" es, por tanto, el mismo que el del péndulo simple:

- Valor(v , $vt + dt \, gt$)
- Valor(M , $M + dt \, v$)

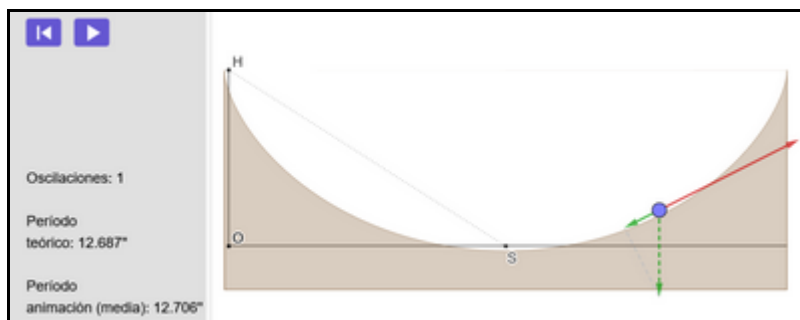


Figura 30. Caída por una cicloide
<https://www.geogebra.org/m/wrsdwsu4>

Deducimos entonces que el período de la caída por la cicloide no depende de la masa, solo del radio de la rueda que genera la cicloide y de la gravedad. Cualquier masa siempre tardará lo mismo en realizar una oscilación completa. Como ya hemos visto, esta propiedad se denomina isocronismo.

9.3. Tautócrona ("tiempo igual")

Dejamos caer por su propio peso las masas en M , A y B , todas ellas sobre la cicloide (Figura 31). Cabría suponer que B llegará antes al punto más bajo de la cicloide que A , y a su vez A llegará antes que M . ¡Pero no es así! Las tres masas llegan a la vez.

³⁰ Observemos que, algebraicamente, para darle la vuelta a esta curva (es decir, reflejarla en la horizontal que pasa por el centro de la rueda) basta cambiar el signo del argumento polar.

Podemos recolocar los puntos A y B en cualquier posición del arco de la cicloide y comprobar que ambos cruzan a la vez que M el punto más bajo de ella.

La cicloide es la única curva que tiene la propiedad de ser una curva *tautócrona*, es decir, el tiempo³¹ que le lleva a una masa que se desliza sin rozamiento en gravedad uniforme hasta su punto más bajo es independiente de su punto de partida. El período de oscilación de los tres puntos es siempre el mismo.

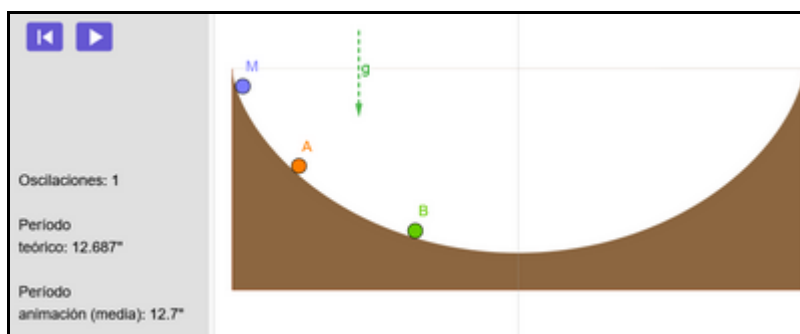


Figura 31. La cicloide es la única curva tautócrona
<https://www.geogebra.org/m/m9c7bhue>

9.34 Péndulo cicloidal

Ahora dejamos caer por su propio peso dos masas pendulares en M y A. Observemos que el hilo que sostiene a las masas, de longitud $4r$, en este péndulo cicloidal, se curva en la cicloide amarilla (generada por un círculo de radio r), enrollándose y desenrollándose, de modo que su extremo traza un arco de la cicloide (verde, Figura 32), generada también por un círculo de radio r .

Como hemos visto (y Huygens descubrió), esta curva es tautócrona, así que ambas masas tienen el mismo período. Igual que antes, podemos recolocar los puntos M y A en cualquier posición del arco de la cicloide y comprobar que A cruza a la vez que M el punto más bajo de ella.

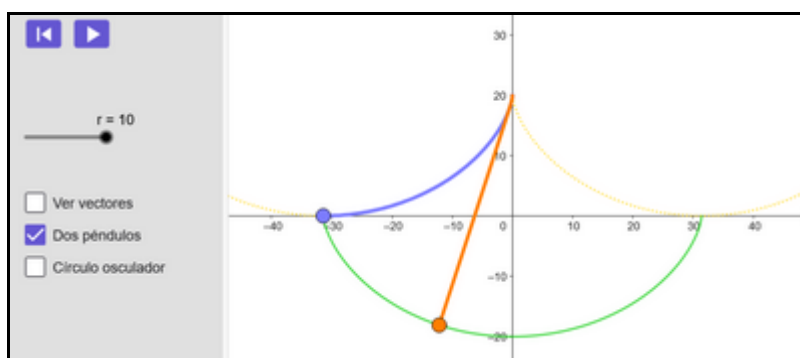


Figura 32. El péndulo cicloidal de Huygens
<https://www.geogebra.org/m/cbhxmuet>

³¹ Huygens descubrió que ese tiempo es $\pi/2$ veces el tiempo de caída libre desde $(0, 2r)$, es decir, π veces la raíz cuadrada de $r / |g|$.

La curva verde, trazada por el punto M al desenrollarse o enrollarse en la curva amarilla, se denomina *involuta* (o *evolvente*) de la amarilla. En la construcción se observa que la involuta de la cicloide es la misma cicloide (amarilla) de la que proviene, trasladada. Otro modo de decir lo mismo es que la curva que recoge los centros de curvatura (*evoluta*) de la cicloide verde es, trasladada, la misma cicloide (amarilla). Podemos activar la casilla "Círculo osculador" (cuyo centro es, en cada instante, el centro de curvatura del punto M) para comprobarlo. Esto se debe a que, para cualquier curva, "la evoluta de la involuta" es la propia curva (amarilla).

9.5. Braquistócrona ("tiempo mínimo")

Supongamos que queremos que una bola vaya, por su propio peso, de un punto elevado H hasta otro a menor altura P (fuera de la vertical de H) en el menor tiempo posible (Figura 33). En principio, tal vez pensemos que seguir la línea recta, al ser la trayectoria más corta, será también la más rápida. Es decir, seguir el plano inclinado de H a P (línea naranja). Pues no.

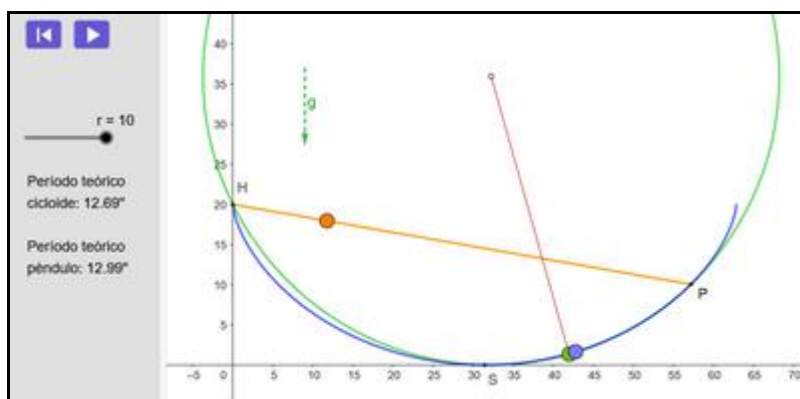


Figura 33. La cicloide es la curva de descenso más rápido
<https://www.geogebra.org/m/vmetqgtf>

¿Qué curva debe seguir, entonces? Esta curva se llama *braquistócrona*, y tiene una historia muy famosa. A finales del siglo XVII, el matemático suizo Johann Bernoulli lanza un desafío a los matemáticos más importantes de la época, dando seis meses de plazo para resolver dos complicados problemas. Cumplido el plazo, solo Leibniz había resuelto penosamente uno de los dos, así que Bernoulli amplió el plazo otros seis meses.

Casi pasado el año, uno de los problemas seguía sin ser resuelto, y el otro esperaba aún una solución elegante y referida al caso general. Fue entonces cuando Newton fue informado de ambos problemas. Newton tardó una noche en resolver los dos problemas y publicó las soluciones en forma anónima. Al conocerlas Bernoulli, afirmó que sin duda las había escrito Newton. Cuando le preguntaron cómo lo sabía, respondió con una locución latina³² que desde entonces se ha hecho célebre: "Por sus garras se conoce al león".

Pues bien, uno de los dos problemas era justamente hallar la curva braquistócrona, la curva de descenso más rápido. Y la solución no es otra, una vez

³² Tanquam ex ungue leonem.

más, que la cicloide invertida. Concretamente, la que tiene al punto más elevado (H) como extremo superior, tal como muestra la construcción (línea azul).

En la construcción, he añadido la circunferencia que pasa por H, S y P, pues Galileo creía que la braquistócrona debería ser esa circunferencia (línea verde), pero se equivocó, aunque no por mucho, como se puede comprobar en la construcción. En realidad, el punto verde realiza un movimiento pendular, como ya hemos visto, cuyo período de oscilación es algo mayor que el de la cicloide. Lo que resulta evidente es que la línea recta está muy lejos de ser la mejor opción (aunque mejora cuanto mayor sea su pendiente).

Con motivo de los Juegos Olímpicos de París 2024, el artista (y skater) Raphaël Zarka diseñó la obra titulada *Cycloïde Piazza*³³. Es la primera vez que se crea una pista de skate³⁴ cuyo perfil es el más rápido del mundo (una cicloide).

10. Un poco de historia

10.1. Antes de la medida precisa del tiempo

Previamente a la invención de relojes mecánicos precisos, el único instrumento válido para mediciones de pequeños intervalos de tiempo era el reloj de arena. Veamos un ejemplo ingenioso de su uso.

Para situarse con (relativa) exactitud en los mapas de navegación, los capitanes de los barcos necesitaban saber no solo el rumbo seguido, sino también la velocidad media del barco. Para ello se tomaban frecuentes medidas de la distancia recorrida en un tiempo determinado. Para facilitar el traslado de esas medidas a la carta de navegación, se ideó la *cuerda de nudos*, cuyo uso se basa en el concepto de *milla náutica* (o milla marina).

Una milla náutica es la longitud de un arco de 1 minuto de círculo máximo (*ortodrómica*). Como el círculo máximo terrestre mide unos 40.000 km, dividiendo entre 360 grados y entre 60 minutos, tenemos que una milla náutica equivale a unos 1.852 metros.

Ahora, llamamos *nudo* a la velocidad de una milla náutica por hora. Es decir, 1 nudo equivale a 1,852 km/h. Así, navegar a 8 nudos durante una hora significa recorrer 8 minutos de círculo máximo en esa hora. ¡Así de fácil es trasladar la distancia recorrida a la carta de navegación!

Pero, ¿cómo averiguaban los capitanes a qué velocidad navegaban? Usando relojes de arena. Como la medición del tiempo en estos relojes es fija, necesitaban medir la distancia recorrida en ese intervalo fijo de tiempo. Aquí es donde entra la idea de usar la "cuerda de nudos".

Preparamos una larga cuerda de modo que tenga marcas o nudos igualmente espaciados. La distancia entre cada nudo y el siguiente debe ser tal que, para

³³ Esta especie de escultura gigante estuvo instalada junto al Centro Pompidou del 26 de junio al 15 de septiembre de 2024.

³⁴ Normalmente, el perfil de estas pistas está formado por un trayecto horizontal con cuartos de circunferencia en sus extremos (en inglés, *half-pipe*, es decir, medio tubo), mucho más sencillo de construir.

recorrer esa distancia navegando a la velocidad de 1 nudo, empleemos exactamente el tiempo medido por el reloj de arena.

Por ejemplo, en la siguiente construcción usamos un reloj de arena (*ampolleta*) capaz de medir intervalos de 30 segundos. Así que debemos preparar la cuerda para que, navegando a 1 nudo, tardemos ese tiempo en recorrer la distancia entre dos nudos.

Después de arrojar la boya (o *corredera*) con la cuerda atada a ella, iniciamos la cuenta del tiempo al alcanzar el primer nudo (en color verde, Figura 34). Los nudos siguientes (en color amarillo) nos indicarán, en nudos, la velocidad del barco.

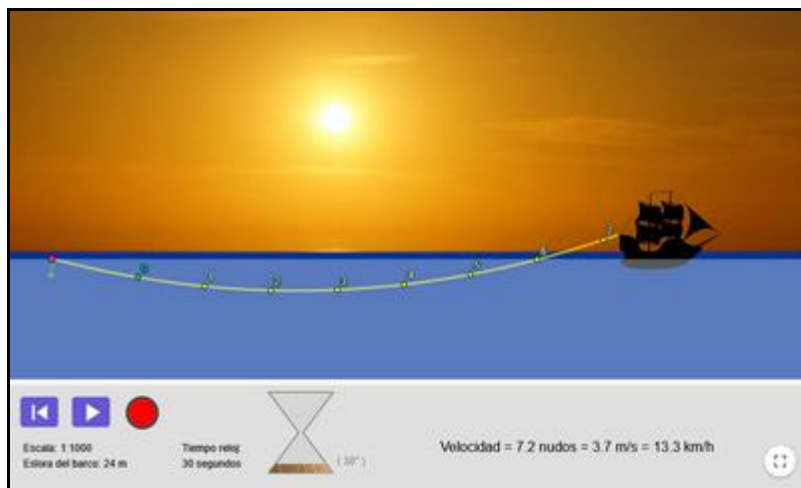


Figura 34. La unidad nudo procede de esta medición de la velocidad de un barco
<https://www.geogebra.org/m/weaehqfn>

Observemos que, efectivamente, los nudos que se sueltan del barco hasta que se termina el tiempo en el reloj de arena indican su velocidad, en nudos, de ahí el nombre otorgado a esta unidad de velocidad.

Si el tiempo del reloj de arena se terminaba entre dos nudos, como era normal, se estimaba a ojo la porción de cuerda soltada después del último nudo.

Ahora bien, ¿cómo preparar la cuerda?, es decir, ¿cómo calcular los metros de distancia que han de separar dos nudos consecutivos de la cuerda? Eso es fácil, pues esa distancia ha de ser igual al producto de la velocidad de 1 nudo por el tiempo del reloj. Por ejemplo, en la construcción anterior, esa distancia es de:

$$(1 \text{ nudo}) \text{ por } (30'') = (1,852 \text{ km/h}) \text{ por } (1/120 \text{ h}) = 15,43 \text{ m}$$

Con la llegada de los cronómetros marinos, en el siglo XVIII, ya se podía medir con precisión cualquier intervalo variable de tiempo, así que se podía sustituir la cuerda de nudos por cualquier cuerda de longitud conocida. Sin embargo, por su facilidad de uso, la cuerda de nudos siguió usándose mucho tiempo después.

10.2. Una cronología el cronómetro

En la Tabla 1 podemos apreciar cómo cuatro gigantes de la ciencia (Galileo, Huygens, Hooke y, a hombros, Newton) resultaron esenciales en la historia de la medición precisa del tiempo.

Siglo o año	Descubrimiento o investigación	Autor
–XVI	Clepsidra (reloj de agua)	Alguien de Egipto...
VIII	Clepsamía (reloj de arena)	Alguien de Europa...
1589	Caída libre (experimento mental de Pisa)	Galileo
1599	Cicloide	Galileo
1602	Péndulo simple	Galileo
1604	Movimiento Uniformemente Acelerado	Galileo
1637	Idea del reloj de péndulo	Galileo
1644	Péndulo de segundos	Mersenne
1656	Reloj de péndulo	Huygens
1659	Tautócrona	Huygens
1660	Péndulo cónico	Hooke
1660	Ley de elasticidad (Movimiento Armónico Simple)	Hooke
1671	Coordenadas polares	Newton
1673	Péndulo cicloidal. Evoluta	Huygens
1675	Volante regulador (sustituto del péndulo)	Hooke, Huygens
1687	Leyes del movimiento	Newton
1696	Precursor del metrónomo	Loulié
1697	Braquistócrona	Newton

Tabla 1. Cronología del cronómetro

11. Escalas de tiempo

11.1. El problema de la mosca y los trenes

El movimiento a velocidad constante es muy frecuente en muchos problemas de persecución o encuentro entre dos móviles. Aunque los libros de texto de matemáticas y muchas páginas web suelen incluirlos como excusa para ejercitar la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (el espacio recorrido y el tiempo transcurrido hasta el encuentro), basta un simple razonamiento basado en la relatividad³⁵ del movimiento.

Para el observador situado en uno de los móviles, el móvil en el que se halla permanece quieto, mientras que el otro se mueve con la diferencia (vectorial, es decir, considerando el sentido de cada uno) de las velocidades de ambos. Gracias a este enfoque, es fácil deducir el tiempo de alcance.

³⁵ Relatividad de Galileo respecto al sistema de referencia.

Por ejemplo, si un coche a 100 km/h persigue a otro a 80 km/h, podemos suponer que el perseguido está quieto mientras el perseguidor acorta distancias a 20 km/h. Así, si la separación inicial era de 60 km, tardará 3 horas en alcanzarlo.

Seguramente, el ejemplo más famoso de este tipo de problemas sea el de la mosca y los trenes:

"Dos trenes se hallan en la misma vía separados 100 km. Se dirigen uno hacia el otro, cada uno a 50 km/h. Una mosca parte del morro de un tren y vuela hacia el otro, a 75 km/h. Al llegar al otro tren, la mosca da media vuelta y continúa hacia el primer tren. ¿Cuántos kilómetros recorre la mosca antes de quedar aplastada en la colisión de los dos trenes?"³⁶

La fama de este problema se debe a que cuando se lo propusieron al matemático John von Neumann (1903-1957, Johnny para los amigos), sustituyendo los trenes por bicicletas, dio inmediatamente el resultado correcto. "Oh, ya has oído el truco antes", dijo el interrogador, decepcionado. "¿Qué truco?", preguntó el desconcertado Johnny, "simplemente sumé la serie infinita"³⁷ (Macrae, 2016, p. 11).

La alternativa, "el truco", muchísimo más simple, consiste en desplazar el foco de atención del espacio al tiempo. Desde el punto de vista de uno de los trenes, el otro tren se acerca a 100 km/h, por lo que tardará 1 hora en recorrer los 100 km de separación hasta colisionar. Así que la mosca estará volando 1 hora. A la velocidad de 75 km/h, habrá recorrido 75 km.

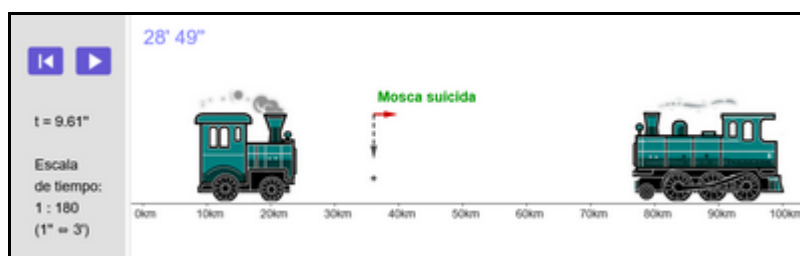


Figura 35. El famoso problema propuesto a John von Neumann
<https://www.geogebra.org/m/cw787zvg>

Pasemos a la construcción (Figura 35). Observemos que ya que la velocidad se expresa en km/h, tomamos el kilómetro como unidad de distancia. Pero como no queremos esperar una hora a que se complete el experimento, escalamos el tiempo, de modo que cada segundo de ejecución equivalga a 3 minutos de tiempo real (escala 1:180). Naturalmente, escalar el tiempo también implica escalar el error cometido en la simulación.³⁸

³⁶ Naturalmente, este enunciado, como otros muchos en matemáticas, hay que asignarlo a la categoría de "enunciados teóricos", por lo que no ha de ser juzgado con "sentido común". (¿Desde cuándo las moscas vuelan a velocidad constante y sin quiebras? ¿A 75 km/h, más de 10 veces lo normal? ¿Qué oscuro motivo mueve a la mosca a realizar esos absurdos vaivenes? ¿Ninguno de los maquinistas frena al ver el otro tren? Etc.)

³⁷ Seguramente, en un rápido cálculo mental, Johnny (que era un gran calculista) determinó la longitud del primer tramo recorrido por la mosca ($75t = 100 - 50t$, de donde $t = 4/5$, y entonces ese tramo mide 60 km). En ese tiempo ($4/5$ h), cada tren habrá recorrido 40 km, así que la separación que queda entre los trenes es solo de 20 km, es decir, $1/5$ de la separación inicial. Por lo tanto, los tramos que recorre la mosca forman una progresión geométrica decreciente, de razón $1/5$ y primer término 60 km, cuya suma de infinitos términos es $60 / (1 - 1/5) = 75$ km.

³⁸ En la construcción, es evidente que lo que no está a escala son las locomotoras.

11.2. Péndulo de Foucault

Del mismo modo, si aplicamos al tiempo una escala 1:3.600, podemos visualizar una vuelta completa de la Tierra en solo 24 segundos. Esta escala de tiempo nos permite observar el comportamiento del péndulo de Foucault en cualquier punto terrestre (Figura 36). Si lo colocamos en el hemisferio norte, la rotación aparente del plano del péndulo se realizará de *modo retrógrado* (sentido horario). En el hemisferio sur se realizará de *modo directo* (sentido antihorario).

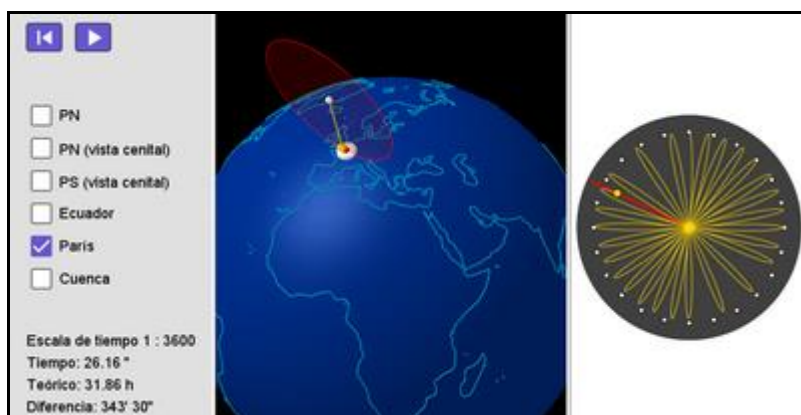


Figura 36. Comportamiento de un péndulo de Foucault colocado en París
<https://www.geogebra.org/m/z9vc6atb>

11.3. Órbita circular

Hasta ahora hemos supuesto que la aceleración gravitatoria g se medía en la superficie terrestre, con el módulo igual a $9,81 \text{ m/s}^2$. Pero un satélite artificial M orbitando alrededor de la Tierra está sometido a una aceleración menor.

Recordemos que el módulo de la aceleración gravitatoria g provocada por la masa de la Tierra varía con el cuadrado de esa distancia d , que ahora ya no coincide con el radio r de la Tierra, por lo que es igual a $G m_T / d^2$, donde d la distancia (en metros) a la que nos encontremos del centro de la Tierra.

Altura (km)	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	$v \text{ (km/h)}$	$T \text{ (h)}$
0	9,81	28.472	1,41
280	9	27.868	1,5
2.350	5,24	24.336	2,25
3.600	4	22.759	2,75
35.786	0,22	11.066	23,93

Tabla 2. Períodos orbitales

La Tabla 2 recoge los valores de g y v , así como el período, que corresponde a un satélite situado en órbita circular a la altura dada (la altura 0 es teórica, solo para comparar). Observando la tabla, vemos que no es posible representar gráficamente, con fidelidad, el movimiento del satélite alrededor de la Tierra. Si optamos por introducir las medidas reales sin escalarlas, representaremos un movimiento que

tarda mucho (lo mismo que el satélite real, más de una hora) en trazar la trayectoria circular completa. No parece razonable esperar tanto.

En esta construcción (Figura 37) se puede observar el MCU de un satélite artificial (M1) alrededor de la Tierra, en una órbita polar baja (a 1.700 km de altura).

En la animación, la Tierra tarda 23,93" en dar una vuelta completa, es decir, tantos segundos como horas en la realidad. Por lo tanto, gira 3.600 veces más rápido que en la realidad. Para mantener la proporción de este período de 23,93" con los períodos de los satélites, he hallado el período real (con las distancias reales y la masa real de la Tierra) de cada uno y lo he dividido también entre 3.600. El satélite tiene un período teórico de 2 horas (unas 12 vueltas al día), por lo que en la animación ese satélite dará una vuelta completa cada 2", aproximadamente.

Además, en la vista 3D, la distancia del satélite al centro de la Tierra, y por lo tanto su órbita, también está escalada proporcionalmente al radio de la Tierra.

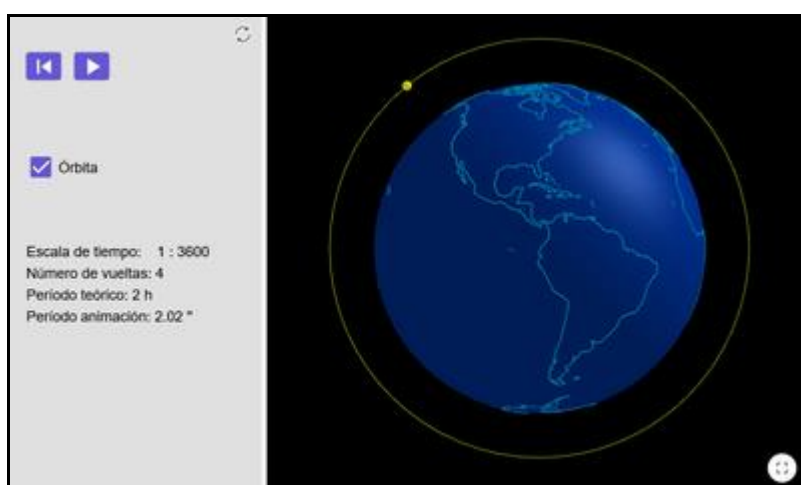


Figura 37. Órbita circular
<https://www.geogebra.org/m/gmqkwwji>

11.4. Satélites geoestacionarios

Un caso particular e importante de órbita circular es la órbita geoestacionaria. Un satélite en esa órbita orbita en el plano del ecuador con el mismo sentido y el mismo período que el de rotación de la Tierra (23,93 horas).

Ese período determina la distancia al centro de la Tierra (unos 42.157 km, es decir, a una altura de 35.786 km sobre la superficie terrestre).

De este modo, el satélite azul (Figura 38) se encontrará en todo instante en el cenit del mismo punto del ecuador (he elegido el cruce con el meridiano de Greenwich, es decir, el punto con 0° de longitud y latitud).

Visto desde la Tierra, el satélite ocupa en todo momento la misma posición en la bóveda celeste.³⁹ Para resaltar esta sincronía, he representado un segmento entre el centro de la Tierra y el satélite.

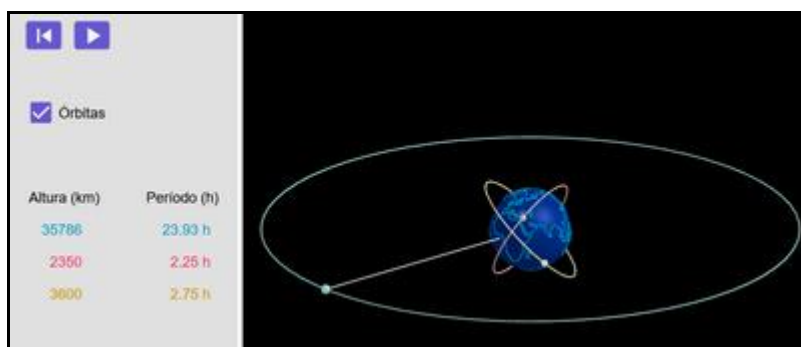


Figura 38. Un satélite geoestacionario
<https://www.geogebra.org/m/tzfahyvq>

11.5. Órbita elíptica

No todas las órbitas de los satélites artificiales son circulares. Por ejemplo, la órbita de Mólniya es una elipse de gran excentricidad (0,74), pensada para cubrir zonas de alta latitud, donde los satélites geoestacionarios no alcanzan.

Pero, además, ninguna órbita de un planeta o luna es circular. Los satélites artificiales necesitan corregir a menudo el módulo y dirección de su aceleración para mantenerse en una órbita circular, algo que no pueden hacer los cuerpos celestes.

Hasta ahora hemos supuesto que la aceleración gravitatoria $\mathbf{g}$ se mantenía constante. Pero un planeta M alrededor del Sol no mantiene siempre la misma distancia a él, es decir, no sigue una órbita circular, sino elíptica (aunque la elipse nunca es perfecta y varía ligeramente cada año).

Llamaremos ahora $\mathbf{g}$ a la aceleración gravitatoria provocada por la masa del Sol. Recordemos que el módulo de la aceleración gravitatoria $\mathbf{g}$ provocada por la masa de la Sol varía con el cuadrado de la distancia d (en metros) a su centro, y es igual a $G m_s / d^2$, donde m_s es la masa del Sol (en kilogramos).

Ahora, en vez de usar esta fórmula para escalar convenientemente las distancias, y posteriormente escalar el tiempo, crearemos una construcción mucho más abierta, que facilite la observación de la esencia del movimiento para diferentes datos iniciales (Feynman, 1963, p. 9.11). Es decir, en vez de escalar la pantalla para que represente la realidad, imaginaremos que la realidad se ajusta a las dimensiones de la pantalla.

Representamos la Tierra, inicialmente, a 9 unidades del Sol, con aceleración inicial $|\mathbf{g}| = 1$ y velocidad inicial $|\mathbf{v}| = v_0$. Y dejamos, como siempre, que el deslizador "anima" haga su trabajo.

³⁹ El conjunto de satélites geoestacionarios se conoce también como Cinturón de Clarke, ya que fue Arthur C. Clarke (famoso escritor de ciencia ficción, autor de "2001: Una odisea espacial") el primero en proponer, en 1945, el uso de esta órbita.

El resultado es una trayectoria elíptica, aunque en muchos casos, como en el caso de la Tierra, con muy poca excentricidad, es decir, a la vista es casi idéntica a una trayectoria circular.

Observemos que ahora el módulo de $\mathbf{g}$ no se mantiene constante (salvo para $v_0 = 3$, que corresponde a la órbita circular). Tampoco el módulo de $\mathbf{v}$. Observemos también que en el punto de la órbita más cercano al Sol (*perihelio*), al aumentar $\mathbf{g}$, se alcanza la máxima velocidad $\mathbf{v}$, y la mínima en el punto más lejano (*afelio*).

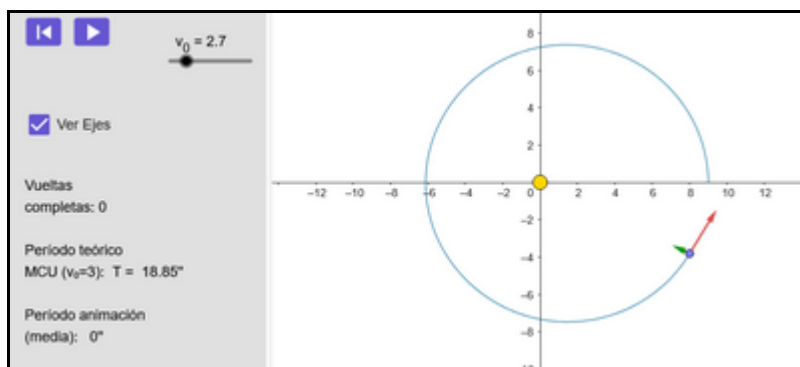


Figura 39. Una órbita elíptica es consecuencia de una suma vectorial
<https://www.geogebra.org/m/zzngigyh>

12. Conclusión

A través de todos estos ejemplos, hemos podido comprobar cómo el mismo y sencillo método puede aplicarse con éxito a una gran variedad de situaciones. También se ha evidenciado que la visualización y medición de los diferentes experimentos no necesita forzosamente, en la mayoría de los casos, estar basada en el conocimiento previo de las correspondientes fórmulas de Física.

Además, la introducción de estas fórmulas para contrastar las mediciones realizadas en la animación con las medidas teóricas, fomentan la curiosidad por conocer la procedencia de estas últimas, lo que favorece sin duda su estudio, si es que se necesita o se estima adecuado al nivel educativo que se imparta.

El desarrollo aquí realizado no es exhaustivo ni pretende serlo. El método empleado también permite la generalización a otras situaciones similares. Por ejemplo, se puede pasar de la Cinemática a una Dinámica más general, donde se ponga el foco en las fuerzas (también vectoriales) que causan los movimientos y donde las masas desempeñen un papel más relevante al considerar otras variables, como la fuerza de rozamiento, la resistencia al aire o la rotación de los cuerpos.

Lo importante es que cualquier profesor puede elegir uno o más de estos ejemplos como parte de una propuesta de proyecto técnico-físico-matemático a sus alumnos, tomando como base la plantilla disponible en el apartado 3.2. Después de orientarlos, es el tiempo de que anden ellos. Y ellas.

Bibliografía

- Feynman, R., Leighton, R. B. & Sands, M. (1963). *The Feynman Lectures on Physics, Mainly Mechanics, Radiations and Heat*. Volume I. Addison-Wesley. Harlow, Essex, Reino Unido. Traducción al español recuperada el 8 de abril de 2025 de <https://www.utnianos.com.ar/foro/attachment.php?aid=7332>
- Hernández, D. (2007). La cicloide: un recorrido histórico por sus propiedades. *UNIÓN* [en línea], 12, 115-134. Recuperado el 4 de abril de 2025, de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/download/1231/930/>
- Losada, R. (2023). GeoGebra Principia. *Libro de GeoGebra*. Recuperado el 4 de abril de 2025, de <https://www.geogebra.org/m/vbvavfjz>
- Losada, R. (2024). El dominio del Tiempo (cinemática intuitiva). *Libro de GeoGebra*. Recuperado el 4 de abril de 2025, de <https://www.geogebra.org/m/nfiy7ug4>
- Macrae, N. (2016). *John von Neumann. The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More*. Plunkett Lake Press. Massachusetts, Estados Unidos.

Losada Liste, Rafael: **A Coruña, 1959. Licenciado en Matemáticas, socio de la FESPM. Profesor de Secundaria durante 40 años, ahora jubilado. Formador en el Instituto GeoGebra de Cantabria, España, con el certificado de formador del *International GeoGebra Institute*. Traductor de GeoGebra. Coautor del [Proyecto Gauss](#) (INTEF).**