REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 72. Diciembre 2024
Páginas 01-12

El potencial de GeoGebra para acercar la Programación lineal y la economía al aula
O potencial do GeoGebra para trazer programação linear e economia para a sala de aula

Karina Amalia Rizzo

Fecha de recepción:10/10/2024
Fecha de aceptación:8/11/2024

Resumen	La optimización es una rama de la matemática que busca soluciones óptimas para problemas complejos, siendo esencial en la gestión eficiente de recursos empresariales. Utilizando modelos y algoritmos, permite tomar decisiones estratégicas sobre costos, producción y beneficios, maximizando ganancias o minimizando pérdidas. Entre los modelos más utilizados destacan los de simulación y los de optimización, como la Programación Lineal (PL), que aborda problemas con restricciones lineales y desigualdades. Fundamentada en la teoría marginalista, la PL identifica planos óptimos según las condiciones planteadas. El texto explora brevemente la relevancia de la PL en la economía mediante ejemplos prácticos para la enseñanza secundaria, utilizando GeoGebra como herramienta didáctica **Palabras clave**: Optimización, Programación Lineal, GeoGebra, economía.
Abstract	Optimization is a branch of mathematics that seeks optimal solutions to complex problems and is essential in the efficient management of business resources. Using models and algorithms, it allows strategic decisions to be made about costs, production and benefits, maximizing profits or minimizing losses. Among the most widely used models are simulation and optimization models, such as Linear Programming (LP), which addresses problems with linear constraints and inequalities. Based on marginalist theory, LP identifies optimal plans according to the established conditions. The text will briefly explore the relevance of LP in economics through practical examples for secondary education, using GeoGebra as a teaching tool. **Keywords**: Optimization, Linear Programming, GeoGebra, economics.
Resumo	A otimização é um ramo da matemática que busca soluções ótimas para problemas complexos, sendo essencial na gestão eficiente dos recursos empresariais. Utilizando modelos e algoritmos, permite tomar decisões estratégicas sobre custos, produção e benefícios, maximizando lucros ou minimizando perdas. Dentre os modelos mais utilizados, destacam-se

modelos de simulação e otimização, como a Programação Linear (PL), que aborda problemas com restrições e desigualdades lineares. Baseado na teoria marginalista, PL identifica planos ótimos de acordo com as condições declaradas. O texto explorará brevemente a relevância da PL na economia através de exemplos práticos para o ensino secundário, utilizando o GeoGebra como ferramenta de ensino.

Palavras-chave: Otimização, Programação Linear, GeoGebra, economia.

1. Introducción

La optimización, es un área de la matemática muy vasta, que aborda los problemas relacionados con la elección de la mejor opción para un problema, entre muchos posibles, proporcionando entre otras cosas, un instrumento para el análisis económico.

Es claro que una buena gestión de los recursos que posee una empresa, hacen al éxito de la misma. Por ello, encontrar una solución óptima para ciertos problemas, es fundamental y posible gracias a las herramientas que nos proporciona la matemática. Esta ciencia nos brinda la posibilidad de abordar realidades muy complejas mediante modelos matemáticos, estadísticos y de algoritmos. Esto nos permite poder tomar decisiones en cuanto a diversas cuestiones, tales como las referidas a costo, producción, beneficio y otros, para, por ejemplo, maximizar ganancias o minimizar pérdidas.

Existen diversos modelos que son utilizados por las empresas para tal fin, podemos mencionar los de simulación y los de optimización (sin restricciones, con restricciones de igualdad o con restricciones de desigualdad). Estos últimos se apoyan en la teoría marginalista para calcular sin restricciones o según las que se adviertan, el plan óptimo.

La búsqueda de ese óptimo, se puede realizar mediante varios métodos, según el escenario a considerar. Cuando nos encontramos con restricciones de desigualdad y todas las funciones que intervienen son lineales, uno de los métodos es el de Programación Lineal (PL).

En este trabajo se aborda muy sucintamente la importancia de la PL, en la economía a través de algunos ejemplos para el aula de una escuela secundaria, utilizando el software GeoGebra.

2. Programación Lineal

En múltiples problemas de negocios y de economía se solicita ***optimizar*** una función sujeta a un sistema de igualdades o desigualdades. Estos sistemas reflejan las restricciones impuestas en la solución/es del problema/s, como por ejemplo puede ser las limitaciones en los recursos como materiales y mano de obra. Este tipo de problemas reciben el nombre de programación matemática (Soo, 2011).

2.1 Introducción a la Programación Lineal

En particular, la Programación Lineal (PL) es una serie de métodos y procedimientos que se utilizan para resolver problemas de optimización, haciendo uso de modelos matemáticos, donde tanto la función como las restricciones son expresadas en forma de ecuaciones lineales o desigualdades. Esta técnica surge durante la Segunda Guerra Mundial, como respuesta a la creciente necesidad de organización y toma de decisiones (Coronel y Araujo, 2004) y aparece gracias a Kantoróvich quien recibió el premio Nobel de economía en 1975 por sus aportaciones al problema de la asignación óptima de recursos humanos (Manco Chavez, 2020).

La PL, da respuesta a múltiples situaciones donde se necesita obtener el valor máximo o el mínimo de una cierta expresión algebraica lineal denominada **función objetivo**, de acuerdo con un número de **restricciones** que aparecerán representadas por inecuaciones lineales.

Es habitual que, en las aplicaciones a análisis de negocios, esta función que es necesario optimizar, sea una función de utilidad o de costo (Arya y Landner, 2009).

En las siguientes líneas, nos centraremos en las formas de resolver aquellos problemas simples de programación lineal, en los que intervienen dos variables (problemas bidimensionales).

2.2 Conceptos fundamentales

Recordemos que una desigualdad lineal entre dos variables x e y es cualquier relación de la forma $Ax+By+C>0$ (o<0) o $Ax+By+C\geq 0$ (o≤ 0). La gráfica de una desigualdad lineal consta de todos aquellos puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad. Consiste de una región del plano xy, no sólo de una línea o curva. La gráfica de la desigualdad $Ax+By+C>0$ es un semiplano acotado por la línea recta cuya ecuación es $Ax+By+C=0$ (Arya y Landner, 2009. Pag. 400).

Si deseamos graficar varias desigualdades lineales, debemos hacerlo en un mismo sistema de ejes cartesianos e ingresar cada una por separado. Al sombrear cada región permitida, se advertirá que se superponen, siendo ésta región (acotada o no), la permitida para todas (conjunto intersección de todos los semiplanos) llamada región de validez o *zona de soluciones factibles*. Cada uno de los segmentos de línea que limitan la región factible, recibe el nombre de *frontera* y se denomina *vértice* a la intersección de dos de ellas.

Es importante tener en cuenta que, si se puede abarcar una región factible con un círculo, ésta será "acotada", caso contrario es "no acotada". Asimismo, si contienen al menos un punto, es no vacía, o vacía, si así no fuera. Es de destacar que, aunque por lo general existe un número infinitamente grande de ***soluciones factibles,*** el objetivo es el de encontrar una de esas soluciones que represente una ***solución óptima*** (Haeussler y Paul ,1987)

Por tanto, se advierte que al analizar una situación problemática donde intervienen desigualdades lineales, es útil un enfoque geométrico, pues nos permite observar el recinto que representa el conjunto de soluciones factibles e intuitivamente advertir el valor extremo (solución óptima), vértice del polígono de factibilidad.

Por otra parte, para resolver en forma analítica un problema de éstas características, en primera instancia se define el conjunto factible donde se buscan las soluciones del sistema formado por las inecuaciones establecidas por las restricciones, para luego resolverlo y determinar el punto o puntos, que optimizan la función objetivo.

Cabe señalar que, es necesario considerar la siguiente propiedad: Si la función objetivo posee un máximo o un mínimo en un conjunto convexo, toma este valor en un punto extremo del conjunto de soluciones posibles (vértice) o en un lado de dicho conjunto (toda combinación convexa de tales puntos) (Rojo,1973).

La solución de un problema de programación lineal con dos variables, suelen clasificarse según el tipo de solución que presentan en factibles y no factibles, esto es cuando existe o no el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones. Por lo tanto, puede ser única, múltiple o incluso no tener solución, y para hallarlas, debemos sustituir los valores de los puntos (x, y) de los vértices de la región en la función objetivo.

Otra forma de obtener la solución del problema para una función objetivo F $(x, y) = ax + by + c$, es utilizando el método de la recta de nivel. Esto es, trazando rectas paralelas a la recta que pasa por el origen y tiene por vector director $\vec{u}$= (-b, a), para determinar aquella que defina el máximo y el mínimo del recinto.

Es evidente que, las posibilidades que ofrece la representación gráfica de inecuaciones nos permite resolver con facilidad, problemas de programación lineal simples.

2.3 Uso de Tecnología en Programación Lineal

El procedimiento para resolver problemas de PL lo podemos llevar a cabo de diversas formas. La manera habitual de realizarlo es con lápiz y papel, como describe Reaño Paredes (2011) o con calculadora gráficas (Texas y Casio) y el comando Solver de Microsoft Excel, como menciona Paiva (2008). También es posible trabajar con diseños y aplicaciones interactivas para internet como exponen Sánchez y López (1999) y Coronado (2012) o con la utilización de softwares y en particular con GeoGebra, como abogan Bello Durand (2013). Do Santos (2013), Florecin Alvarado (2017), Canut Díaz Velarde, M. E. (2018); Hernandez Rodriguez, J. F. (2019), Manco Chavez (2020). Este software libre de geometría dinámica ofrece a los alumnos mediante la manipulación, la posibilidad de conjeturar y plantear posibles soluciones mientras construyen el conocimiento (Carrillo, 2012; Hohenwarter, 2019).

En todas las experiencias mencionadas, que utilizan GeoGebra, se destaca el potencial de este programa para visualizar el conjunto de puntos que satisfacen todas las desigualdades. Resaltan que, al ingresar las inecuaciones en la "barra de entrada", de forma inmediata aparece en la "vista gráfica" una región sombreada, que representa el conjunto de soluciones factibles, es decir el conjunto de puntos (valores de x e y) que satisfacen todas las desigualdades, haciendo evidente que no se puede considerar, puntos fuera de dicha región (verificando con "punto en objeto", ver ej. en: https://youtu.be/HrmJDfxP0-4)

Del mismo modo, se puede introducir en la línea de entrada, la función que hay que maximizar/minimizar y las rectas que limitan el recinto, para obtener los vértices del mismo. Luego, para comprobar en qué vértice se obtiene el óptimo de la función se ha de ingresar f(x(A), y(A)), f(x(B), y(B)),…, esto permite obtener el valor de la función objetivo para las coordenadas de cada uno de los vértices. Otro modo de obtener las soluciones del sistema de inecuaciones es utilizando el comando Vértices [sistema de inecuaciones]

Además, como se mencionó con anterioridad, sabemos que las rectas de nivel son las familias de las rectas paralelas que se obtienen a partir de la función objetivo. Haciendo uso de los deslizadores, el estudiante fácilmente podrá corroborar el valor máximo o mínimo buscado, al “desplazar” dicha función.

2.4 Ejemplos Prácticos.

A continuación, veamos tres ejemplos, a modo de secuencia didáctica para llevar al aula.

Ejemplo 1:

Candela, tiene un mini emprendimiento de souvenirs y regalos. Para un evento necesita16 cajas de barbijos, 5 de alcohol en gel y 20 de jabón líquido. Al buscar, encuentra que dos mayoristas pueden ayudarla, pero sólo venden en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 1 caja de alcohol en gel, 8 cajas de barbijos y 2 de jabón líquido. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de barbijos, 1 de alcohol en gel y 7 de jabón líquido. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km de distancia y el mayorista B a 300 km, ¿Cuántos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, para ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia?[1]

A partir de los datos, adicionando las condiciones de que x e y (mayorista A y B, respectivamente) deben ser no negativas y utilizando el potencial de GeoGebra, se obtiene que se debería comprar 3 contenedores al mayorista A y 2 al B.

Para acceder a la animación ingresar en: https://www.geogebra.org/m/vpr8cxk7

[1] Adaptación de reto propuesto en Club GeoGebra Iberoamericano 4º Edición: https://www.geogebra.org/m/Dfnek2Sp

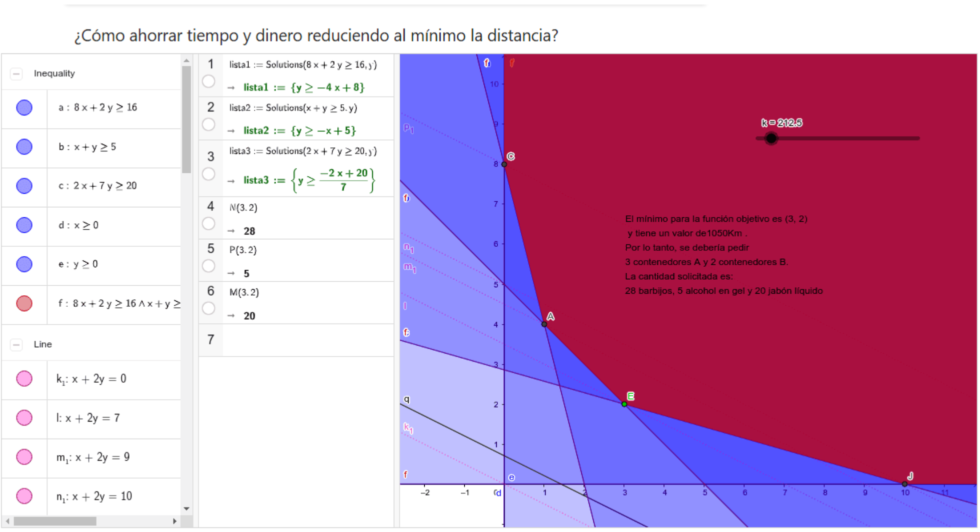

Figura 1. Solución Ejemplo 1
¿Cómo ahorrar tiempo y dinero reduciendo al mínimo la distancia?
https://www.geogebra.org/m/vpr8cxk7

Ejemplo 2:

Para concurrir a una fiesta, Cande junto a otros emprendedores, contratan dos tipos de autobuses, de 40 y 50 plazas para poder llevar a 400 invitados. La empresa de alquiler dispone de 8 micros del primer tipo y 10 del segundo tipo, pero como es un fin de semana largo, solo hay disponibles 9 conductores para ese día. Si sabemos que los micros con capacidad para 40 personas cuestan $ 300 cada uno y que los de 50 plazas cuestan $ 450 ¿Cuántos micros de cada tipo conviene alquilar para que el viaje resulte lo más económico posible?[2]

A partir de los datos, adicionando las condiciones de no negatividad, se concluye que conviene alquilar 5 micros con capacidad para 40 personas y 4 micros de 50 plazas, para que el alquiler resulte lo más económico posible y éste será de $3300.

[2] Adaptación de reto propuesto en Club GeoGebra Iberoamericano 5º Edición: https://www.geogebra.org/m/KXGYyA2b

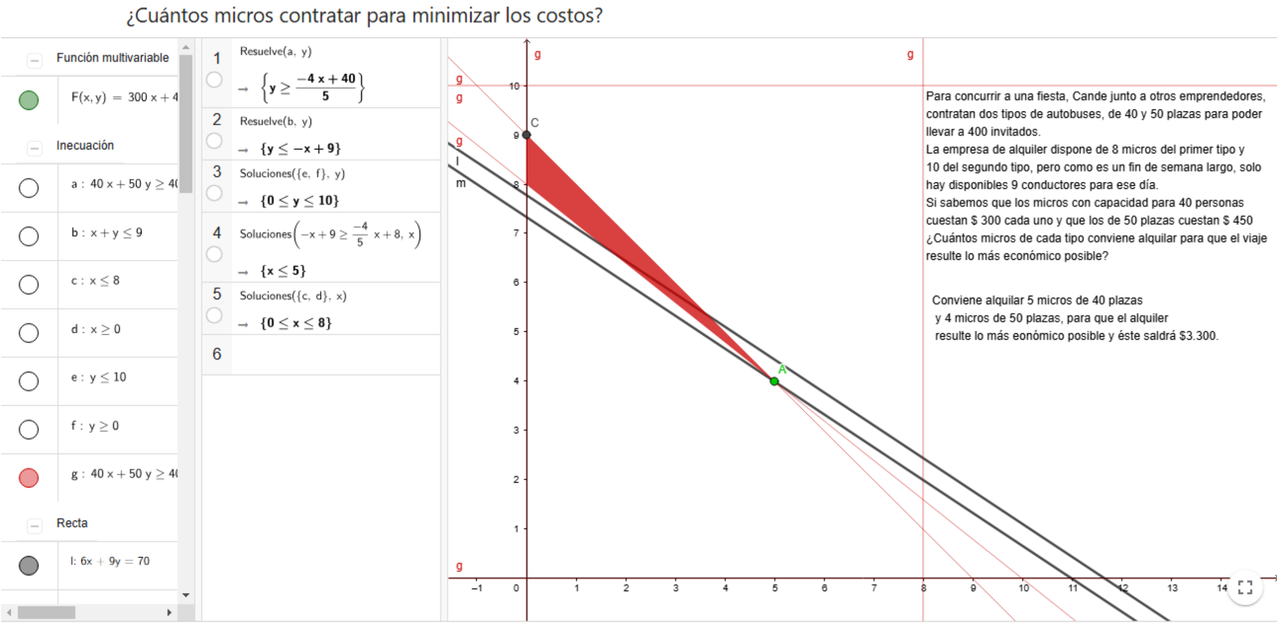

Figura 2. Solución Ejemplo 2.
¿Cuántos micros contratar para minimizar los costos?
https://www.geogebra.org/m/usfdwveb

Ejemplo 3:

El emprendimiento de Cande está creciendo y comenzó a elaborar dos productos A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de B necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda máquina. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda. Si se obtiene un beneficio de 70 dólares por cada unidad de A, y de 50 dólares por cada unidad de B, ¿Qué cantidad semanal de cada producto debe producir para maximizar el beneficio total? ¿Cuál es ese beneficio?[3]

A partir de los datos, se puede construir una tabla donde se resuma la información e identificar fácilmente las restricciones y la función a maximizar F (x, y) = 70x+50y

Productos	Máquina 1	Máquina 2
A	2 horas	5 horas
B	4 horas	3 horas
	100 horas	110 horas

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y\leq 100 \\ 5x+3y\leq 110 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Figura 3. Resumen de Información

[3] Adaptación ejercicio propuesto en Club GeoGebra Iberoamericano 4º Edición.

El conjunto de puntos (*x, y*) que conducen a una utilidad dada *P* satisfacen la ecuación: 70x + 50 = P. Esta ecuación, para *P* fija, tiene como gráfica una línea recta en el plano *xy* llamada **línea de utilidad constante** o **recta de indiferencia (indicadas por línea punteada)**. Como todas las líneas de utilidad constante (isoutilidad) son paralelas, podemos moverla hasta que toque el extremo de la región de soluciones factibles.

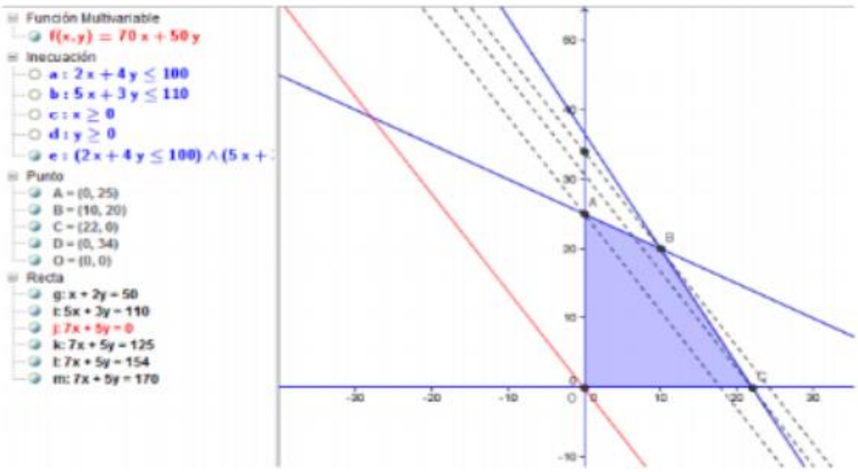

Figura 4. Líneas de utilidad constante

Si utilizamos un deslizador podemos animar el desplazamiento y observar cuál es la recta cuya ordenada al origen se encuentre lo más alejada de éste y que tenga al menos un punto común con la región factible: https://www.geogebra.org/m/ykfbsfmg

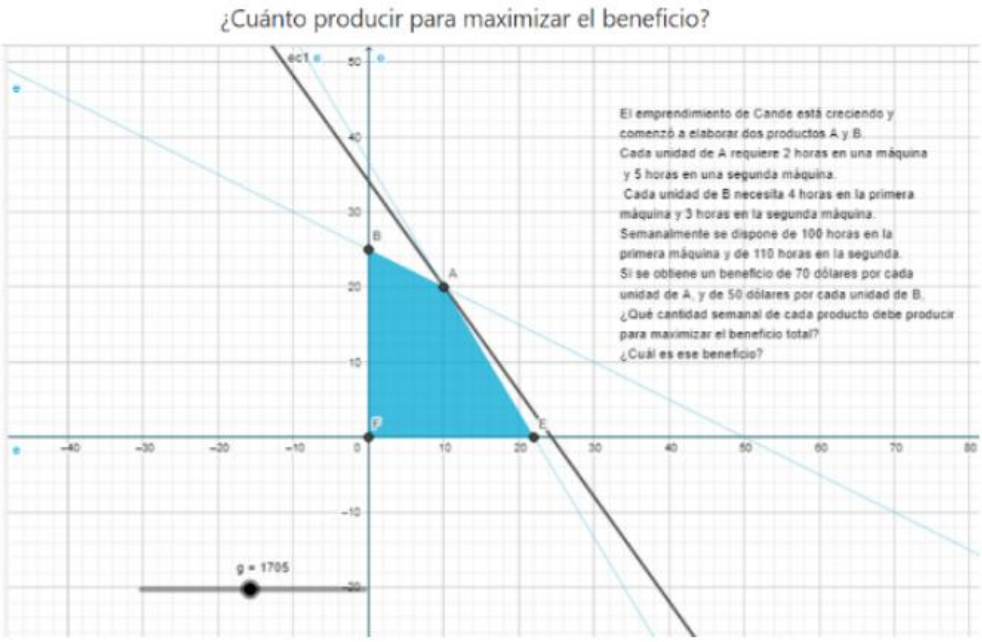

Figura 5. Solución Ejemplo 3**.**
¿Cuánto producir para maximizar el beneficio?
https://www.geogebra.org/m/ykfbsfmg

Por tanto, se observa que el máximo de la función se alcanza en el vértice B cuyas coordenadas son (10,20), lo que significa que Candela, deberá producir 10 unidades del producto A y 20 del producto B y obtendrá un beneficio máximo de 1.700 dólares.

Hasta aquí, se ha considerado sólo tres de los múltiples problemas que se pueden abordar con ésta técnica. Para explorar más ejemplos, se recomienda visitar la sección "Recursos de GeoGebra", donde encontrará materiales útiles como:

- ✓ https://www.geogebra.org/m/pakdxxw7
- ✓ https://www.geogebra.org/m/e6ptxbhh
- ✓ https://www.geogebra.org/m/pnrpvwtu
- ✓ https://www.geogebra.org/m/sThZJagx (incluye plan de clase)
- ✓ https://www.geogebra.org/m/fmPuY7jx (Actividades autoevaluables).

En las líneas precedentes, se utilizó la técnica gráfica de resolución de un problema de programación lineal y también se hizo mención al cálculo del valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible (inspección de vértices). Es de destacar que esto no es tan fácil de aplicar (ni práctico), cuando hay más de dos variables. Para ello se puede utilizar el método simplex, desarrollado en 1947 por George Dantzigy Leonid Vitalievch Kantorovic, algoritmo con capacidad para resolver aquellos problemas de m restricciones y n variables, siendo muy importante aquí, convertir mediante las "variables de holgura", las inecuaciones en ecuaciones para luego poder utilizar el álgebra de matrices y el proceso de eliminación de Gauss-Jordan.

Se pueden consultar diversas fuentes que explican detalladamente el paso a paso del algoritmo simplex. Por ejemplo, se puede consultar el documento: http://ri.uaemex.mx/bitstream/handle/20.500.11799/33856/secme-16318.pdf?sequence=1 o el ejemplo práctico en el sitio web PHP Simplex: https://www.phpsimplex.com/ejemplo_metodo_simplex.htm

Además, es posible explorar recursos interactivos, como animaciones del proceso en GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/MNaFpcFu y Calculadora online del método simplex: https://calculadorasonline.com/calculadora-metodo-simplex-online-programacion-lineal/

Ciertamente, este método es digno de ser abordado en otra oportunidad, con mayor profundidad, pero excede el presente trabajo.

3. Conclusión

En estas líneas se muestra, a través de algunos ejemplos, que es importante considerar la inclusión del software GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de la PL, pues con él es posible una mayor precisión en las gráficas, facilitando el modelar matemáticamente situaciones reales de manera natural y espontánea. Además, con los diversos ejemplos expuestos, se reveló que uno de los principales objetivos de emprendedores y empresarios, es saber cómo obtener el mayor beneficio y cómo minimizar los costos. Para ello necesitan conocer los métodos que permiten optimizar funciones y así tomar mejores decisiones y esto sólo es posible, teniendo como aliada a la matemática.

4. Referencias bibliográficas

Arya, J.C. y Landner, R.W. (2009). Matemáticas Aplicadas a la administración y a la economía (5a.ed.). Editorial Pearson Educación. Disponible en e-libro: https://www.academia.edu/39669841/Matem%C3%A1ticas_aplicadas_a_la_Administraci%C3%B3n_y_a_la_Econom%C3%ADa_QUINTA_EDICI%C3%93N_ARYA_I_LARDNER_I_IBARRA

Bello Durand, J (2013). Mediación del software GeoGebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria. Perú. Tesis disponible en: http://hdl.handle.net/20.500.12404/4737

Caballero, J. A., y Grossmann, I. E. (2007). Una revisión del estado del arte en optimización. En: Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial. Vol. (4): págs. 5-23. Disponible en: https://polipapers.upv.es/index.php/RIAI/article/view/8173

Canut Díaz Velarde, M. E. (2018). Aprendiendo con Geogebra programación lineal: Método gráfico. Facultad de Estudios Superiores Acatlán UNAM. Tercer Encuentro universitario de mejores prácticas de uso de TIC en la educación. México. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/327120389_Aprendiendo_con_GeoGebra_programacion_lineal_a_traves_del_metodo_grafico

Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 29.

Chiang, A. D. and Wainwright, K. (2005). Fundamental methods of mathematic economy (4th edition). Traducción parcial al español: Diana Salgado. Disponible en. http://www.ub.edu/matheopt/optimizacion-economica/

Contrera de Toro, A. (2019). La optimización y su aplicación a la economía. Disponible en: https://hdl.handle.net/10953.1/10760

Coronel de Renolfi, M y Araujo, P (2004) La programación lineal aplicada al manejo forestal. Serie didáctica Nº10. Universidad Nacional de Santiago del Estero. Disponible en: https://fcf.unse.edu.ar/archivos/series-didacticas/SD-10-Programacion-lineal-RENOLFI.pdf

Dos Santos, JM (2013) XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. JAEM Palma. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Jose-DosSantos/publication/323175079_Programacion_Lineal_con_GeoGebra/links/5a843fb2a6fdcc201b9ec77e/Programacion-Lineal-con-GeoGebra.pdf

Florecin Alvarado, M. L. (2017). Efectos del programa informático Geogebra en el aprendizaje de programación lineal en estudiantes del quinto grado de secundaria de la Institución Educativa Manuel Gonzales Prada, Huaycán, Vitarte. Lima Perú. Tesis disponible en: Disponible en: https://repositorio.une.edu.pe/handle/20.500.14039/1350

Haeussler, E y Paul, R (1987) Matemática para la administración y economía. Grupo editorial Iberoamericana. México

Hernández Díaz. J. (1985) La programación lineal y ejemplos de su aplicación. Instituto Nacional de Investigaciones Forestales. México. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/317254052_CONCEPTOS_BASICOS_DE_PROGRAMACION_LINEAL_Y_APLICACION_EN_EL_MANEJO_DE_RECURSOS_NATURALES

Hohenwarter, M. Kovács, Z y Recio, T. (2019). Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra. Números Revista de Didáctica de la Matemática. Nº100. Pag.79-84. Disponible en: http://www.sinewton.org/numeros

Manco Chavez, J (2020). Aplicación del GeoGebra en la programación lineal. Taller de aplicación del GeoGebra en Álgebra y funciones en 3D por superficies en rotación. LimaPerú. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/344068235_Aplicacion_del_GeoGebra_en_la_programacion_lineal

Moreno Sanchez, O. (2011). Un estudio Didáctico de los Sistemas de inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal en el Instituto superior tecnológico Público ¨Simón Bolívar¨. (Tesis de maestría). Universidad PUCP, Lima, Perú.

Paiva, S. (2008). A programação linear no ensino Secundário. Universida de Portucalense Infante D. Henrique Departamento del novação, Ciência e Tecnología. (Dissertação do grau de Mestreem matemática/ Educação). UPIDH, Lisboa, Portugal. Disponible en: http://hdl.handle.net/11328/566

Reaño Paredes, C. (2011). Sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas y problema de programación lineal. Una mirada desde la teoría de las situaciones didácticas (Tesis de maestría). Universidad PUCP, Lima, Perú. Disponible en: https://1library.co/document/wyeve1rz-sistemas-inecuaciones-lineales-incognitasproblemas-programacion-situaciones-didacticas.html

Rojo, A. (1995) Álgebra II. Editorial El ateneo. Bs. As.

Sánchez Álvarez, I. y López Ares, S. (1999) Didáctica de la programación lineal con ordenador para estudiantes de administración y dirección de empresas. Revista de Enseñanza Universitaria 1999, N° 14-15, 129-138. https://idus.us.es/handle/11441/54314

Nión Vazquez, S. (2015) Programación lineal. Aplicaciones a la Economía y a la Empresa. Universidad de Da Coruña. España. Disponible en: https://core.ac.uk/download/pdf/61918068.pdf

Soo T. Tan (2011) Matemáticas Aplicadas a los Negocios, las Ciencias Sociales y de la Vida. 6a Ed. Cengage. Disponible en: https://issuu.com/cengagelatam/docs/tan_issuu

5. Webgrafía:

Calculadora método simplex online: https://calculadorasonline.com/calculadora-metodosimplex-online-programacion-lineal/

Club GeoGebra Iberoamericano, 5º Edición. (2017) https://www.geogebra.org/m/KXGYyA2b

Club GeoGebra Iberoamericano, 4º Edición. (2016) https://www.geogebra.org/m/Dfnek2Sp

Coronado, T. (2012) Programación lineal. Disponible en: https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/29/matematicas-29.html

Hernandez Rodriguez, J. F. (2019) Proyecto Optimización con GeoGebra. Disponible en tres entradas: https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/04/03/optimizacion-con-geogebra/