UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 72. Diciembre 2024
Páginas 01-14

Hiloramas con GeoGebra: Una experiencia para trabajar el sentido algebraico en la ESO

Elena Gajate Paniagua

Resumen	Mostramos una actividad que se realizó en colaboración con el departamento de EPV y en la que alumnos de 2º ESO realizaron hiloramas con GeoGebra y con cuerdas en las verjas del instituto. Esto nos permitió trabajar conceptos geométricos (giros, traslaciones), numéricos (fracciones, divisibilidad) y sobre todo algebraicos (patrones, regularidades, concepto de variable, fórmulas...). **Palabras clave**: Pensamiento algebraico, conexiones
Abstract	We showcase an activity that was carried out in collaboration with the Visual Arts department and in which 2nd ESO students made string art with GeoGebra and with ropes on the school fences. This allowed us to work on geometric concepts (rotations, translations), numerical concepts (fractions, divisibility) and above all algebraic concepts (patterns, regularities, concept of variable, formulas...). **Keywords**: algebraic thinking, connections
Resumo	Mostrámos uma atividade que foi realizada em colaboração com o departamento de Artes Visuais e na qual os alunos do 2º ESO fizeram fios com o GeoGebra e com cordas nas vedações do instituto. Isto permitiu-nos trabalhar conceitos geométricos (voltas, translações), conceitos numéricos (frações, divisibilidade) e, sobretudo, conceitos algébricos (padrões, regularidades, conceito de variáveis, fórmulas...). **Palavras-chave:** pensamento algébrico, conexões

1. Introducción

Los *hiloramas* son construcciones realizadas con hilos siguiendo un patrón geométrico. Se suelen hacer con alfileres (como en fig.1) o “bordando” una cartulina o tela, buscando crear envolventes de curvas.

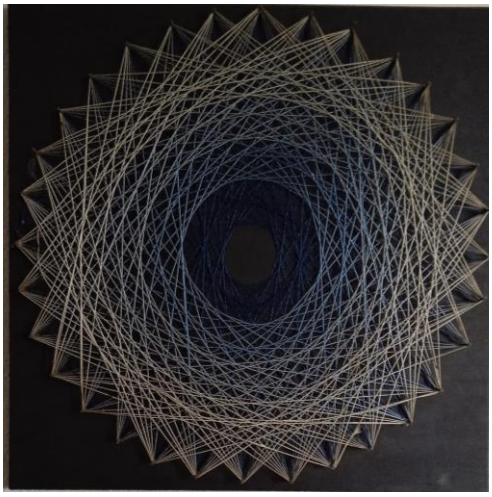

Figura 1. Cuadro con hilorama decorativo.

En nuestro centro (IES Maestro Juan de Ávila, de Ciudad Real) el departamento de EPV, y en concreto la profesora Mar Arrabal Hidalgo, programa desde hace varios cursos para 4º de ESO la elaboración en clase de estas construcciones con cartón, hilo y aguja (fig. 2)

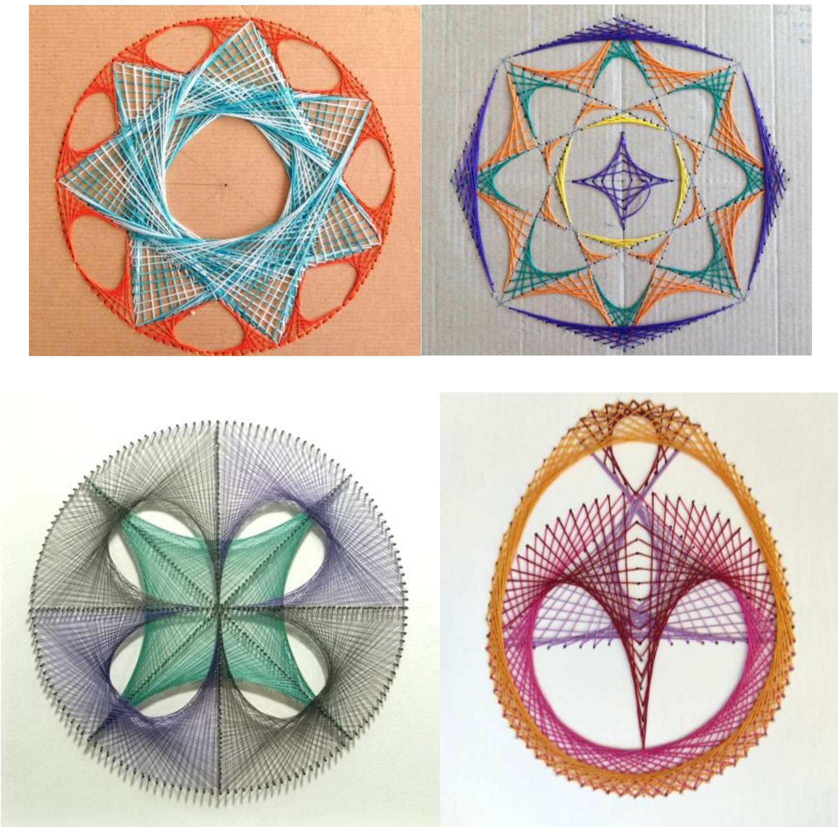

Figura 2. Hiloramas realizados en clase de EPV (cortesía de M Arrabal)

La novedad este pasado curso 2023-24 consistió en que alumnos más jóvenes (2º de ESO) realizaran también hiloramas, pero en este caso con cuerdas en las verjas y vallas del centro para motivarles a diseñarlos también en clase de matemáticas con GeoGebra. La ventaja de usar este programa es que permite que los hiloramas sean dinámicos: se puede cambiar fácilmente el número de hilos y las distancias entre estos, además de características como su grosor y color.

Figura 3. Desarrollo de la actividad manipulativa

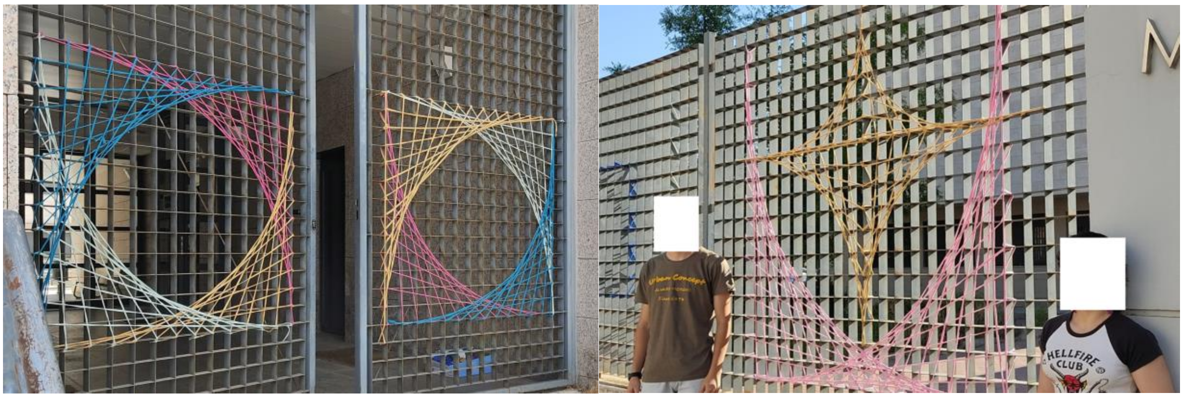

Figura 4. Algunas de las producciones

En este artículo mostraremos cómo se realizó esta última parte de la actividad, que nos sirvió para introducir o repasar contenidos curriculares de geometría, números y sobre todo de álgebra. Además, se trabajaron competencias específicas como el pensamiento computacional, las conexiones, la identificación de las matemáticas que hay detrás de situaciones reales, la cooperación y el trabajo en equipo, la perseverancia y resiliencia...

2. Inserción en el currículo

La actividad no tendría sentido si no estuviera justificada curricularmente; a continuación, explicamos cómo:

En relación con las competencias específicas, modelar un diseño realizado a mano con GGB implica aplicar los principios del pensamiento computacional, lo que incluye organizar datos, descomponer en partes, reconocer patrones y crear algoritmos para modelar situaciones (CE4). La actividad está también relacionada con la geometría, por lo que también trabajamos conexiones entre diferentes elementos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos (CE5).

Además, trasladar un objeto "real" construido en clase de EPV a un plano virtual-matemático implica identificar las matemáticas presentes en situaciones reales que pueden ser abordadas desde un enfoque matemático (CE6). Cada actividad compleja y no trivial lleva a desarrollar habilidades personales como la identificación y gestión de emociones, la aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas (CE9). Por último, el trabajo en equipo fomenta el desarrollo de habilidades sociales, reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás (CE10).

En cuanto a los saberes básicos, hemos trabajado el **sentido numérico**, con razones y proporciones para comprender y representar relaciones cuantitativas. También hemos abordado el **sentido espacial**, que incluye la construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales, así como transformaciones elementales (giros, traslaciones y simetrías) en diversas situaciones. Sin embargo, consideramos que el mayor impacto de la actividad en el aula ha sido en el desarrollo del **sentido algebraico**, a través de la observación de pautas y regularidades, y la utilización de variables y fórmulas, lo que contribuye a la comprensión de estos conceptos.

En el **ámbito socioafectivo**, la actividad ha servido para fomentar la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas, así como la flexibilidad cognitiva, la apertura a cambios de estrategia y la transformación del error en una oportunidad de aprendizaje. Además, hemos utilizado técnicas cooperativas de trabajo.

3. Desarrollo de la actividad

3.1. Cuestiones previas

Comenzamos mostrando en clase lo que se esperaba que iban a aprender a hacer: el hilorama cuadrado del patio en versión dinámica, junto con otros más sofisticados (fig.5).

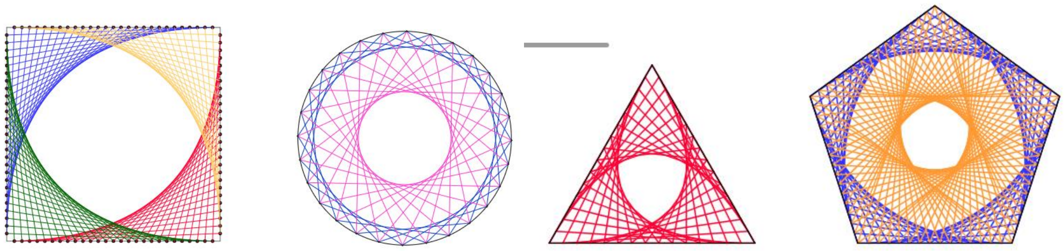

Figura 5. Algunos hiloramas construidos con GeoGebra

Y aprovechamos para plantear algunas cuestiones como: ¿Tienen todos los segmentos la misma longitud? ¿Podrías justificarlo? ¿Puedes expresar algebraicamente la longitud de los segmentos coloreados? ¿De qué variable o variables dependen? (fig. 6)

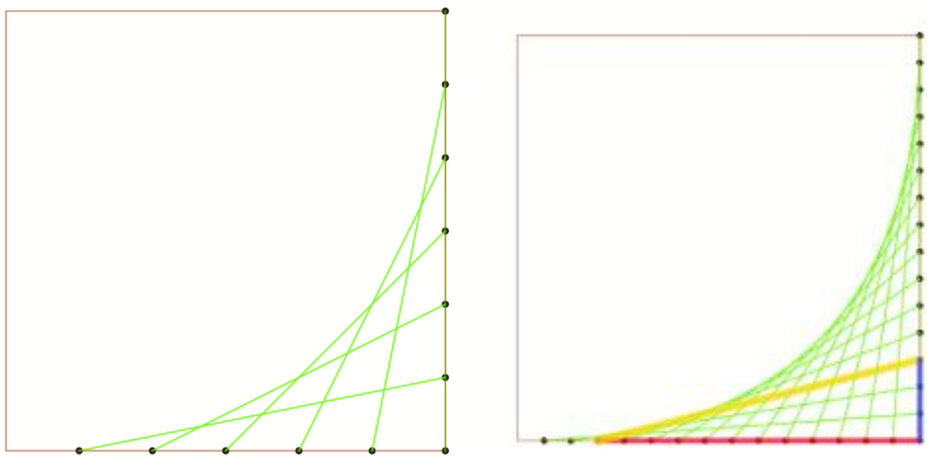

Figura 6. ¿Miden lo mismo todos los segmentos? ¿Sabrías expresar algebraicamente los lados del triángulo?

Estas preguntas nos permiten a empezar a pensar en fracciones, en conteo y, lo que era el objetivo, en "algebraizar" la geometría. Además, una vez resuelta la cuestión, podemos aprovechar más adelante para pedirles que hagan un diagrama de barras que represente las longitudes de los hilos (fig. 7)

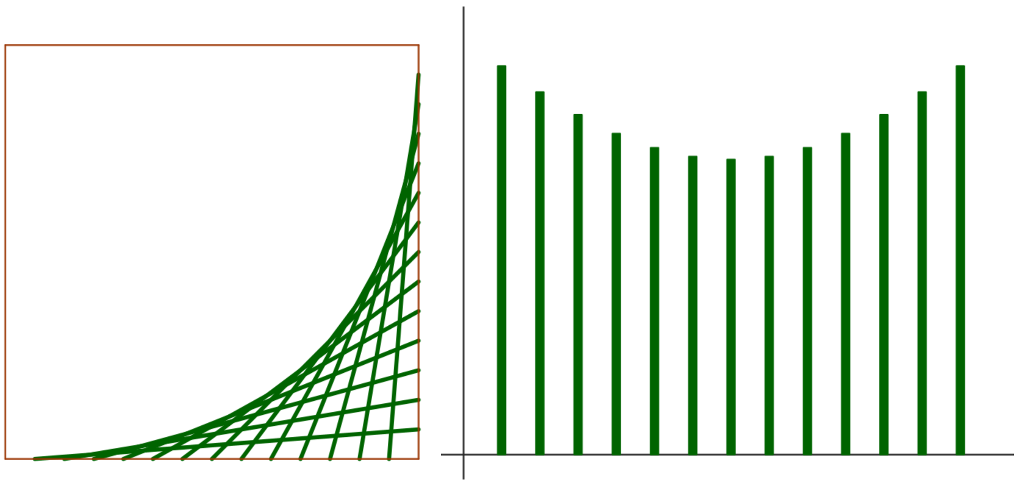

Figura 7. A la derecha vemos representados los hilos en posición vertical

3.2. Hiloramas de base poligonal

Después de esta pequeña introducción empezamos ya con la elaboración de hiloramas cuya base es un polígono. Comenzamos por el cuadrado, que es el que han realizado en el patio. Para todos necesitaremos dividir segmentos en un número arbitrario de partes iguales. Para ello empezamos con casos particulares: dividir en dos, luego en tres, luego en cinco… En todos los casos utilizamos el comando Traslada (<Objeto>, <Vector>) (fig. 8 y 9)

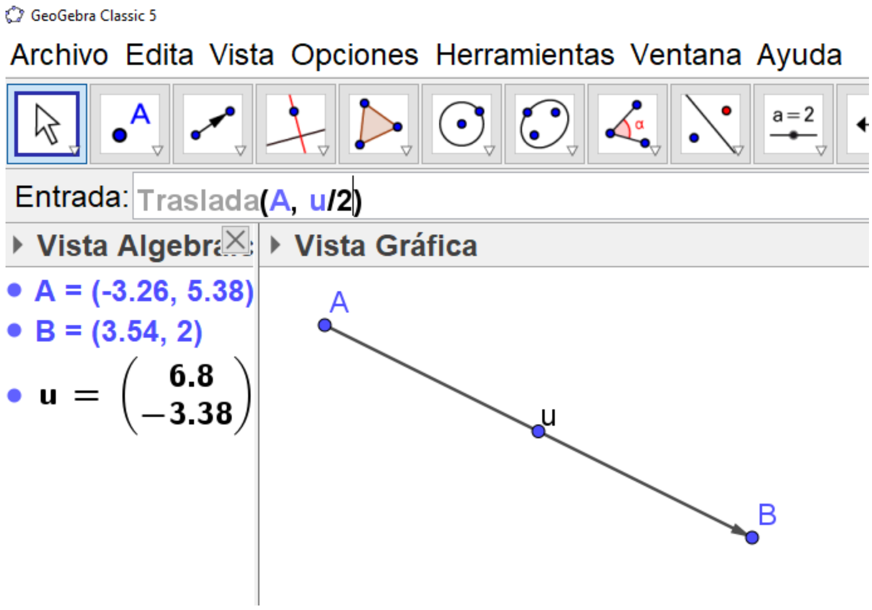

Figura 8. Dividiendo "a mano" un segmento en dos partes iguales.

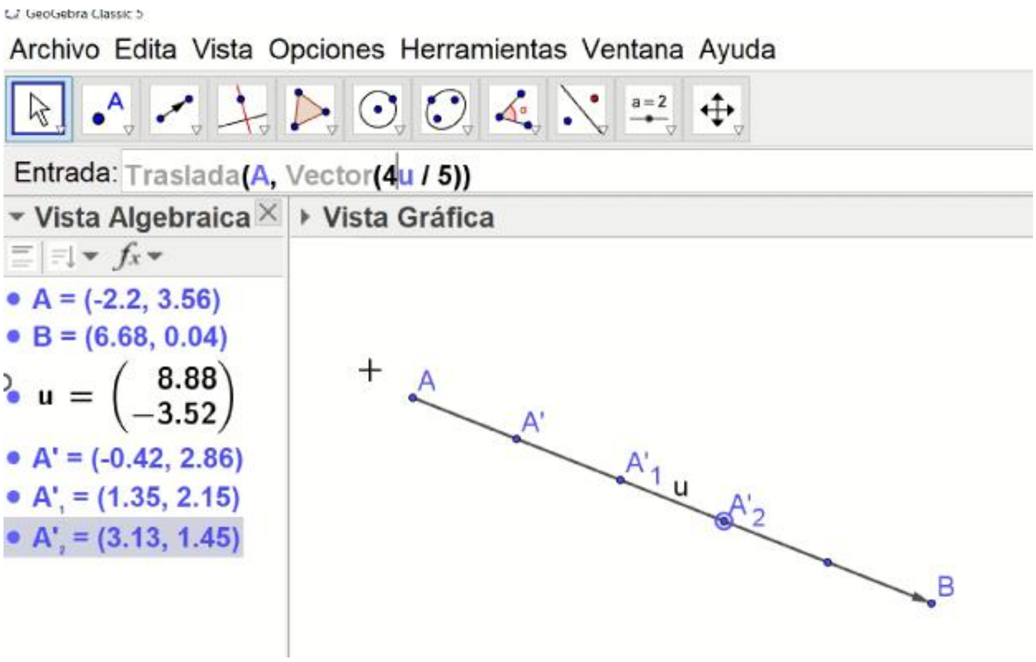

Figura 9. Dividiendo "a mano" un segmento en 5 partes iguales.

Cuando se ha dividido "a mano" un segmento en 5 partes iguales es fácil percatarse de que siempre hacemos lo mismo, salvo que el coeficiente de u/5 varía: una vez es 1, otra es 2, y así hasta 4. Esto nos sirve de pretexto para introducir o repasar el concepto de variable (algo que varía, y a lo que debemos darle un nombre para poder manipularlo) y el de fórmula algebraica, ya que no otra cosa es el comando Secuencia de Geogebra (fig. 10)

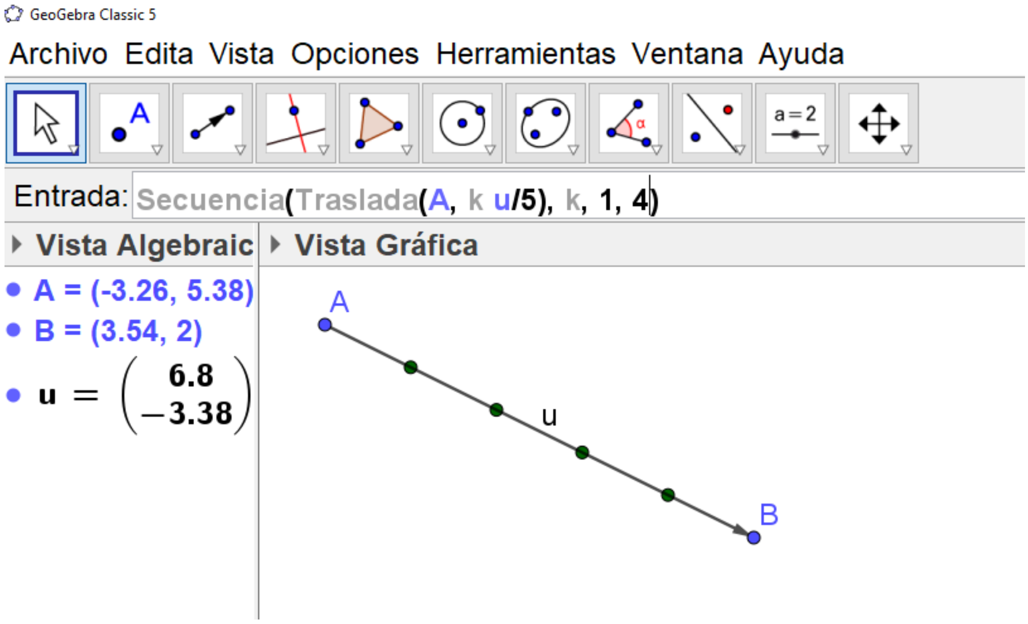

Figura 10. Dividiendo un segmento en 5 partes iguales con el comando Secuencia.

Como nuestro objetivo es dividir en un número arbitrario de partes, vamos a introducir un deslizador entero, n, y sustituir el 5 por n y el 4 por n-1 (fig. 11)

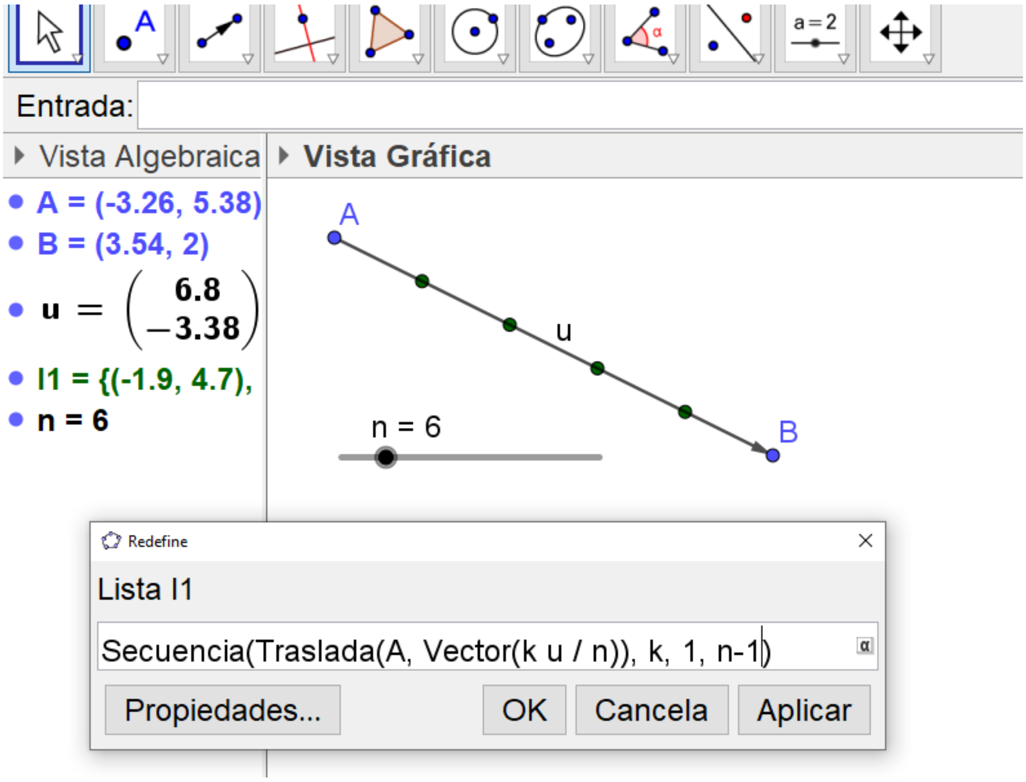

Figura 11. Dividiendo un segmento en n partes iguales con el comando Secuencia.

Ahora ya estamos listos para realizar el primer hilorama, el de base cuadrada. Dibujamos un cuadrado con el botón de Polígono regular y dividimos dos de sus lados consecutivos en n partes iguales como hemos aprendido a hacer, con lo que obtenemos dos listas de puntos. (fig. 12)

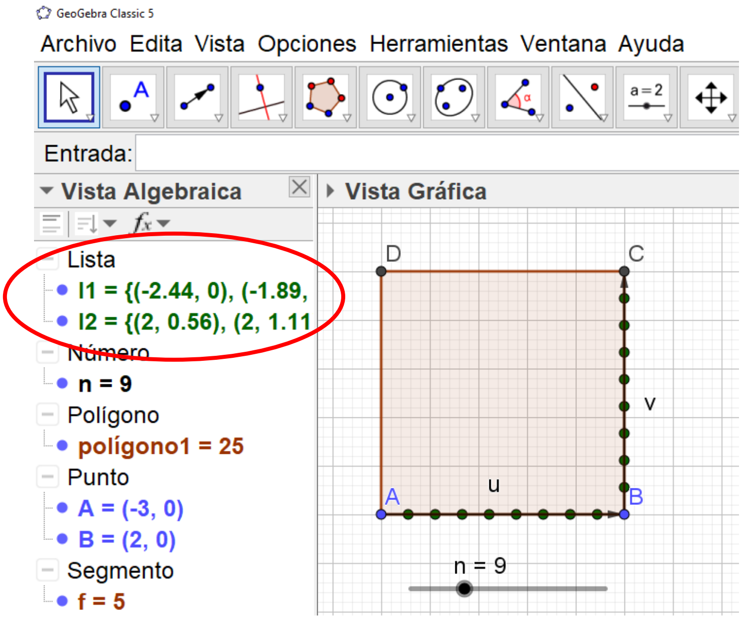

Figura 12. Preparando los lados del cuadrado para hacer el hilorama.

Tenemos que unir el primer elemento de la lista 1 con el primero de la lista 2, el segundo con el segundo, y así sucesivamente: traducido a lenguaje de GeoGebra, tenemos que dibujar segmentos de extremos el elemento k-ésimo de cada lista. Vemos de nuevo la necesidad de usar el comando secuencia (fig.13).

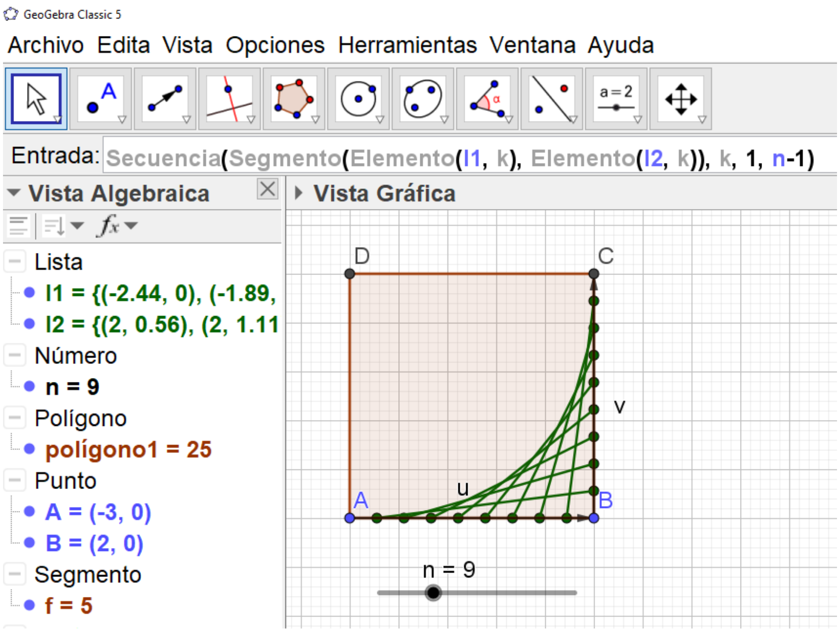

Figura 13. Uniendo puntos con segmentos para formar una esquina.

Ya hemos hecho lo más importante. Al mover el deslizador se hace la magia y, aunque haya costado trabajo y esfuerzo, a nadie se le ocurre preguntar “¿Y esto del álgebra para qué sirve?”

Llegados aquí, les propusimos completar el hilorama solos; algunos repitieron el esquema cambiando los lados y los vértices, pero otros se dieron cuenta de que era más rápido y eficiente girar 90º lo ya construido e incluso hacer simetrías centrales. Algunos de los que lo hicieron de la primera forma se hicieron un poco de lío con el orden de los elementos en las listas (fig. 14), ya que en el lado de arriba el primero es ahora el que va con el último; esto nos dio ocasión de aprender a invertirlo sin más que cambiar k por n-k.

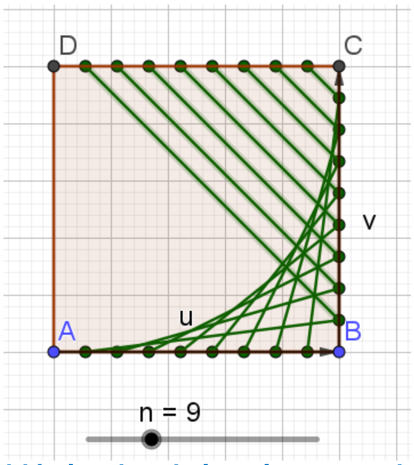

Figura 14. Se cambió el orden de los elementos de la lista por error.

El objetivo de que todos consiguieran construir este hilorama se alcanzó finalmente. A los que tardaron menos se les propuso hacer hiloramas sobre base triangular, pentagonal o la que eligieran. Esto obligó a calcular centros y ángulos de giro, puesto que ya no vale el de 90º. Además, los hiloramas de base de 5 o más lados permiten hacer otros “subhiloramas” internos uniendo puntos de lados no consecutivos (fig.15)

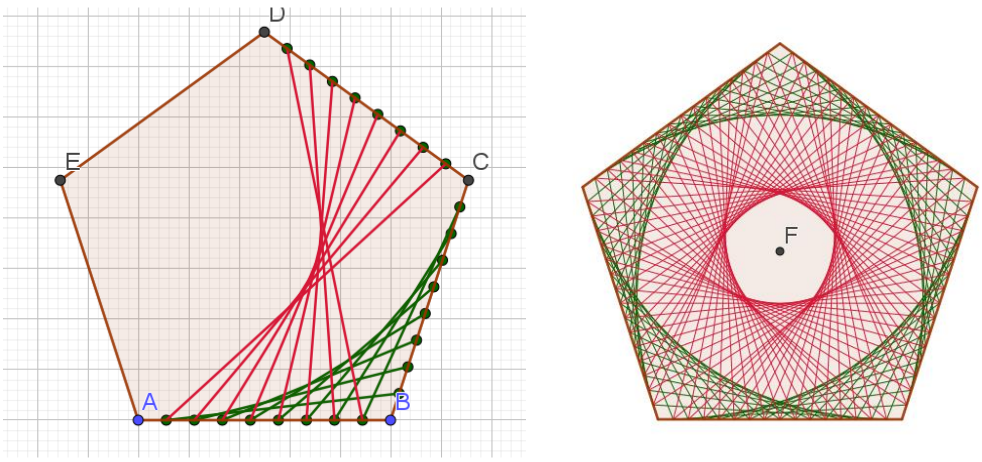

Figura 15. La lista roja se obtiene uniendo los puntos de la lista 1 con los de la lista 3. A la derecha, después de rotar ambas listas 2kπ/5 en torno al punto F

Pasamos después, ya de nuevo todo el grupo, a realizar hiloramas de base circular.

3.3. Hiloramas circulares

Los hiloramas circulares nos permiten revisar los giros y los restos, y además dan mucho juego matemático, como veremos luego.

Empezamos dividiendo la circunferencia en un número variable de puntos (puede ser conveniente que algunos empiecen con un número fijo de puntos), usando el comando Rota (fig. 16)

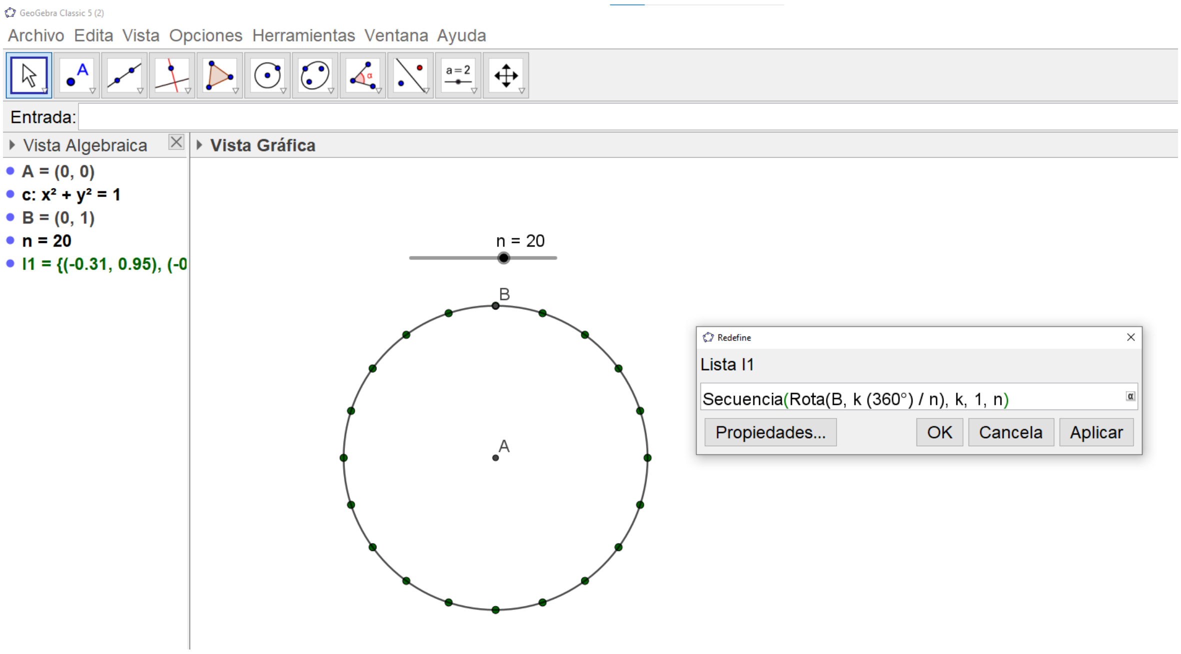

Figura 16. Dividiendo una circunferencia en n partes iguales.

A continuación, hay que elegir el "salto": unimos cada punto con otro de la misma lista saltando por ejemplo dos. Esto provoca un problema: si la lista tiene 20 elementos, los tres últimos no tienen con quién unirse (fig. 17)

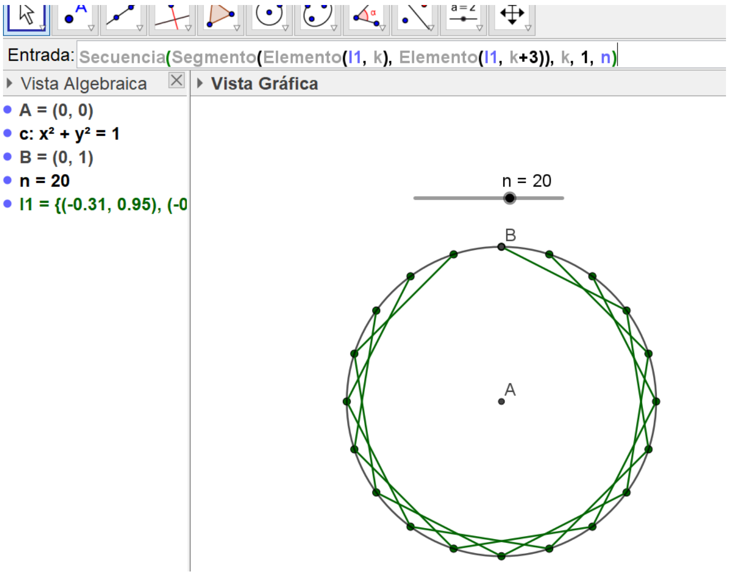

Figura 17. Uniendo puntos sin tener en cuenta que los últimos se salen de la lista.

Esto nos permite hablar de los restos al dividir (se entiende muy bien si hacemos una analogía con las horas del día o los días de la semana). Aún así, surge otro problema, y es que las listas no tienen elemento 0, por lo que siempre hay un punto que se queda huérfano (fig. 18)

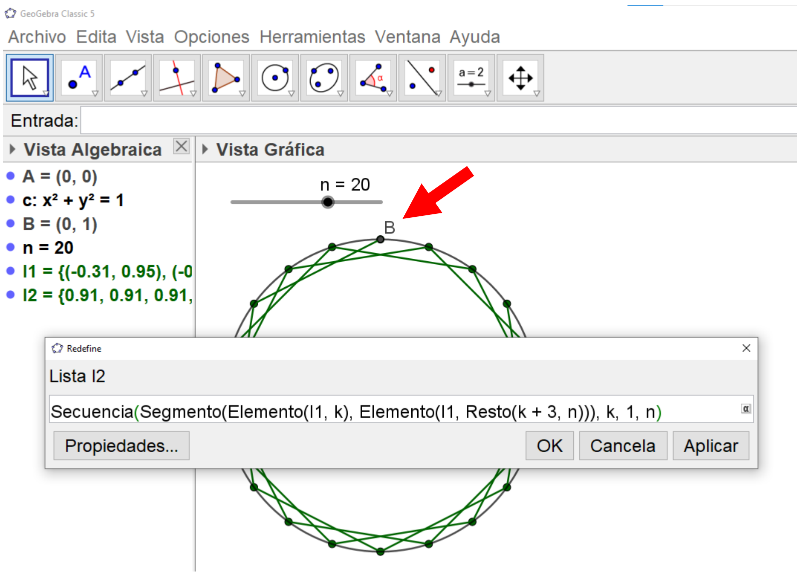

Figura 18. Sigue fallando algo.

Hay formas de resolver este problema numéricamente, pero finalmente se optó por combinar el comando Segmento con el comando Rota, es decir: una lista única, la de segmentos que unen puntos obtenidos al rotar (fig. 19)

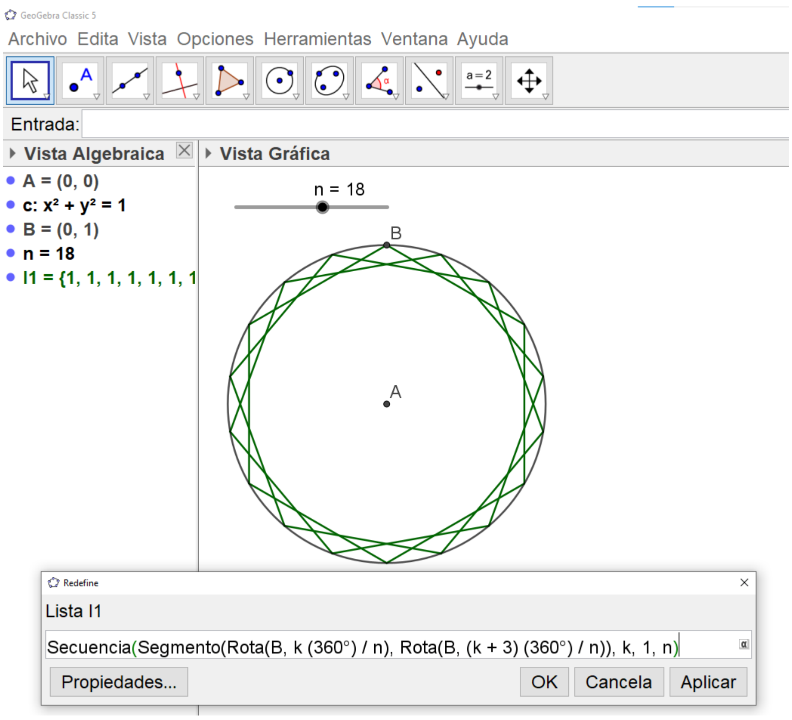

Figura 19. Una forma de resolver el problema.

Podemos variar el salto con un nuevo deslizador y dibujar un subhilorama con otro salto distinto, también variable (fig. 20).

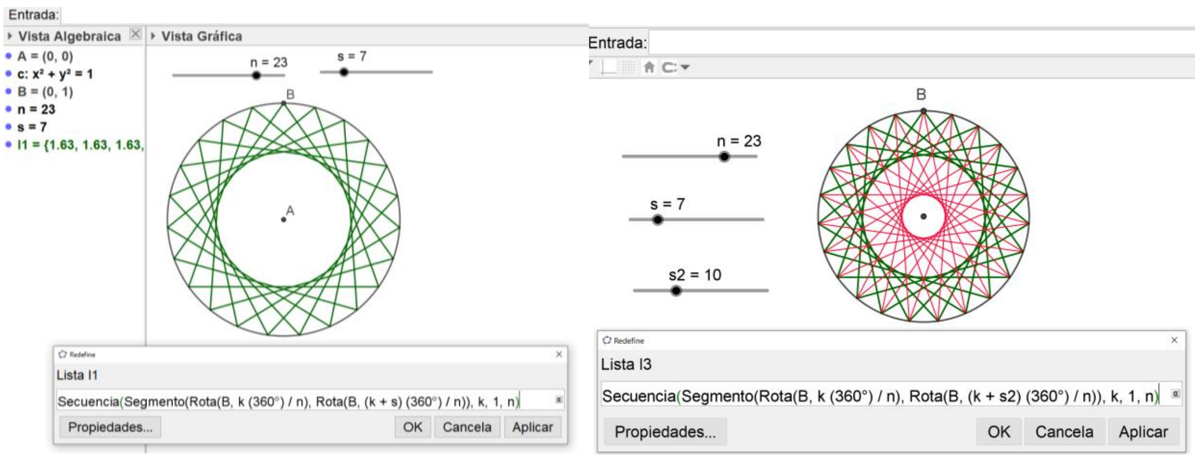

Figura 20. Hilorama y subhilorama con saltos variables s y s2

¿Qué sucede si el salto es multiplicativo en lugar de aditivo (es decir, si, en lugar de sumar s multiplicamos por s)? Pues que de nuevo surge la magia (fig. 21)

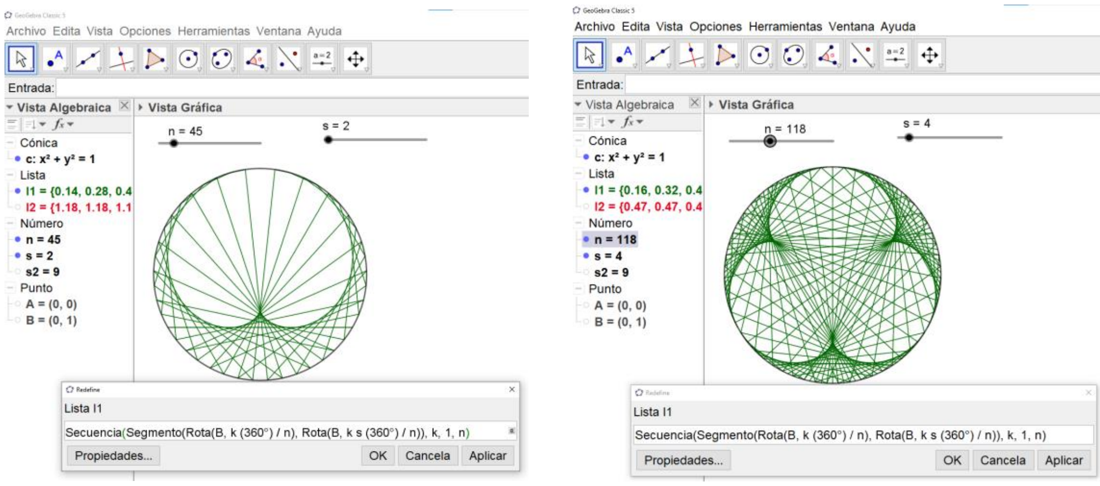

Figura 21. Figuras resultantes de unir cada punto k con el punto ks para s=2 y s=4

4. Actividades de ampliación.

Como explicamos al principio, cada alumno lleva su ritmo y algunos son más rápidos, otros más perfeccionistas, hay quien es más creativo o gusta de probar a hacer las cosas a su aire… a aquellos que disfrutan con los retos les propusimos tratar de recrear algunos de los hiloramas realizados por alumnos de 4º ESO como los que vimos en la fig. 2 y que entrañan bastante más dificultad (aunque el resultado es espectacular).

Aunque la actividad se diseñó para 2º ESO, puede realizarse en cursos más altos, donde podemos también hacer hiloramas sobre curvas de funciones (fig. 22)

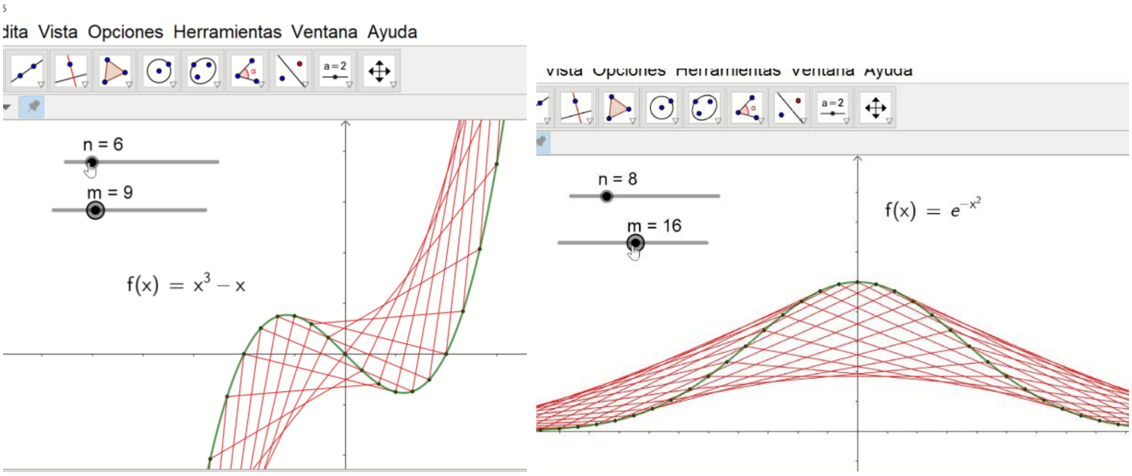

Figura 22. Hiloramas sobre una función cúbica y sobre una campana de Gauß

En lugar de segmentos podemos dibujar rectas, es decir, cuerdas de la función (fig.23); cuando el salto es mínimo y los puntos se aproximan vemos cómo las cuerdas tienden a las tangentes y el hilorama se aproxima a la envolvente, por lo que esta construcción puede servirnos para introducir o ilustrar el concepto de derivada (fig.24)

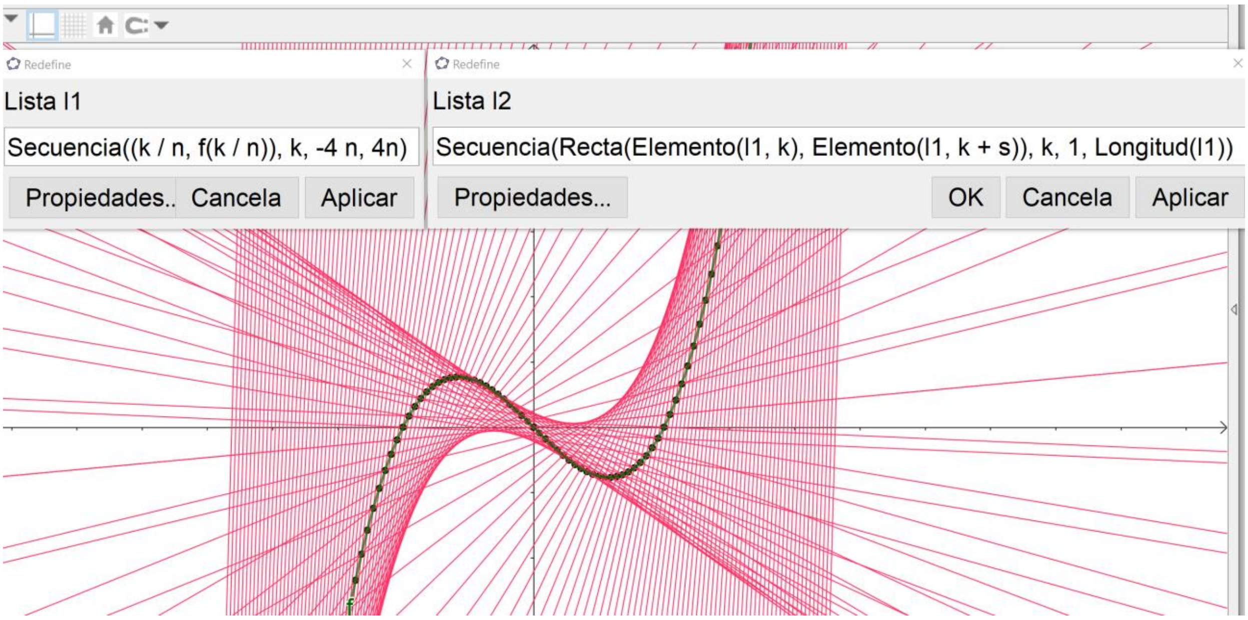

Figura 23. Hilorama sobre la cúbica con rectas en lugar de segmentos.

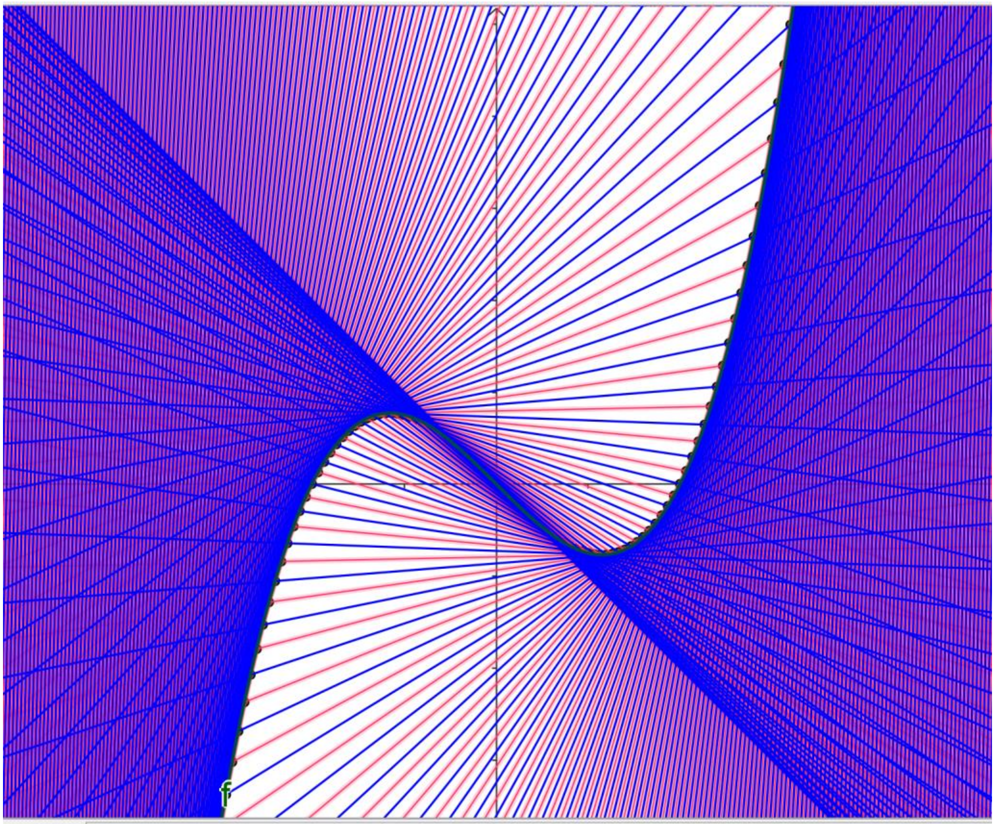

Figura 24. En rojo el hilorama y en azul las tangentes a la curva.

5. Conclusión

Hay conceptos que no son fáciles de asimilar y que requieren que el individuo los construya dándoles un sentido. A veces pensamos que basta explicar muy bien y mandar ejercicios, pero hoy sabemos (y las leyes educativas en vigor así lo recomiendan) que los aprendizajes activos son mucho más ricos y dejan una huella más duradera. El concepto de variable es fundamental para poder avanzar en matemáticas, y el no haberlo comprendido bien (aunque sí se haya aprendido a manipularlo) puede lastrar gravemente aprendizajes posteriores. GeoGebra es una herramienta valiosísima para evitarlo y que además resulta muy motivadora para la mayoría de los estudiantes, especialmente cuando se consiguen producciones bellas y sorprendentes. Es importante dejar que jueguen con la herramienta para evitar frustraciones y bloqueos cuando algo no funciona y no sale lo que se espera, tener paciencia con sus fallos (no es fácil ni inmediato acostumbrarse a pensar computacionalmente) pero tampoco dar demasiada información. Esta forma de trabajar puede llevar más tiempo, pero a la larga es una inversión que merece la pena.

Los applets de todos los hiloramas que aparecen en este artículo se encuentran disponibles en mi libro de Geogebra.

Elena Gajate Paniagua.
Elena.gajate@educacion.gob.es.
https://www.geogebra.org/u/elenagajate

Elena Gajate Paniagua:
Licenciada en Matemáticas por la USAL, profesora de secundaria desde 1989 y actualmente asesora técnica docente en el Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Profesora asociada en la UCLM, donde imparto clase en el MUFPS. Imparto formación a profesores en el CRFP de CLM y colaboro con Estalmat Ciudad Real y en la organización de las Olimpiadas Matemáticas regionales.